ESERCIZI

1) $(t+1)y' - ty = 0$ eq. diff. lineare di ordine 1 omogenea non in forma normale

Sia I: intervallo non contenente -1.

$\forall t \in I$, $t+1 \neq 0$ e 6) è equivalente a

$$y' \underbrace{- \frac{t}{t+1}}_{a(t) \in C^0(I)} y = 0$$

L'int. generale è $\varphi(t) = c\, e^{-A(t)}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

con $A'(t) = -\frac{t}{t+1}$

$$\int -\frac{t}{t+1}\,dt = -\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = -\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= -t + \log(t+1) + \text{cost.}$$

$\varphi(t) = c\,\frac{e^t}{t+1}$ $\forall c \in \mathbb{R}$: int. generale di 1) su I

Pb: esistono soluzioni di 1) definite su $\mathbb{R}$?

Su $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\varphi(t) = \begin{cases} c' \frac{e^t}{t+1} & \text{se } t < -1 \quad \text{con } c' \in \mathbb{R} \\ c'' \frac{e^t}{t+1} & \text{se } t > -1 \quad \text{con } c'' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

è sol. di 1). $\varphi(t)$ si estende ad una funzione continua su $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to -1^-} \varphi(t) = \lim_{t \to -1^+} \varphi(t) \text{ finiti} \Leftrightarrow$$

$c' = c'' = 0$. Quindi $\varphi(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione di 1) definita su $\mathbb{R}$.

2) $y' = t \underbrace{\operatorname{sen} y}_{h(y)}$ eq. a variabili separabili.

$\operatorname{sen} y = 0 \iff y = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

$\varphi(t) = k\pi$ int. singolare $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Separo le variabili: $\dfrac{y'}{\operatorname{sen} y} = t$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{\operatorname{sen} y}}_{\downarrow\ t = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right)} = \underbrace{\int t\, dt}_{\frac{1}{2}t^2 + c}$$

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \overbrace{\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\, dt}^{dy} \Bigg|_{t = \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right)} = \log \left| \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) \right| + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) \right| = e^{\frac{1}{2}t^2 + c} = e^{\frac{1}{2}t^2} e^c \qquad \forall\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = \underset{\pm e^c \,\in\, \mathbb{R}\setminus\{0\}}{\underset{\shortparallel}{c'}}\, e^{\frac{1}{2}t^2}$$ forma implicita

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{2} = \operatorname{arctg}\left(c' e^{\frac{1}{2}t^2}\right) + k\pi \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z},\ c' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow \quad y = 2 \operatorname{arctg}\left(c' e^{\frac{1}{2}t^2}\right) + 2k\pi$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} k\pi \\ 2\operatorname{arctg}\left(c\, e^{\frac{1}{2}t^2}\right) + 2k\pi \end{cases} \quad \forall\ k \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$ int. generale di 2)

3) $y' = \dfrac{2t - y}{t - 1}$ eq. lineare

Cerco sol. su I: intervallo non contenente 1

$$y' + \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{a(t)} y = \underbrace{\frac{2t}{t-1}}_{b(t)}$$

$$A(t) = \log|t-1|$$

$$c(t) = \int \frac{2t}{t-1} \underbrace{e^{\log|t-1|}}_{|t-1|} dt = \int 2t \operatorname{sgn}(t-1)\, dt$$

$$= \operatorname{sgn}(t-1) \int 2t\, dt = \operatorname{sgn}(t-1)(t^2 + c) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) = \underbrace{e^{-\log|t-1|}}_{\frac{1}{|t-1|}} \operatorname{sgn}(t-1)\,(t^2+c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{t-1}(t^2+c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$ int. gen. di 3) su I

Su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, l'int. generale di 3) è

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-1}(t^2+c') & \text{se } t<1 \quad \forall c' \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{t-1}(t^2+c'') & \text{se } t>1 \quad \forall c'' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4) $\begin{cases} y' = \dfrac{1-e^{-y}}{2t+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ variabili separabili $\left(h(y) = 1-e^{-y}\right)$

$t_0 = 0 > -\frac{1}{2}$, cioè $t_0 \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Sia I: intervallo non contenente $-\frac{1}{2}$ e contenente 0

$\Rightarrow I \subseteq \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $I \ni 0$.

