**Università degli Studi di Padova**
**Anno Accademico 2015/2016**
**Laurea triennale in Ingegneria dell'Energia**
**Complementi di Analisi Matematica 1**

Sono qui raccolti i seguenti argomenti, trattati durante il corso, che non sono presenti nel testo di riferimento.



(Si prega di comunicare eventuali errori a `pietro@math.unipd.it`)

# 1 Criterio di convergenza integrale per serie

**Teorema 1.1.** *Sia $f$ una funzione localmente integrabile, positiva e decrescente nell'intervallo $[n_0, +\infty)$ con $n_0 \in \mathbb{N}$. Allora l'integrale generalizzato $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ e la serie $\sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$ hanno lo stesso carattere.*

*Dimostrazione.* Poiché $f$ è decrescente, per ogni intero $k \geq n_0$ ed $x \in [k, k+1]$, risulta $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, e quindi

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k).$$

Fissato un intero $n \geq n_0$ e sommando al variare di $k$ tra $n_0$ ed $n$ si ottiene

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

Le successioni $i_n = \int_{n_0}^{n} f(x)dx$ e $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ sono positive, quindi per il criterio del confronto hanno lo stesso carattere. La tesi segue notando che $s_n \to \sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$ e $i_n \to \int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ (quest'ultimo fatto segue di nuovo dal teorema del confronto: essendo $f$ positiva, per ogni $t \in [n, n+1]$ si ha $i_n \leq \int_{n_0}^{t} f(x)dx \leq i_{n+1}$). □

**Esempio 1.2.** La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge se e solo se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge, e questo avviene se e solo se $\alpha > 1$.

# 2 Il metodo della variazione delle costanti

Consideriamo un'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t), \tag{2.1}$$

con $b(t)$, $a(t)$ e $g(t)$ funzioni continue in un intervallo $I$. Supponiamo note due soluzioni indipendenti[1] $\varphi_1(t)$ ed $\varphi_2(t)$ dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, \tag{2.2}$$

la cui soluzione generale è quindi data da

$$\varphi_o(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Descriviamo qui il metodo della variazione delle costanti, dovuto a Lagrange, che consente di esprimere una soluzione particolare $\varphi_p(t)$ dell'equazione completa (2.1) tramite un calcolo di primitive.

Cerchiamo una tale soluzione nella forma

$$\varphi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t),$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinarsi (le "costanti che variano"). Risulta

$$\varphi_p'(t) = c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) + c_1(t)\varphi_1'(t) + c_2(t)\varphi_2'(t).$$

Imponendo la condizione ausiliare

$$c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0,$$

si ha poi

$$\varphi_p''(t) = c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_1(t)\varphi_1''(t) + c_2(t)\varphi_2''(t).$$

Sostituendo $\varphi_p(t)$, $y_p'(x)$ ed $y_p''(x)$ nella (2.1), si ottiene la condizione

$$\begin{aligned} c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) + c_1(t)\big[\varphi_1''(t) + a(t)\varphi_1'(t) + b(t)\varphi_1(t)\big] \\ +c_2(t)\big[\varphi_2''(t) + a(t)\varphi_2'(t) + b(t)\varphi_2(t)\big] = g(t). \end{aligned}$$

Questa, ricordando che $\varphi_1(t)$ ed $\varphi_2(t)$ sono soluzioni della (2.2), equivale alla

$$c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) = g(t).$$

Riassumendo

**Proposizione 2.1.** *Siano $\varphi_1(t)$ ed $\varphi_2(t)$ due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea* (2.2)*. Se $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} c_1'(t)\varphi_1(t) + c_2'(t)\varphi_2(t) = 0, \\ c_1'(t)\varphi_1'(t) + c_2'(t)\varphi_2'(t) = g(t), \end{cases}$$

*allora $\varphi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa* (2.1)*.*

[1] Due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ si dicono indipendenti se non sono proporzionali, cioè se non è vero che $f_1(t) = cf_2(t)$, oppure $f_2(t) = cf_1(t)$, per qualche $c \in \mathbb{R}$. Ad esempio, è facile verificare che $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ sono indipendenti se e solo se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

**Esempio 2.2.** Determiniamo la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 1/\sin t$$

in un intervallo $I$ non contenente $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata $y'' + y = 0$ sono

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t.$$

Otteniamo quindi una soluzione particolare su $I$

$$\varphi_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t,$$

imponendo il sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0, \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = 1/\sin t. \end{cases}$$

Poiché $\sin t \neq 0$ su $I$, dividendo la prima equazione per $\sin t$, ricavando $c_2'(t)$ e sostituendola nella seconda equazione, si ricava

$$c_1'(t) = -1, \quad c_2'(t) = \cot t,$$

da cui le primitive più semplici

$$c_1(t) = -t, \quad c_2(t) = \log|\sin t|.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale completa su $I$ è quindi

$$\varphi(t) = \varphi_o(t) + \varphi_p(t) = (-t + c_1)\cos t + (\log|\sin t| + c_2)\sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$