ESERCIZI

1) $(1+t^2)y' - 2ty = 0$ eq. diff. non in forma normale

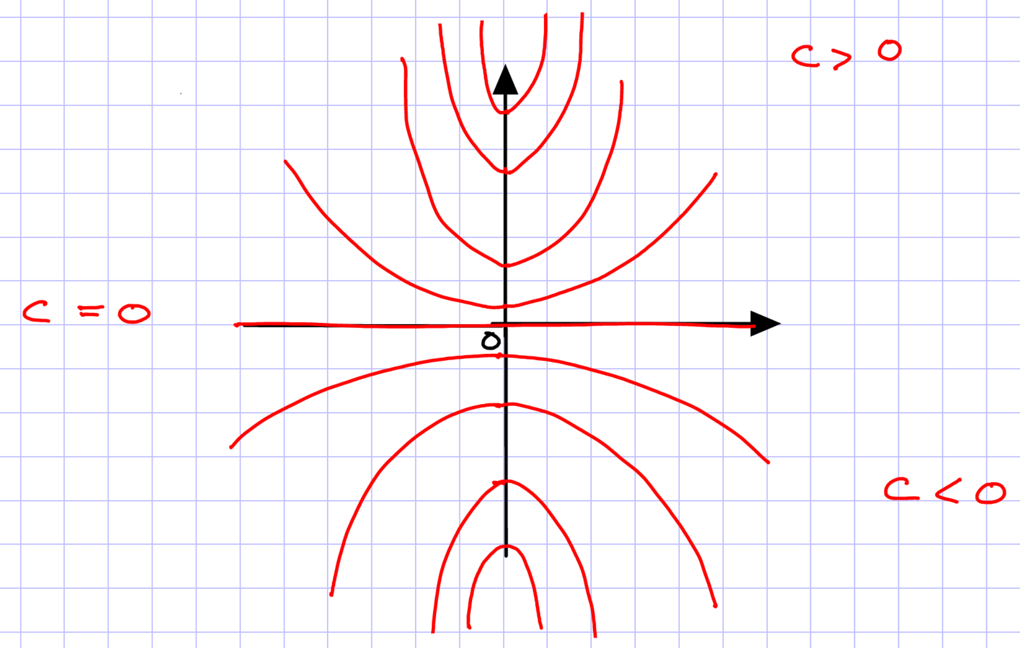
$1+t^2 \neq 0 \quad \forall t \Rightarrow y' - \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{a(t)} y = 0$ (continua) eq. lineare di ordine 1 omogenea (equivalente a 1))

$$\int a(t)\,dt = \int -\frac{2t}{1+t^2}\,dt = -\log(1+t^2) + \text{cost.}$$

$A(t) = -\log(1+t^2) \Rightarrow \varphi(t) = ce^{-A(t)} = ce^{\log(1+t^2)} = c(1+t^2) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

int. generale di 1)

curve integrali: parabole ct^2+c e retta $y=0$ $(c=0)$



Dati $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t_0) = y_0 \Leftrightarrow c(1+t_0^2) = y_0 \Leftrightarrow c = \frac{y_0}{1+t_0^2}$

Quindi il Pb. di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2t}{1+t^2} y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ha un'unica

soluzione su $\mathbb{R}$: $\varphi(t) = \frac{y_0}{1+t_0^2}(1+t^2)$ per ogni coppia $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

<u>Nota</u>: il Pb. di Cauchy ⊛ $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $a, b \in C^0(I)$, $t_0 \in I$: interv.

ha un'unica sol. su I (già visto). Esplicitamente:

scelgo $\begin{cases} A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau & \Rightarrow A(t_0) = 0 \\ C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{A(s)}\, ds & \Rightarrow C(t_0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(t) = e^{-A(t)}(C(t) + c)$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$ int. generale di $y' + a(t)y = b(t)$

$\varphi(t)$ è sol. del Pb. di Cauchy $\Leftrightarrow \varphi(t_0) = y_0 \Leftrightarrow$

$c = y_0 \Leftrightarrow \varphi(t) = e^{-A(t)}(C(t) + y_0)$. Quindi:

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_{t_0}^{s} a(x)\,dx}\, ds + y_0 \right)$$

è l'unica soluzione del Pb. di Cauchy ⊛ su I.

2) $t y' + y = t^2$ eq. diff. <u>non</u> in forma normale

Per dividere per t, devo restringermi a $\{t > 0\}$ opp. $\{t < 0\}$.

