Esercizio

$y' \,\mathrm{sen}(2t) - 2(y + \cos t) = 0$

trovare le sol. su $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$ limitate per $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

Forma normale: $y' \underbrace{- \frac{2}{\mathrm{sen}(2t)}}_{a(t)} y = \underbrace{\frac{2\cos t}{\mathrm{sen}(2t)}}_{b(t)}$ $(\mathrm{sen}(2t) \neq 0 \text{ su } I)$

(eq. lineare)

$$\int \frac{-2}{\mathrm{sen}(2t)}\,dt = -\int \frac{1}{\mathrm{sen}\,t \cos t}\,dt \underset{s=\mathrm{sen}\,t}{=} -\int \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} =$$

$s = \mathrm{sen}\,t \Downarrow ds = \cos t\,dt = \sqrt{1-s^2}\,dt$

$$= -\int \frac{ds}{s(1-s^2)} = -\int \frac{1-s^2+s^2}{s(1-s^2)}\,ds$$

$$= -\int \frac{ds}{s} - \int \frac{s\,ds}{(1-s^2)} = \left(-\log|s| + \frac{1}{2}\log|1-s^2|\right)\Big|_{s=\mathrm{sen}\,t} + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow A(t) = \log\left(\frac{\sqrt{|1-s^2|}}{|s|}\right)\Big|_{s=\mathrm{sen}\,t} = \log\left(\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}\right) \quad \left(\mathrm{sen}\,t, \cos t > 0 \text{ su } I\right)$$

$$C(t) = \int \underbrace{e^{\log\left(\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}\right)}}_{\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}} \frac{2\cos t}{\mathrm{sen}(2t)}\,dt = \int \frac{2\cos^2 t}{\mathrm{sen}\,t\, 2\,\mathrm{sen}\,t \cos t}\,dt$$

$$= \int \frac{\cos t}{\mathrm{sen}^2 t}\,dt = -\frac{1}{\mathrm{sen}\,t} + c$$

$$\varphi(t) = e^{-\log\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}}\left(-\frac{1}{\mathrm{sen}\,t} + c\right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t}\left(-\frac{1}{\mathrm{sen}\,t} + c\right) = \frac{c\,\mathrm{sen}\,t - 1}{\cos t} = c\frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t} - \frac{1}{\mathrm{sen}\,t}$$ : int. generale su $I$

$\varphi(t)$ è limitata $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{c\,\mathrm{sen}\,t - 1}{\cos t}}$ è finito

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } c > 1 \\ -\infty & \text{se } c < 1 \\ \frac{0}{0} & \text{se } c = 1 \end{cases}$$

Per $c = 1$ ho: $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\mathrm{sen}\,t - 1}{\cos t} \overset{H}{=} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} -\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t} = 0$

Quindi $\frac{\operatorname{sen} t - 1}{\cos t}$ è l'unica sol. su $I$ limitata per $t \to \frac{\pi}{2}^-$

## EQ. DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 2

$$\circledast \quad \underbrace{y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y}_{L(y)} = \rho(t) \qquad a(t), b(t), \rho(t) \in \mathcal{C}^0(I)$$

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

<u>th di Cauchy</u>: Il Pb. di Cauchy
$$\begin{cases} y'' = \overbrace{-a(t)y' - b(t)y + \rho(t)}^{f(t,y,y')} \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$
ha un'unica soluzione su $I$.

DIM: $f(t, y_1, y_2) = -a(t)\,y_2 - b(t)\,y_1 + \rho(t)$ è cont. su $I \times \mathbb{R}^2$

e $\begin{cases} \partial_{y_1} f = -b(t) \\ \partial_{y_2} f = -a(t) \end{cases}$ sono cont. su $I \times \mathbb{R}^2$.

Il th. di Cauchy ci assicura esistenza ed unicità locale. In realtà, l'unica soluzione è definita su $I$. #

<u>Def</u>: L'eq. $\circledast_0$: $\underbrace{y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y}_{L(y)} = 0$ si dice <u>eq. omogenea associata a $\circledast$</u>.

<u>Prop</u>: Se $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono soluzioni di $\circledast_0$ (su $I$)

$\Rightarrow \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\quad c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ è sol. di $\circledast_0$.

(cioè $S := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^2(I) \;\middle|\; L(\varphi) = 0 \right\}$ è uno spazio vettoriale)

DIM: $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)'' + a(t)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' +$

$+ b(t)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'' + a(t)c_1\varphi_1' + a(t)c_2\varphi_2'$

$+ b(t)c_1\varphi_1 + b(t)c_2\varphi_2 = c_1 \overbrace{L(\varphi_1)}^{=0} + c_2 \overbrace{L(\varphi_2)}^{=0} = 0$ #

<u>Th</u>: Se $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono sol. di $\circledast_0$ (su $I$) e sono non proporzionali (= linearmente indipendenti), cioè non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi_1 = \alpha \varphi_2$ opp. $\varphi_2 = \alpha \varphi_1$

$\Rightarrow$ $\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$ è l'integrale generale di $\circledast_0$ (su $I$)

(cioè $S$ è spazio vettoriale di dimensione 2).
sol. di $\circledast_0$

<u>Nota</u>: $\varphi_1$ e $\varphi_2$ sono non proporzionali $\Leftrightarrow$ $\exists\, t_0 \in I$ t.c.

