Ci rimane il caso $\Delta < 0$.

NUMERI COMPLESSI

In generale, se l'eq. $ax^2+bx+c=0$ $a,b,c \in \mathbb{R}$ ha discriminante $\Delta = b^2-4ac<0$ non esistono soluzioni perché $\sqrt{\Delta}$ non esiste.

Per risolvere questo problema si introducono i numeri complessi. Poiché se $\Delta<0$, si ha $\Delta = -\underbrace{|\Delta|}_{>0}$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = \sqrt{|\Delta|}\cdot\sqrt{-1}$, l'idea è di definire un nuovo "numero" i t.c. $i^2=-1$.

$i :=$ <u>unità immaginaria</u> (non è un numero $\in \mathbb{R}$!)

<u>Def</u>: Un <u>numero complesso</u> è $\lambda := a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a =: \mathrm{Re}(\lambda) & : \text{ parte reale di } \lambda \\ b =: \mathrm{Im}(\lambda) & : \text{ parte immaginaria di } \lambda \end{cases}$$

Es) $\mathrm{Re}(i)=0$, $\mathrm{Im}(i)=1$.

Operazioni

$\lambda = a+ib$; $\mu = c+id$ $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$\lambda+\mu := (a+ib)+(c+id) = \underbrace{(a+c)}_{\mathrm{Re}(\lambda+\mu)} + i\underbrace{(b+d)}_{\mathrm{Im}(\lambda+\mu)}$$

$$\lambda\cdot\mu := (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+\underbrace{i^2}_{-1}bd$$

$$= (ac-bd)+i(ad+bc)$$

In particolare: se $\mu = c$ (cioè $d=0$) $\lambda\mu = (a+ib)c = ca+icb$

se $c=-1 \Rightarrow -\lambda = -a-ib$: <u>opposto</u> di λ

Se $\lambda \neq 0$ (cioè se $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$)

$$\lambda^{-1} := \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

<u>reciproco</u> di λ

(Es)
$$(-4+2i)(5-8i) = -20+32i+10i-16i^2 = -4+42i$$
$$(3+i)^{-1} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

<u>Nota</u>: si ha
$$\begin{cases} \lambda - \lambda = 0 & \forall \lambda \text{ complesso} \\ \lambda \cdot \lambda^{-1} = 1 & \forall \lambda \neq 0 \text{ (verificarlo)} \end{cases}$$

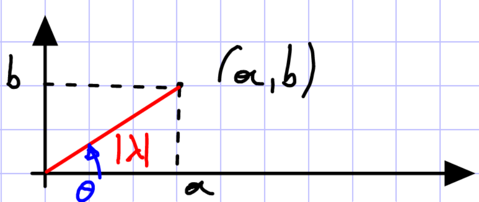
<u>Def</u>: $\lambda = a+ib$
$$\begin{cases} \bar{\lambda} := a-ib & : \underline{\text{coniugato}} \text{ di } \lambda \\ |\lambda| := \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}} & : \underline{\text{modulo}} \text{ di } \lambda \ (\in [0,+\infty[) \end{cases}$$

(Se $\operatorname{Im}(\lambda) = 0$, cioè $\lambda = a \Rightarrow \lambda$ è reale)
Se $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, cioè $\lambda = ib \Rightarrow \lambda$ è <u>puramente immaginario</u>

L'insieme dei numeri complessi $\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ si denota $\mathbb{C}$.

<u>Nota</u>: 1) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ e tutte le operazioni su $\mathbb{C}$ sono compatibili con quelle di $\mathbb{R}$. Inoltre, se $\lambda = a$ è reale $\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{a^2+0} = \sqrt{a^2} = |a|$: valore assoluto.

2) I numeri complessi si possono rappresentare nel piano cartesiano: a $\lambda = a+ib$ associo (a,b)



$\theta :=$ <u>Argomento</u> di $\lambda \in \,]-\pi, \pi]$

th (fondamentale dell'algebra): ogni eq. algebrica $P(x)=0$ ($P(x)$ è un polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$) ha soluzione in $\mathbb{C}$.

