CENNI SU FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-copie}} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,n\}$$

Una funzione a n variabili reali e a valori reali è una funzione $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ D: dominio di f

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto f(x_1,\dots,x_n)$$

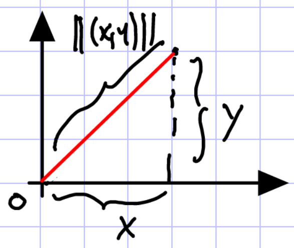
(Es)

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \qquad a_i \in \mathbb{R} \quad i=1,\dots,n$$

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} =: \|(x_1,\dots,x_n)\| : \text{ modulo di } (x_1,\dots,x_n)$$

$n=1 \qquad x_1 = x \qquad f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

$n=2 \quad (x_1,x_2) = (x,y) \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$: distanza del punto (x,y) dall'origine



(th. di Pitagora)

Si possono definire gli intorni di $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ si può definire la nozione di limite e quella di continuità di una funzione in un punto.

La nozione di differenziabilità è più delicata; vediamo invece la nozione di derivata parziale.

Per semplicità: $n=2$

Def: La derivata parziale rispetto ad x di $f(x,y)$ in $(x_0,y_0) \in$ Dominio di f è, se esiste, la derivata in x_0 della funzione ad una variabile $f(x,y_0)$ e si indica con $\partial_x f(x_0,y_0)$. Quindi:

$$\partial_x f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$ se esiste finito

Analogamente, la derivata parziale rispetto ad y di $f(x,y)$ in (x_0,y_0) è

$$\partial_y f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$ se esiste finito

Es) 1) $f(x,y) = 2x+3y$ $\quad \partial_x(2x+3y) = 2$ ("y è costante in x")

$\partial_y(2x+3y) = 3$

2) $\partial_x \|(x,y)\| = \partial_x \sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\partial_y \|(x,y)\| = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

Es) t: tempo

$y(t)$: quantità di una sostanza radioattiva al tempo t

$\Delta y(t) := y(t+\Delta t) - y(t)$: decadimento della sostanza al tempo t

Ipotesi: $\Delta y(t)$ è direttamente proporzionale alla quantità di sostanza e all'incremento di tempo Δt (per $\Delta t \to 0$). Quindi:

$\Delta y(t) = K\, y(t)\, \Delta t$ per K: costante <0 (tasso di decadimento)

$$\Rightarrow \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = K\, y(t)$$

Passando al limite per $\Delta t \to 0$ ottengo $y'(t) = K y(t)$

Ho trovato un'equazione differenziale : $y' = ky$

Def : 1) Un'equazione diff. ordinaria di ordine $n \geq 1$ è un'eq. ⊛ $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ con

$$\begin{cases} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D \to \mathbb{R} & \text{funzione a } n+2 \text{ variabili} \\ y = y(t) & \text{funzione (della variabile } t) \text{ incognita} \\ y^{(i)} = y^{(i)}(t) & \text{derivata } i\text{-esima di } y(t) \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

2) Una soluzione di ⊛ è una funzione

$\varphi : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^n(I)$ (di classe C^n) t.c.

$\forall\ t \in I \quad F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$.

3) Se F non dipende da t, ⊛ si dice <u>autonoma</u>

4) Se $F(t, y_0, y_1, \dots, y_n) = y_n - f(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$

con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq D' \to \mathbb{R}$ funzione di $n+1$ variabili

$\Rightarrow$ ⊛ diventa $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ e

si dice in <u>forma normale</u> .

(Es) 1) $y' = \underbrace{ky}_{f(y)}$: eq. diff normale, autonoma, di ordine 1

2) Legge di Newton : $F = \overset{\text{massa}}{m}\, a \leftarrow$ accelerazione, F: forza

si scrive $\underbrace{y''}_{a} = \frac{1}{m} \underbrace{f(t, y, y')}_{F}$: eq diff. in forma normale di ordine 2

3) $y' = f(t)$ eq. diff. in forma normale di ordine 1

φ è soluzione di 3) $\Leftrightarrow \forall\ t \in I \quad \varphi'(t) = f(t)$, cioè

φ è soluzione $\Leftrightarrow$ è una primitiva di f.

Se f è continua, per il th. fondamentale del calcolo, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + c$ con $\begin{cases} t_0 \in I \text{ fissato} \\ c \in \mathbb{R} \text{ costante} \end{cases}$

è soluzione di 3).

