Nota: 1) le ipotesi del th. di esistenza ed unicità locale (di Cauchy) possono essere indebolite. Ad esempio: per $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ si può sostituire l'ipotesi "$\partial_y f$ continua su $D \subseteq \mathbb{R}^2$" con "$\partial_y f$ limitata su D" $\Rightarrow$ vale il th di Cauchy.

(Es) a) $f(t,y) = |y| + 1 \Rightarrow |\partial_y f| = |\operatorname{sgn} y| \leq 1 \quad \forall y$

$\Rightarrow$ esistenza ed unicità locale per

$$\begin{cases} y' = |y| + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b) $f(t,y) = y^{1/3} \qquad |\partial_y f| = \left|\frac{1}{3}\frac{1}{y^{2/3}}\right| \to +\infty$ per $y \to 0$

$\Rightarrow \partial_y f$ non è limitata in nessun intorno di 0!

2) Il th. di esistenza ed unicità locale <u>non</u> assicura l'esistenza ed unicità globale; per questo ci vogliono ipotesi più forti.

(Es) $\begin{cases} y' = y^2 \; (= f(t,y)) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(t,y)$ è continua con $\partial_y f = 2y$ continua su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ il th. di Cauchy assicura esistenza ed unicità locale.

Consideriamo $\varphi(t) = \frac{1}{2-t}$. Si ha:

$$\varphi'(t) = -\frac{-1}{(2-t)^2} = (\varphi(t))^2 \quad \text{e} \quad \varphi(0) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ φ è l'unica soluzione e non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

METODO DI SEPARAZIONE DI VARIABILI

$$(*) \quad y' = \underbrace{a(t)\,b(y)}_{f(t,y)} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} a \in C^0(I) & I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo} \\ b \in C^1(J) & J \subseteq \mathbb{R} \quad " \end{cases}$$

Si ha: $\begin{cases} f(t,y) \text{ è cont. su } D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \partial_y f = a(t)\,b'(y) \text{ è cont. su } D \end{cases}$

$\Rightarrow$ vale il th. di esistenza ed unicità locale per il Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(t)\,b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

con $t_0 \in I$ e $y_0 \in J$.

Cerchiamo le soluzioni di $(*)$

a) se $y_0 \in J$ t.c. $b(y_0) = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(t) = y_0$ $\forall\, t \in I$

è soluzione $\left(\varphi' = 0 = a(t)\,b(\underbrace{\varphi(t)}_{y_0}) \quad \forall\, t \in I \right)$

$\left(\begin{array}{ll} \text{ed è l'unica di} & \begin{cases} y' = a(t)\,b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \\ \text{per ogni } t_0 \in I & \end{array} \right)$

La soluzione $\varphi(t) = y_0$ si dice <u>integrale singolare</u> di $(*)$ (equilibrio)

b) Sia $\tilde{J} \subseteq J$ intervallo t.c. $b(y) \neq 0$ $\forall\, y \in \tilde{J}$
(basta prendere un intorno di y_1 in J t.c. $b(y_1) \neq 0$)

Posso "separare le variabili": $\frac{y'}{b(y)} = a(t)$.

Sia $B(y)$ una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ su $\tilde{J}$ (esiste per il th. fondamentale del calcolo, perché $\frac{1}{b(y)} \in C^0(\tilde{J})$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} B(y(t)) = \frac{d}{dy} B(y) \cdot \frac{d}{dt} y(t) = \frac{1}{b(y)} y' = a(t)$$

cioè $B(y(t))$: primitiva di $a(t)$.

Sia $A(t)$: primitiva di $a(t)$. Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$

t.c. $B(y(t)) = A(t) + c$: <u>forma implicita</u>

Perché $\frac{d}{dy} B(y) = \frac{1}{b(y)} \neq 0$ ed è continua su $\tilde{J}$, non cambia segno su $\tilde{J}$ $\Rightarrow$ B è strettamente monotona su $\tilde{J}$, quindi invertibile su $\tilde{J}$ con inversa B^{-1}.

Quindi $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t) := B^{-1}(A(t) + c)$ è soluzione di ⊛ $\forall\, t \in \tilde{I} \subseteq I$.

$$\tilde{I} = \{t \in I \mid \varphi(t) \in \tilde{J}\}$$

Inoltre, c'è unicità locale per $\begin{cases} y' = a(t)\, b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

$\forall\, (t_0, y_0) \in I \times J$ con $b(y_0) \neq 0$, ponendo $c = B(y_0) - A(t_0)$.