(I) $t > 0$. Divido per t e ottengo:

$y' + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)} y = \underbrace{t}_{b(t)}$ eq. lineare di ordine 1 equivalente a 2) su $]0, +\infty[$

$a(t)$, $b(t)$: cont. su $]0, +\infty[$

$\int a(t)\,dt = \log t + \text{cost.} \Rightarrow A(t) = \log t$

$\Rightarrow \varphi(t) = e^{-\log t} \int \underbrace{e^{\log t}}_{t} \cdot t\, dt$

$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{3}t^3 + c'\right)$ $\forall c' \in \mathbb{R}$ int. generale di 2) su $]0, +\infty[$

Per ogni $t_0 > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, vale il th. di unicità per il Pb. di Cauchy $\circledast \begin{cases} y' + \frac{1}{t} y = t & \text{su }]0, +\infty[\\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

(II) $t < 0$. 2) diventa $y' + \frac{1}{t} y = t$ su $]-\infty, 0[$.

$$A(t) = \log(-t) \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{-t} \int -t^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{3} t^3 + c''\right) \quad \forall c'' \in \mathbb{R}$$

int. generale di 2) su $]-\infty, 0[$

Per ogni $t_0 < 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, vale il th. di unicità per il Pb. di Cauchy $\circledast$ su $]-\infty, 0[$.

Noto che c' e c'' sono indipendenti, quindi

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} t^2 + \frac{c'}{t} & \text{se } t > 0 \\ \frac{1}{3} t^2 + \frac{c''}{t} & \text{se } t < 0 \end{cases} \qquad \forall c', c'' \in \mathbb{R}$$

è int. generale di $y' + \frac{1}{t} y = t$ su $\overbrace{]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}^{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$, e quindi anche di 2) su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per $c' = c'' = 0$, $\varphi(t) = \frac{1}{3} t^2$ è l'unica sol. di 2) definita su $\mathbb{R}$.

__Nota__: Il Pb. di Cauchy $\circledast$ non ha una soluzione unica su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: la condizione $y(t_0) = y_0$ determina solo uno dei due parametri c', c'' (c' se $t_0 > 0$, c'' se $t_0 < 0$). Questo è dovuto al fatto che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ __non__ è un intervallo, ma unione disgiunta di due intervalli ($]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$).

3) $y' + y \underbrace{\cos t}_{a(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t)}_{b(t)}$: eq. diff. lineare di ordine 1 (cont. su $\mathbb{R}$)

$$\int \cos t \, dt = \operatorname{sen} t + \text{costante} \Rightarrow A(t) = \operatorname{sen} t$$

$$\varphi(t) = e^{-\operatorname{sen} t} \underbrace{\int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) \cdot e^{\operatorname{sen} t} \, dt}_{\overset{PP}{=} \operatorname{sen} t \, e^{\operatorname{sen} t} - e^{\operatorname{sen} t} + c}$$

$$= e^{-\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t \, e^{\operatorname{sen} t} - e^{-\operatorname{sen} t} e^{\operatorname{sen} t} + c e^{-\operatorname{sen} t}$$

$$= \underbrace{\operatorname{sen} t - 1}_{} + c e^{-\operatorname{sen} t} \quad \forall \, c \in \mathbb{R}$$: int. generale di 3)

int. generale dell'eq. omogenea associata $(y' + y \cos t = 0)$

soluzione particolare di 3) (per $c = 0$)

4) $y' = \underbrace{\sqrt{y}}_{h(y)}$ eq. diff. a variabili separabili

Se $y(t)$ è sol. di 4) $\Rightarrow \begin{cases} y(t) \geq 0 \\ y'(t) \geq 0 \end{cases} \quad \forall \, t \in \mathbb{R}$

$\varphi(t) = 0$ è l'unico integrale singolare $(h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0)$

Separiamo le variabili: $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dt \Leftrightarrow$

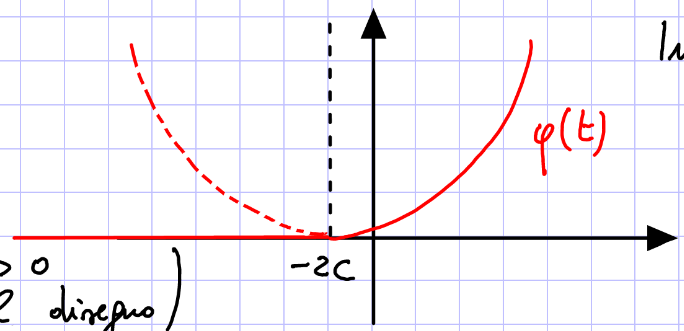
$$\frac{1}{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = t + c' \quad \forall \, c' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2} t + c \overset{:= \frac{c'}{2}}{} \quad \forall \, c \in \mathbb{R}$$: forma implicita definita su $\underbrace{]-2c, +\infty[}_{\{t \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} t + c > 0\}}$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2} t + c\right)^2 \quad \forall \, c \in \mathbb{R}$$

Noto che $\left(\frac{1}{2}t+c\right)^2\Big|_{t=-2c}=0$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t+c\right)^2\Big|_{t=-2c}=0$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<-2c \\ \left(\frac{1}{2}t+c\right)^2 & \text{se } t\geq -2c \end{cases}$$ è sol. di 4) $\forall\, c\in\mathbb{R}$



(c > 0 nel disegno)

Infatti: $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ e $\forall\, t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \varphi(t)\geq 0, \ \varphi'(t)\geq 0 \\ \varphi'(t)=\sqrt{\varphi(t)} \end{cases}$$

Quindi $\varphi(t)$ definita sopra $\forall\, c\in\mathbb{R}$ e $\varphi(t)\equiv 0$: int. generale di 4).

