ESERCIZI SU FUNZIONI A 2 VARIABILI

1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\operatorname{sen}(xy)}$ Determinare: a) dominio;

b) il segno;

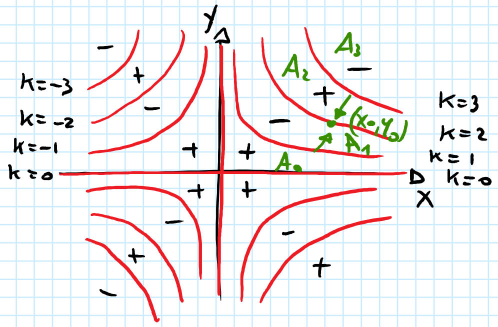
c) i limiti agli estremi del dominio

a) $\operatorname{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sen}(xy) \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k$

$\Leftrightarrow xy \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$D_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = k\pi\}$

$D_k = \begin{cases} \text{iperbole se } k \neq 0 \\ \text{assi cartesiani se } k = 0 \end{cases}$



b) $f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 0 \\ \operatorname{sen}(xy) > 0 \end{cases}$

oppure $\begin{cases} xy \leq 0 \\ \operatorname{sen}(xy) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} xy \geq 0 \Leftrightarrow x,y \in \text{I oppure III quadrante} \\ \operatorname{sen}(xy) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < xy < (2k+1)\pi \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} xy \leq 0 \Leftrightarrow x,y \in \text{II oppure IV quadrante} \\ \operatorname{sen}(xy) < 0 \Leftrightarrow (2k+1)\pi < xy < 2k\pi \end{cases}$

c) Preso $(x_0,y_0) \notin \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k \Rightarrow (x_0,y_0) \in D_k \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}$

Calcolo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{\operatorname{sen}(xy)}$.

Sia $k \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0y_0 = k\pi \neq 0 \\ \operatorname{sen}(x_0y_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ dipende dal segno di $\operatorname{sen}(xy)$.

Si ha $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in A_k}} f(x,y) = +\infty \neq -\infty = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in A_{k+1}}} f(x,y)$

$A_k = \{(x,y) \in \text{I quadrante} \mid 2k\pi < xy < (2k+1)\pi\}$

quindi $\lim f(x,y)$ non esiste. Simile per gli altri quadranti.

$(x,y) \to (x_0,y_0)$

Se $K=0$, $\begin{cases} x_0 y_0 = 0 \\ \text{sen}(x_0 y_0) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ posto $t = \underbrace{xy}_{g(x,y)}$ $\Rightarrow f(x,y) = h(g(x,y))$ con $\begin{cases} h(t) = \dfrac{t}{\text{sen}\, t} \\ g(x,y) = xy = t \end{cases}$

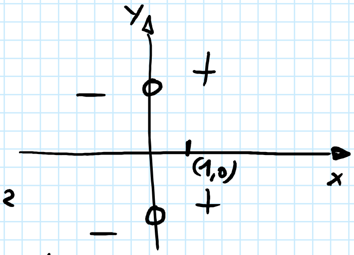
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \overset{\text{cambio di variabili}}{=} \lim_{t\to 0} h(t) = 1$$

2) $f(x,y) = \dfrac{x}{(x-1)^2+y^2}$

a) $\text{Dom} f = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \neq 0\}$ $\Leftrightarrow x \neq 1,\ y \neq 0$

$= \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ perché l'eq. $x^2+y^2=0$ ha un'unica sol. $(x,y) = (0,0)$

b) $f(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$



c) f si può estendere per continuità a tutto $\mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)}_{+\infty}$ esiste finito. $\Rightarrow$ non si può estendere per continuità.

Inoltre $f(x,y)$ non è limitata superiormente, in particolare non ha massimo assoluto.

d) Gradiente di f: $\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y))$

$$= \left(\frac{1[(x-1)^2+y^2] - 2(x-1)\cdot x}{((x-1)^2+y^2)^2}, \frac{x(-2y)}{((x-1)^2+y^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{y^2 - x^2 + 1}{((x-1)^2+y^2)^2}, \frac{x(-2y)}{((x-1)^2+y^2)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{((x-1)^2+y^2)^2} \left(y^2 - x^2 + 1, -2xy \right)$$

I punti critici di f sono i punti (x,y) t.c. $\nabla f(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 + 1 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 1 \neq 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ x, y \in \text{assi cartesiani} \end{cases}$

$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oppure $y = 0$

$\Rightarrow \{ x = \pm 1$ ma $(1,0) \notin \text{Dom} f$. Quindi l'unico punto

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ma $(1,0) \notin \mathrm{Dom}\, f$. Quindi l'unico punto critico per f è $(-1,0)$.