Caso $P(x) = ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $\Delta<0$.

$ax^2+bx+c=0$ ha due soluzioni complesse coniugate

$$x_{1,2} = \frac{b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{b}{2a} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}}_{\neq 0} \in \mathbb{C} \qquad (\bar{x}_1 = x_2)$$

Es $x^2+1=0$ non ha sol. reali, ma ha come sol. $\pm i$.

Def: dato $\lambda = a+ib$, $e^\lambda := e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b) \in \mathbb{C}$

$\left(\mathrm{Re}(e^\lambda) = e^a\cos b\ ;\ \mathrm{Im}(e^\lambda) = e^a\,\mathrm{sen}\, b\right)$

Se $\lambda = a$ (reale) $\Rightarrow e^\lambda = e^a$ (esponenziale usuale)

Se $\lambda = ib$ $\Rightarrow e^{ib} = \cos b + i\,\mathrm{sen}\, b$

$$\Rightarrow e^\lambda = e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

Nota: $|e^{ib}| = 1 \quad \forall\, b\in\mathbb{R}$

$$\overline{e^\lambda} = \overline{e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b)} = e^a(\underbrace{\cos b}_{\cos(-b)} \underbrace{- i\,\mathrm{sen}\, b}_{+i\,\mathrm{sen}(-b)}) = e^a e^{-ib}$$

$$= e^{a-ib} = e^{\bar\lambda} \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{C}$$

Def: $f: \mathbb{R}\supseteq I \to \mathbb{C}$, $t\mapsto f(t)$ si dice continua (risp. derivabile) su I

se lo sono $\mathrm{Re} f: I\to\mathbb{R}$, $t\mapsto \mathrm{Re} f(t)$ e $\mathrm{Im} f: I\to\mathbb{R}$, $t\mapsto \mathrm{Im} f(t)$.

Se f è derivabile, si pone $f'(t) := (\mathrm{Re} f)'(t) + i(\mathrm{Im} f)'(t)$

Def: per $\lambda = a+ib\in\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $t\mapsto e^{\lambda t}$ esponenziale complessa

Prop: $e^{\lambda t}$ è derivabile ∞-volte e $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$

DIM: $\begin{cases} Re(e^{\lambda t}) = e^{at}\cos(bt) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ Im(e^{\lambda t}) = e^{at}\operatorname{sen}(bt) \in C^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$

e $(e^{\lambda t})' = Re(e^{\lambda t})' + i\, Im(e^{\lambda t})' =$

$= [e^{at}\cos(bt)]' + i\,[e^{at}\operatorname{sen}(bt)]' =$

$= \dots = a\, \underbrace{e^{at}(\cos(bt) + i\operatorname{sen}(bt))}_{e^{\lambda t}} +$

$+ ib\, \underbrace{e^{at}(\cos(bt) + i\operatorname{sen}(bt))}_{e^{\lambda t}} = \underbrace{(a+ib)}_{\lambda}\, e^{\lambda t}$ #

(Es) $(e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Ritorniamo all'eq. diff. $\circledast_0$: $\overbrace{y'' + ay' + by}^{L(y)} = 0$

<u>CASO</u> $\Delta < 0$

L'eq. caratteristica $\overbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}^{P(\lambda)} = 0$ ha due sol. complesse coniugate $\lambda_{1,2} = c \pm id$ con $\begin{cases} c = -\frac{a}{2} \\ d = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$

Quindi:

$L(e^{\lambda t}) = (e^{\lambda t})'' + a(e^{\lambda t})' + b e^{\lambda t} = e^{\lambda t} P(\lambda) = 0 \iff \lambda = \lambda_{1,2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t} = e^{ct}(\cos(dt) + i\operatorname{sen}(dt)) \\ e^{\lambda_2 t} = e^{ct}(\cos(dt) - i\operatorname{sen}(dt)) \end{cases}$ sono sol. di $\circledast_0$

$\Rightarrow \begin{cases} Re(e^{\lambda_i t}) = e^{ct}\cos(dt) \\ Im(e^{\lambda_i t}) = \pm e^{ct}\operatorname{sen}(dt) \end{cases}$ $i = 1,2$ sono sol. di $\circledast_0$