5) $(y')^2=y$ eq. diff. <u>non</u> in forma normale

5) è equiv. a $|y'|=\sqrt{y}$, cioè a due eq.:

$$y'=\sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad y'=-\sqrt{y}$$

I) $y'=\sqrt{y}$ è l'eq. 3), che ha come int. generale

$$\begin{cases} \varphi(t)=0 \\ \varphi_{I}(t)=\begin{cases} 0 & \text{se } t<-2c' \\ \left(\frac{1}{2}t+c'\right)^2 & \text{se } t\geq -2c' \end{cases} \quad \forall\, c'\in\mathbb{R} \end{cases}$$

II) $y'=-\sqrt{y}$

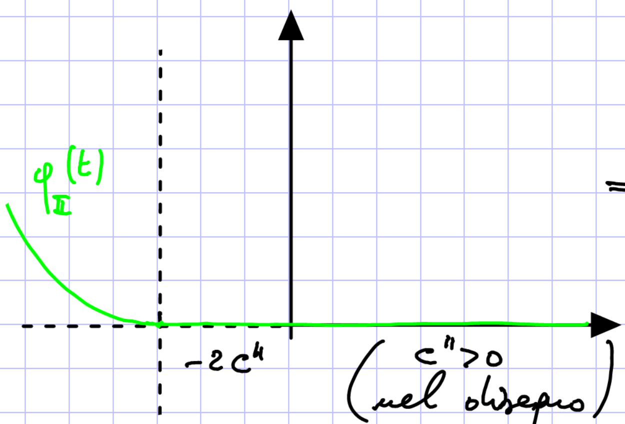
Se $y(t)$ è sol. di II) $\Rightarrow \begin{cases} y(t)\geq 0 \\ y'(t)\leq 0 \end{cases}$

Analogamente a 3) si trova: $\varphi(t)\equiv 0$ e $\sqrt{y}=-\frac{1}{2}t-c''$ definita su $\underbrace{]-\infty,-2c''[}_{\{t\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{1}{2}t-c''>0\}}$ $\Leftrightarrow$ $y=\left(\frac{1}{2}t+c''\right)^2$ $\forall\, c''\in\mathbb{R}$

quindi:

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 \\ \varphi_{II}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}t + c''\right)^2 & \text{se } t \le -2c'' \\ 0 & \text{se } t > -2c'' \end{cases} \end{cases}$$

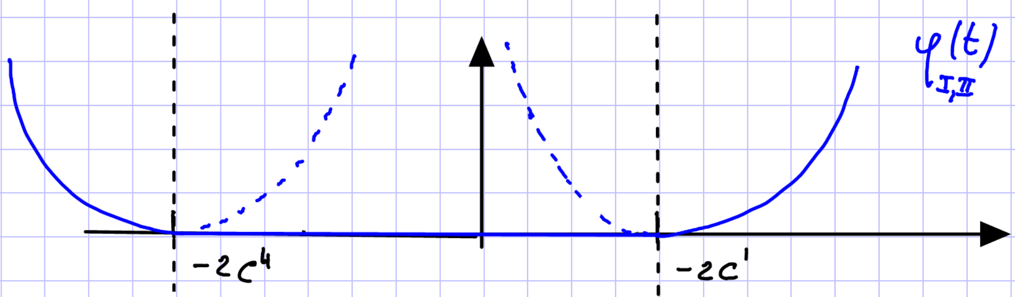
int. generale di II) $\forall\, c'' \in \mathbb{R}$



$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) = 0 \\ \varphi_{I}(t) \quad \forall\, c' \in \mathbb{R} \\ \varphi_{II}(t) \quad \forall\, \mathbb{R} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sono soluzioni di 5), ma non sono tutte!

Infatti: se $c' \le c''$ definiamo $\varphi_{I,II}(t)$



$$\varphi_{I,II}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}t + c''\right)^2 & \text{se } t \le -2c'' \\ 0 & \text{se } t \in [-2c'', -2c'] \\ \left(\frac{1}{2}t + c'\right)^2 & \text{se } t \ge -2c' \end{cases}$$

è sol. di 5) al variare di $c', c'' \in \mathbb{R}$ con $c' \le c''$.

In definitiva:

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 \\ \varphi_{I}(t) \\ \varphi_{II}(t) \\ \varphi_{I,II}(t) \end{cases}$$

è l'int. generale di 5).

<u>Nota</u>: Se $c' > c''$, $\varphi_{I,II}$ non è derivabile in un punto, quindi non è soluzione di 5):