"Regola mnemonica": a) trovare gli zeri di b $\Rightarrow$ integrali singolari

b) si calcola $\underbrace{\int \frac{y'(t)\, dt}{b(y(t))}}_{} = \int a(t)\, dt$

$$= \int \frac{dy}{b(y)}$$ e si esplicita $y(t)$

E1

1) $y' = \underset{a(t)}{K}\, \underset{b(y) \in C^1}{y} \qquad K \neq 0$

$b(y) = y = 0 \iff y = 0$: integrale singolare

$$\frac{y'}{y} = K \implies \int \frac{dy}{y} = \int K\, dt \iff$$

$\log|y| = Kt + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$ forma implicita

$$\iff |y| = e^{Kt+c} = \underbrace{e^c}_{>0} e^{Kt}$$

$$\iff y(t) = \underbrace{\pm e^c}_{c' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot e^{Kt} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

Per $c' = 0$ ritrovo $y(t) = 0$.

$\varphi(t) = c e^{Kt} \quad \forall c \in \mathbb{R}$ è soluzione

Def: Una generica soluzione di un'eq. differenziale, dipendente da uno o più parametri, si dice anche <u>integrale generale</u> dell'equazione.

2) $y' = \underset{a(t)}{K}\, \underbrace{y(M-y)}_{b(y)} \qquad K, M > 0$ <u>equazione logistica</u>

(modello di crescita di popolazione con risorse limitate: tiene conto della competizione)

$b(y) = y(M-y) = 0 \iff y = 0$ opp. $y = M$

int. singolari

$$\int \underbrace{\frac{dy}{y(M-y)}}_{\frac{1}{M}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{M-y}\right)} = \int k\,dt \iff \frac{1}{M}\log|y| - \log|y-M| = kt+c \quad \forall\, c\in\mathbb{R}$$

$$\iff \log\left|\frac{y}{y-M}\right| = Mkt + \underbrace{Mc}_{=c' \in \mathbb{R}} \qquad \text{forma implicita}$$

$$\iff y = \underbrace{\pm e^{c'}}_{c''\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{Mkt}(y-M)$$

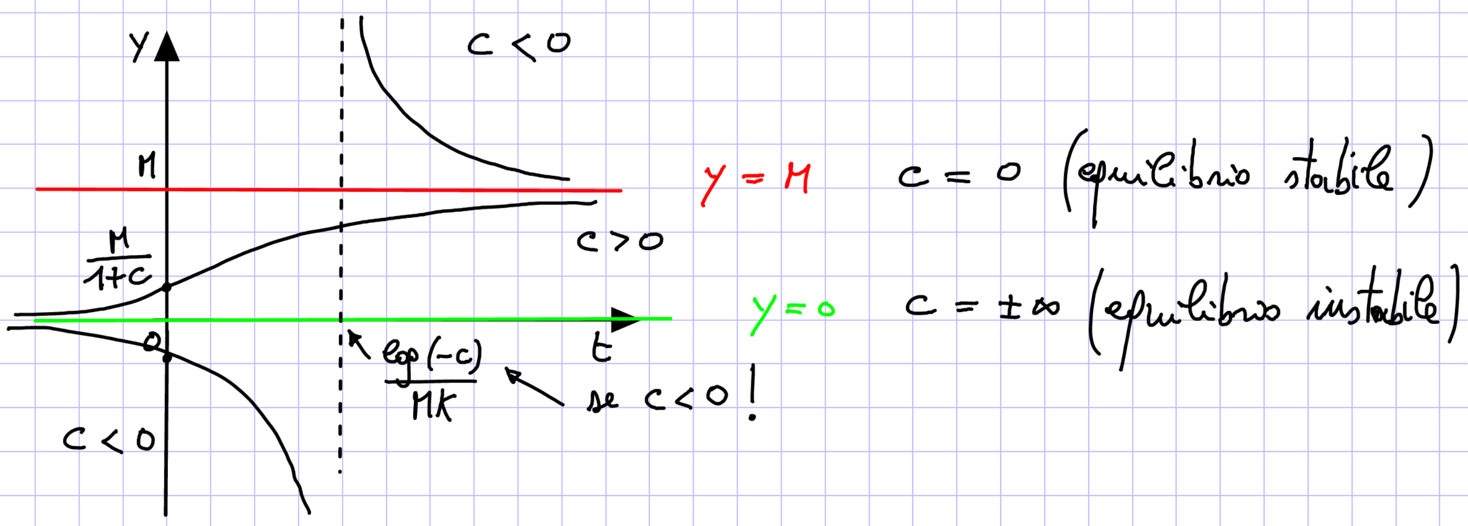
$$\iff y(t) = \frac{M}{1+c''e^{-Mkt}} \qquad \forall\, c''\neq 0$$

Per $c''=0$, ritrovo $y(t)=M$. Quindi:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{M}{1+ce^{-Mkt}} \\ \varphi(t)=0 \end{cases}$$ è l'integrale generale al variare di $c\in\mathbb{R}$.