$h(y) = 0 \iff y = 0$: int. sing. di $y' = \dfrac{1-e^{-y}}{2t+1}$,

ma non risolve 4) : $y(0) \neq 1$.

Separazione delle variabili: $\int \frac{dy}{1-e^{-y}} = \underbrace{\int \frac{dt}{2t+1}}_{\frac{1}{2}\log|2t+1|+c}$

$$s = e^{-y} \Rightarrow ds = e^{-y}(-dy) = s(-dy)$$

$$\int \frac{dy}{1-e^{-y}} = \int \frac{1}{1-s}\,\frac{-ds}{s}\Big|_{s=e^{-y}} =$$

$$= \int \frac{1-s+s}{-s(1-s)}\,ds\Big|_{s=e^{-y}} = \left(-\int \frac{ds}{s} + \int \frac{ds}{s-1}\right)\Big|_{s=e^{-y}}$$

$$= \log\left|\frac{s-1}{s}\right|\Big|_{s=e^{-y}} + \text{cost.} = \log|1-e^{y}| + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \log|1-e^{y}| = \frac{1}{2}\log|2t+1| + c \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |1-e^{y}| = e^{c}\sqrt{|2t+1|} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1-e^{y} = \underbrace{\pm e^{c}}_{c' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}\sqrt{|2t+1|} \Rightarrow e^{y} = 1 - c'\sqrt{|2t+1|}$$

forma implicita

$$\varphi(t) = \log\left(1 - c\sqrt{|2t+1|}\right) \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \text{int. generale}$$

su $I \subseteq \{t \in \mathbb{R} \mid 1 - c\sqrt{|2t+1|} > 0\}$

$$\left(\begin{array}{l} 1 - c\sqrt{|2t+1|} > 0 \quad \forall t, \quad \text{per } c \le 0 \\ 1 - c\sqrt{|2t+1|} > 0 \iff \left|t - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{2c^2}, \quad \text{per } c > 0 \end{array}\right)$$

$\varphi(t) = \log\left(1 - c\sqrt{|2t+1|}\right)$ è sol. di 4) $\iff \varphi(0) = 1$

$$\iff \log(1-c) = 1 \iff c = 1 - e < 0.$$

Quindi $\varphi(t) = \log\left(1 - (1-e)\sqrt{|2t+1|}\right)$ è sol. di 4)

su $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

5) $\begin{cases} y'\operatorname{sen}(2t) - 2(y+\cos t) = 0 & \text{su } I =]0, \frac{\pi}{2}[\\ y \text{ è limitata per } t \to \frac{\pi}{2}^- \end{cases}$

EQ. DIFFERENZIALI DI ORDINE 2

$F(t, y, y', y'') = 0$ con $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \supseteq D \to \mathbb{R}$

In forma normale: $y'' = f(t, y, y')$ con $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$

EQ. NON DIPENDENTI DA Y

$\circledast$: $y'' = f(t, y')$ $\quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ continua

Sia $z := y' \Rightarrow$ l'eq. diventa $z' = f(t, z)$: eq. di ordine 1

Se $z(t, \underset{\text{parametro}}{c})$: int. generale di $z' = f(t,z)$, allora

$\varphi(t) = \int z(t,c)\,dt$: integrale generale di $\circledast$

(E1) $y'' = g$ eq. del moto rettilineo uniformemente accelerato

g ← accelerazione $\in \mathbb{R}$

$z = y' \Rightarrow z' = g \Rightarrow z(t,c) = gt + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = \int z(t,c)\,dt = \int (gt + c)\,dt = \frac{1}{2} g t^2 + ct + D$

int. generale di $y'' = g$ $\quad c, D \in \mathbb{R}$

Pb. di Cauchy: $\begin{cases} y'' = g \\ y(0) = y_0 & \text{(posizione iniziale)} \\ y'(0) = v_0 & \text{(velocità iniziale)} \end{cases}$

$\varphi(t) = \frac{1}{2} g t^2 + ct + D \Rightarrow$ deve valere $\varphi(0) = y_0$, cioè

$D = \mathbb{Y}_0$; $\varphi'(t) = g t + c \implies$ deve valere $\varphi'(0) = v_0$, cioè

$c = v_0 \implies \varphi(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$: unica soluzione del Pb. di Cauchy