e) La matrice hessiana di f in $(-1,0)$ è per definizione

$$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(-1,0) & \partial_x \partial_y f(-1,0) \\ \partial_x \partial_y f(-1,0) & \partial_y \partial_y f(-1,0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x \left(\frac{y^2 - x^2 + 1}{((x-1)^2 + y^2)^2} \right) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} & \partial_x \left(\frac{-2xy}{((x-1)^2 + y^2)^2} \right) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} \\ \dots & \partial_y \left(\frac{-2xy}{((x-1)^2 + y^2))^2} \right) \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_x \left(\frac{-x^2+1}{(x-1)^4} \right) \Big|_{x=-1} & \partial_x (0) \\ & \partial_y \left(\frac{2y}{(4+y^2)^2} \right) \Big|_{y=0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

matrice definita positiva $\Rightarrow (-1,0)$ è di minimo relativo stretto.

3) Calcolare $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{xy}{e^{x^2+y^2}} := \lim_{\underbrace{\|(x,y)\|}_{\sqrt{x^2+y^2} =: \rho} \to +\infty} \frac{xy}{e^{x^2+y^2}} \stackrel{\circ}{=} \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\overbrace{\rho\cos\theta}^{x} \cdot \overbrace{\rho \sin\theta}^{y}}{e^{\rho^2}} = \dots$

in coord. polari

(Si ha $\lim_{\substack{(x,y) \to \infty \\ x=0}} \frac{xy}{e^{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \to \infty} \underbrace{\frac{xy}{e^{x^2+y^2}} \Big|_{x=0}}_{=0} = 0$, cioè il limite lungo l'asse y è $=0$ $\Rightarrow$ se il limite esiste, è $=0$.)

$\dots = \lim_{\rho \to +\infty} \left(\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \cos\theta \sin\theta \right) = 0$ perché $\left| \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \cos\theta \sin\theta \right| \le \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \to 0$

4) $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho \to +\infty \\ \theta \in [0, 2\pi]}} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta \sin\theta$ varia in $[-1, 1]$ a seconda di θ

$\Rightarrow$ il limite assume valori diversi a seconda della direzione θ.

$\Big\{ x \, (\log^2 |x| + y^2)$ se $x \neq 0$

$\Rightarrow$ il limite assume valori diversi a seconda della direzione a.

5) $f(x,y) = \begin{cases} x\left(\log^2|x| + y^2\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

studiare la continuità di f.

Se $x \neq 0$ f è cont. perché composizione di funzioni continue.

f è cont. anche in $(0,y_0) \in$ asse y $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \underbrace{f(0,y_0)}_{=0}$

$$\left|x\left(\log^2|x| + y^2\right)\right| = |x|\underbrace{\left(\log^2|x| + y^2\right)}_{\geq 0} = \underbrace{|x|\log^2|x|}_{\to 0} + \underbrace{|x|y^2}_{\to 0}$$

per $(x,y) \to (0,y_0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} x\left(\log^2|x| + y^2\right) = 0$, così f è cont. in $(0,y_0)$.

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2}{\log(1+\rho^2)} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2}{\rho^2 + o(\rho^2)} = 1$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1+x^2+y^2)\,\text{sen}\,y}{y} = \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to 0} (1+x^2+y^2)}_{1} \cdot \underbrace{\lim \dfrac{\text{sen}\,y}{y}}_{1} = 1$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|x\cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1} + y \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1}\right| \leq |\overset{\nearrow 0}{x} + \overset{\nearrow 0}{y}| \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to 0$$

9) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$

a) studiare la continuità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

f è cont. in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, perché composizione di funzioni cont.

f è cont. in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|^\alpha y}{x^2+y^2} = ?$

limitato, perché $\dfrac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

$\sqrt{y^2}$

$|\,|x|^\alpha y\,| \ldots$

$(x,y)\to(0,0) \qquad x^2+y^2$ $\qquad$ limitato, perché $\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1$

$$\left|\frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^\alpha\,|y|}{x^2+y^2} = \frac{|x|^\alpha \sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^{\alpha-1}\,|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\le |x|^{\alpha-1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{=1} \le |x|^{\alpha-1} \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to 0 \text{ se } \alpha-1>0$$

Quindi per $\alpha>1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ cont. in $(0,0)$

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{|x|^\alpha\cdot x}{2x^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{|x|^\alpha}{x}}_{\frac{1}{2}|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x} \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } \alpha=1 \\ \pm\infty & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to+\infty} f(x,y) \neq 0$ se $\alpha\le 1 \Rightarrow f$ non è continua in $(0,0)$.

b) Studiare la differenziabilità di f al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \log x}{(x-1)+y^2}$