Notiamo che $\lim_{c\to\pm\infty} \frac{M}{1+ce^{-Mkt}} = 0 \quad \forall\, t$, cioè

ritroviamo $\varphi(t)=0$ per $c=\pm\infty$.



EQ. DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 1

$$(*) \quad y' + a(t)\,y = b(t) \iff y' = \underbrace{b(t)-a(t)y}_{f(t,y)}$$

con $a,b\in\mathcal{C}^0(I)$ $\quad I$ intervallo

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t,y) \text{ cont. su } I\times\mathbb{R} \\ \partial_y f = -a(t) \in \mathcal{C}^0(I) \end{cases} \Rightarrow \text{vale il th. di Cauchy di esistenza ed unicità.}$$

(in questo caso vale esistenza ed unicità globale!)

I caso : $b(t)=0 \Rightarrow \circledast_0 : y' + a(t)\,y = 0$ eq. omogenea

$y' = -a(t)y$: a variabili separabili

$y=0$: int. singolare

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt \iff \log|y| = -A(t) + c$$

con $c\in\mathbb{R}$ e $A'(t) = a(t)$

(A esiste perché a continua)

$$\iff y(t) = \underbrace{c'}_{= \pm e^{c}}\, e^{-A(t)} \quad \text{con } c'\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Per $c'=0 \Rightarrow y=0$, quindi

$\varphi(t) = c\,e^{-A(t)}$: int. generale $\forall\, c\in\mathbb{R}$ di $\circledast_0$

II caso : $b(t)$ non necessariamente $=0$

"Metodo di variazione della costante" : cerco soluzioni di $\circledast$ della forma $\varphi(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$

$\uparrow$ funzione $\mathcal{C}^1$

Sostituendo φ in $\circledast$, si ha:

$$\underbrace{c'(t)\,e^{-A(t)} + c(t)\,e^{-A(t)}(-a(t))}_{\varphi'(t)} + a(t)\Big(\underbrace{c(t)\,e^{-A(t)}}_{\varphi(t)}\Big) = b(t)$$

$\Leftrightarrow \quad c'(t) = b(t)\, e^{A(t)}$, cioè $c(t)$: primitiva di $b(t)\, e^{A(t)}$

$$\varphi(t) = (c(t) + c)\, e^{-A(t)} \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A'(t) = a(t) \\ c'(t) = b(t)\, e^{A(t)} \end{cases}$$

è l'integrale generale di ⊛

<u>Nota</u>: $\varphi(t) = \underbrace{c\, e^{-A(t)}}_{\text{int. generale dell'eq. } y' + a(t)y = 0 \text{ : eq. omogenea associata}} + \underbrace{c(t)\, e^{-A(t)}}_{\text{sol. particolare di ⊛}} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

Regola mnemonica: $\varphi(t) = e^{-A(t)} \int b(t)\, e^{A(t)}\, dt$

con $A'(t) = a(t)$

(Es) 1) $\quad y' + \underbrace{3t}_{a(t)}\, y = \underbrace{t^3}_{b(t)}$

$$A(t) = \int 3t\, dt = \frac{3}{2} t^2 \; (+\text{cost.})$$

$$c'(t) = t^3 e^{\frac{3}{2}t^2} \Rightarrow \int t^3 e^{3/2\, t^2}\, dt \overset{\text{per parti}}{=} \dots = \frac{1}{3} e^{3/2\, t^2}\left(t^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{3}{2}t^2}\left(\frac{1}{3} e^{3/2\, t^2}\left(t^2 - \frac{2}{3}\right) + c\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\left(t^2 - \frac{2}{3}\right)}_{\text{soluzione particolare di } y' + 3ty = t^3} + \underbrace{c\, e^{-3/2\, t^2}}_{\text{int. generale di } y' + 3ty = 0} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$