Quindi due soluzioni non proporzionali di $\circledast_0$ sono $e^{ct}\cos(dt)$ e $e^{ct}\operatorname{sen}(dt)$. In definitiva:

$\varphi(t) = c_1 e^{ct}\cos(dt) + c_2 e^{ct}\operatorname{sen}(dt)$ $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

int. generale di $\circledast_0$

Ricerca di soluzioni particolari

$\circledast : \quad y'' + ay' + by = \rho(t) \qquad \rho \in C^0(I)$

$\circledast_0 : \quad \underbrace{y'' + ay' + by}_{L(y)} = 0$

Siano φ_1, φ_2 sol. non proporzionali di $\circledast_0$

Metodo della variazione della costante

Idea: cerco una soluzione particolare di $\circledast$ del tipo

$$\varphi_p(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in C^2(I)$$

Calcolo φ_p' e φ_p'' e impongo $L(\varphi_p) = \rho(t)$ (cioè φ_p sol. di $\circledast$). Inoltre, impongo una condizione ausiliaria: $c_1'(t)\,\varphi_1(t) + c_2'(t)\,\varphi_2(t) = 0$. Quindi ho:

$$\begin{cases} c_1'(t)\,\varphi_1(t) + c_2'(t)\,\varphi_2(t) = 0 \\ L\left(c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t)\right) = \rho(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \begin{cases} c_1'(t)\,\varphi_1(t) + c_2'(t)\,\varphi_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\,\varphi_1'(t) + c_2'(t)\,\varphi_2'(t) = \rho(t) \end{cases}$$

Se $c_1(t)$ e $c_2(t)$ risolvono il sistema (S), allora $\varphi_p(t) = c_1(t)\,\varphi_1(t) + c_2(t)\,\varphi_2(t)$ è sol. particolare di $\circledast$.

Es $\quad y'' + y = \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} t}}_{\rho(t)}$ su I non contenente $k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

L'eq. omogenea è $y'' + y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$: eq. caratt. $\Rightarrow$ sol. $\lambda_{1,2} = \underbrace{\pm i}_{0 \pm i}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Re\,(e^{it}) = Re\,(\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t) = \cos t \\ Im\,(e^{it}) = Im\,(\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t) = \mathrm{sen}\, t \end{cases}$$

sol. dell'eq. omogenea $y'' + y = 0$

$\Rightarrow \varphi_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t$: int. generale dell'eq. omogenea

Cerco $c_1(t)$, $c_2(t)$ t.c. $\varphi_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\,\mathrm{sen}\, t$ sia sol. particolare.

Il sistema (S) diventa:

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\,\mathrm{sen}\, t = 0 \\ -c_1'(t)\,\mathrm{sen}\, t + c_2'(t)\cos t = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, t} \end{cases}$$

(su I $\mathrm{sen}\, t \neq 0$)

Divido per $\mathrm{sen}\, t$ la prima e trovo $c_2'(t) = -c_1'(t)\dfrac{\cos t}{\mathrm{sen}\, t}$

sostituendola nella seconda trovo

$$\begin{cases} c_1'(t) = -1 \\ c_2'(t) = \dfrac{\cos t}{\mathrm{sen}\, t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int c_1'(t)\,dt = -t + \text{cost.} \\ \int c_2'(t)\,dt = \log|\mathrm{sen}\, t| + \text{cost.} \end{cases}$$

Scelgo $c_1(t) = -t$ e $c_2(t) = \log|\mathrm{sen}\, t|$

$\Rightarrow \varphi_p(t) = -t\cos t + (\log|\mathrm{sen}\, t|)\,\mathrm{sen}\, t$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}\, t - t\cos t + (\log|\mathrm{sen}\, t|)\,\mathrm{sen}\, t$$

$$= (c_1 - t)\cos t + (c_2 + \log|\mathrm{sen}\, t|)\,\mathrm{sen}\, t$$

int. generale $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Esercizio: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{t}$