<u>Ipotesi</u>: considereremo solo eq. diff. con F continua (f continua nella forma normale)

<u>Nota</u>: dall'esempio 1) e 3), vediamo che le soluzioni in generale <u>non sono uniche</u>. Per avere unicità devo aggiungere delle condizioni. Nell'esempio 3), possiamo aggiungere la condizione "<u>al valore iniziale</u>": $y(t_0) = y_0$ con y_0: fissato.

Il problema da risolvere è $\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ <u>Problema di Cauchy</u>

Ho un'<u>unica</u> soluzione: $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx + y_0$.

Geometricamente: il grafico di φ passa per il punto (t_0, y_0).

<u>Def</u>: Se φ è soluzione dell'eq. diff ⊛, il suo grafico si dice <u>curva integrale</u> di ⊛.

Consideriamo l'eq. diff. 1): $y' = ky$.

$\varphi(t) = c e^{kt}$ è soluzione di 1) $\forall c \in \mathbb{R}$

Anche in questo caso ho infinite soluzioni; per avere unicità fisso la condizione "al valore iniziale" $y(t_0) = y_0$

Il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = ky \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ha come unica sol. $\varphi(t) = y_0 e^{-kt_0} e^{kt}$.

Nota: 1) Per avere unicità di un eq. in forma normale di ordine 1 si possono imporre altre condizioni;

ad esempio $\begin{cases} y' = y \\ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^2 y(t)\,dt}_{\text{media integrale}} = 1 \end{cases}$ ha come unica

soluzione $\varphi(t) = ce^t$ con $c \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^2 ce^t\,dt}_{\frac{1}{2}c(e^2-e^0)} = 1$

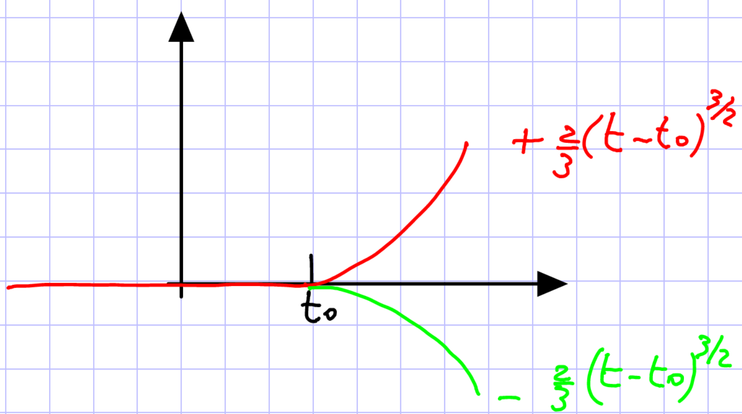
quindi $\varphi(t) = \frac{2}{e^2-1}\, e^t$.

2) Non è detto che la condizione al "valore iniziale" determini un'unica soluzione di un'eq. diff. in forma normale di ordine 1 .

(Es) $\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ eq. diff autonoma in forma normale e di ordine 1

$\varphi_0(t) = 0$ soluzione

$\varphi_\pm(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_0 \\ \pm\frac{2}{3}(t-t_0)^{3/2} & \text{se } t > t_0 \end{cases}$ per $t_0 \geq 0$ fissato



Verificare che $\varphi_\pm$ è soluzione (esercizio)

Th. (di esistenza locale - di Peano): se $\begin{cases} f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R} \ \underline{\text{continua}} \\ (t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D \end{cases}$

allora il Problema di Cauchy

$$(*) \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$n=1$ $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$n=2$ $\begin{cases} y'' = f(t,y,y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

ha una soluzione $\varphi \in C^n(I)$ con I: intorno di t_0.

th (di esistenza ed unicità locale - di Cauchy): se inoltre $\partial_{y_i} f$ continua su D $\forall i = 1, \dots, n$, allora

$(*)$ ha un'unica soluzione $\varphi \in C^n(I)$ con I: intorno di t_0

Es) 1) $\begin{cases} y' = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ f continua soddisfa le cond. del th. di Cauchy $\left(\partial_y f(t) = 0 \right)$

2) $\begin{cases} y' = y^{1/3} \left(= f(t,y)\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\partial_y f$ non è continua in 0 $\Rightarrow$ non soddisfa le ipotesi del th. di Cauchy

3) $\begin{cases} y' = |y| + 1 \left(= f(t,y)\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\partial_y f = \underbrace{\partial_y |y|}_{\operatorname{sgn} y \,:\, \text{segno di } y}$: non è continua in $y=0$

$\Rightarrow f$ non soddisfa le ipotesi del th. di Cauchy.

Però 3) ha un'unica soluzione $\varphi(t) = (e^{|t|} - 1) \operatorname{sgn} t$ (verificarlo). Quindi le ip. del th. di Cauchy si possono indebolire.