$\varphi_1(t_0)\, \varphi_2'(t_0) \neq \varphi_2(t_0)\, \varphi_1'(t_0)$ $\left(\text{se } \varphi_2'(t_0) \neq 0 : \varphi_1(t_0) \neq \frac{\varphi_1'(t_0)}{\varphi_2'(t_0)} \cdot \varphi_2(t_0)\right)$

<u>Prop</u>: Se $\begin{cases} \varphi_0 \text{ è sol. di } \circledast_0 & (\text{cioè } L(\varphi_0) = 0) \\ \varphi \text{ è sol. di } \circledast & (\text{cioè } L(\varphi) = \rho) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\varphi_0 + \varphi$ è sol. di $\circledast$.

DIM: $L(\varphi_0 + \varphi) = \underbrace{L(\varphi_0)}_{=0} + \underbrace{L(\varphi)}_{\rho} = \rho$. #

<u>Cor</u>: L'integrale generale di $\circledast$ è

$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \varphi_p(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

dove $\begin{cases} \varphi_1, \varphi_2 : \text{sol. di } \circledast_0 \text{ non proporzionali} \\ \varphi_p : \text{sol. particolare di } \circledast \end{cases}$

Quindi: $\varphi(t)$ = int. generale di $\circledast_0$ + sol. particolare di $\circledast$

DIM: per la <u>Prop</u>, $\varphi$ è sol. di $\circledast$. Viceversa, se $\psi(t)$ è sol. di $\circledast$, allora $\psi(t) - \varphi_p(t)$ è sol. di $\circledast_0$ (infatti: $L(\psi - \varphi_p) = \underbrace{L(\psi)}_{=\rho} - \underbrace{L(\varphi_p)}_{\rho} = 0$).

Per il <u>th.</u>, $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\psi - \varphi_p = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

$\Rightarrow$ $\psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \varphi_p$. #

# EQ. LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\circledast \quad \underbrace{y'' + a y' + b y}_{L(y)} = \rho(t) \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \rho \in C^0(I)$$

Ricordo: $y' + ay = 0$ ha come int. gen. $\varphi(t) = c\, e^{-at}$ $(c \in \mathbb{R})$

Idea: cerco sol. di $\circledast_0$ del tipo esponenziale: $e^{\lambda t}$ per $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$L(e^{\lambda t}) = (e^{\lambda t})'' + a(e^{\lambda t})' + b\, e^{\lambda t} = (\lambda^2 + a\lambda + b)\, e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{P(\lambda)} = 0 \qquad \text{eq. caratteristica di } \circledast_0$$

$P(\lambda)$ : polinomio caratteristico di $\circledast_0$

$\left( \dfrac{d^{(n)}}{dt} \text{ ~~~~ } \lambda^n \quad \forall\, n \geq 0 \text{ con } \dfrac{d^0}{dt} := \text{identità} \right)$

**CASO $\Delta > 0$** $\quad \left( \Delta := a^2 - 4b \ : \text{ discriminante di } P(\lambda) = 0 \right)$

L'eq. caratteristica ha 2 sol. distinte $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono sol. di $\circledast_0$ non proporzionali

$\left( \text{infatti } e^{\lambda_1 t} = \alpha\, e^{\lambda_2 t} \Leftrightarrow e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = \alpha \text{ costante} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \right)$

$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ : int. gen. di $\circledast_0$ $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

**CASO $\Delta = 0$**

L'eq. caratteristica ha 2 sol. coincidenti $\bar{\lambda} = -\frac{a}{2}$

$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{\bar{\lambda} t}$ è sol. di $\circledast_0$.

Per trovare una sol. $\varphi_2$ di $\circledast_0$ che sia non proporzionale con $\varphi_1$, uso il metodo di variazione delle costanti, cioè cerco sol. del tipo $c(t)\, e^{\bar\lambda t}$. Si ha:

$$L\left(c(t)\, e^{\bar\lambda t}\right) = \ldots = \Big(c''(t) + 2\bar\lambda c'(t) + \bar\lambda^2 c(t) + a\, c'(t) + $$

$$+ a\bar\lambda c(t) + b\, c(t)\Big)\, e^{\bar\lambda t} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$c(t)\,\underbrace{\left(\bar\lambda^2 + a\bar\lambda + b\right)}_{P(\bar\lambda)=0} + c''(t) + c(t)'\underbrace{(2\bar\lambda + a)}_{=0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c(t)'' = 0$$

Scelgo $c(t) = t \Rightarrow \varphi_2(t) = t\, e^{\bar\lambda t}$ è sol. di $\circledast_0$ ed è non proporzionale con $\varphi_1 = e^{\bar\lambda t}$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{\bar\lambda t} + c_2\, t\, e^{\bar\lambda t} = (c_1 + c_2 t)\, e^{\bar\lambda t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

int. gen. di $\circledast_0$

(Es) 1) $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4}_{P(\lambda) = (\lambda-2)^2} = 0 \quad \text{eq. caratt. di 1)} \quad (\Delta = 0)$$

Sol. : $\bar\lambda = 2 \Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, t e^{2t} = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t}$ int. generale $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y'' - 4y = 0$

$$\underbrace{\lambda^2 - 4}_{P(\lambda)} = 0 \quad \text{eq. caratt. di 2)} \quad (\Delta > 0)$$

Sol. $\lambda_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow \varphi(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ int. generale $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.