

ESERCIZI SU EQ. DIFFERENZIALI

$$1) \quad y' = (y + \sqrt{y} - y') \cdot t = (y + \sqrt{y}) \cdot t - y' \cdot t$$

a) Trovare gli integrali singolari e l'integrale generale in $[-c, c]$ per $c > 0$ (eventualmente in forma implicita) eq. diff. di ordine 1

$$y' = \underbrace{(y + \sqrt{y})}_{h(y)} \underbrace{\frac{t}{1+t^2}}_{g(t)} \quad \text{eq. a variabili separabili.}$$

Int. singolari: soluzioni di $h(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$
 $\Rightarrow y(t) \equiv 0$ int. singolare

Separiamo le variabili e integriamo $\otimes$: $\int \frac{dy}{y + \sqrt{y}} = \int \frac{t}{1+t^2} dt$

$$\int \frac{t}{1+t^2} dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+s} \frac{ds}{1+s^2} \Big|_{s=t}$$

$$\frac{1}{(1+s)(1+s^2)} = \frac{A}{1+s} + \frac{Bs+C}{1+s^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ B &= C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(1+s)(1+s^2)} ds = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+s} ds + \frac{1}{2} \int \frac{s+1}{1+s^2} ds$$

$$= -\frac{1}{2} \log |s+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log |1+s^2| + \frac{1}{2} \arctan s + \text{cost.}$$

$$\int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1+t^2}{|1+t^2|} \right) + \underbrace{\arctan(t)}_t \right] + \text{cost.}$$

$$\int \frac{dy}{y + \sqrt{y}} \stackrel{s=\sqrt{y}}{\Leftrightarrow} \int \frac{1}{s^2+s} \frac{2s ds}{2\sqrt{s}} \Big|_{s=\sqrt{y}} = 2 \log |1+s| + \text{cost.} \Big|_{s=\sqrt{y}}$$

$$= 2 \log (1+\sqrt{y}) + \text{cost.}$$

$$= 2 \log(1 + \sqrt{y}) + \text{cost}$$

Quindi $\Leftrightarrow \log(1 + \sqrt{y})^2 = \log\left(\frac{1 + t_p^2 t}{(1 + t_p t)^2}\right)^{1/4} + \frac{t}{2} + c \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{y})^2 = \left(\frac{1 + t_p^2 t}{(1 + t_p t)^2}\right)^{1/4} \cdot e^{\frac{t}{2} + c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \underbrace{e^{\frac{t}{2}}}_{=: k > 0} \cdot \left(\frac{1 + t_p^2 t}{(1 + t_p t)^2}\right)^{1/8} e^{t/4} - 1 \quad \text{forma implicita}$$

Per esplicitare y , devo prima restringere t e scegliere k t.c. il secondo termine sia ≥ 0 .

b) Cerchiamo le soluzioni dell'eq. diff. t.c. $\varphi(0) = 1$, cioè cerco sol. al Problema di Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = \frac{1}{y + \sqrt{y}} \frac{t_p t}{1 + t} \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$

$$\varphi \text{ è sol.} \Leftrightarrow \sqrt{\varphi(t)} = k \left(\frac{1 + t_p t}{(1 + t_p t)^2}\right)^{1/8} e^{t/4 - 1} \quad \text{per } k > 0$$

$$\varphi(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = k - 1 \Leftrightarrow k = 2.$$

2) $y' = \frac{2t - y}{t - 1}$ eq. diff. di ordine 1

Cerco sol. in un intervallo non contenente 1

$$y' + \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{a(t)} y = \underbrace{\frac{2t}{t-1}}_{b(t)} \quad \text{eq. diff. lineare di ordine 1}$$

$$A(t) \left(= \int a(t) dt = \int \frac{1}{t-1} dt \right) = \log|t-1|$$

↑
primitiva di $a(t)$

$$\begin{aligned} \int b(t) e^{A(t)} dt &= \int \frac{2t}{t-1} \underbrace{e^{\log|t-1|}}_{|t-1|} dt \\ &= \int \frac{2t}{t-1} dt = \int \frac{2(t-1) + 2}{t-1} dt = \int 2 dt + \int \frac{2}{t-1} dt \\ &= 2t + 2 \log|t-1| + c \end{aligned}$$

$\underbrace{\int \frac{2}{t-1} dt}_{\log|t-1|}$

$$\begin{aligned}
 \text{L'int. generale } \bar{y}(t) &= e^{-\int A(t) dt} \int b(t) e^{A(t)} dt \\
 &= e^{-\int \frac{1}{t-1} dt} \left(\int \frac{1}{t-1} (t^2 + c) dt \right) \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{\ln(t-1)}{t-1} (t^2 + c) = \frac{t^2 + c}{t-1} \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

b) Risolviamo il Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2t-y}{t-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y(t) = \frac{t^2 + c}{t-1} \quad \text{int. generale } (c \in \mathbb{R})$$

$$y(0) = -c = 1 \Rightarrow c = -1, \text{ con } y(t) = \frac{t^2 - 1}{t-1} = t+1$$

3) $y'' - 4y = 4e^{-2t}$ eq. diff. lineare di ordine 2 a coeff. costanti

$$\text{eq. caratteristica: } \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2 \quad (\Delta > 0)$$

$$y_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{int. generale dell'eq. omogenea associata}$$

L'int. generale di $y'' - 4y = 4e^{-2t}$ è della forma:

$$y_0(t) + y_p(t)$$

↑ una soluzione particolare (dell'eq. non omogenea)

Bisogna cercare $y_p(t)$ tra le funzioni del tipo $t e^{-2t} p$ con $p \in \mathbb{R}$. Ricordo:

$$\text{Prop: } y'' + a y' + b y = e^{ct} (p(t) \cos(ot) + q(t) \sin(ot))$$

$$\text{con } a, b, c, o \in \mathbb{R}$$

$$p(t), q(t) : \text{polinomi}$$

Allora $\exists p_1(t), q_1(t) : \text{polinomi di grado } \leq \max(p, q) + 1$ t.c.

$$y_p(t) = t^2 e^{ct} (p_1(t) \cos(ot) + q_1(t) \sin(ot)) \text{ è soluzione}$$

particolare, dove $s = \text{multiplicità di } c+id \text{ come soluzione dell'eq. caratteristica } \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$$\text{con } \begin{cases} s=0 & \text{se } c+id \text{ non è soluzione;} \\ s=1 & \text{se } c+id \text{ è soluzione semplice;} \\ s=2 & \text{se } c+id \text{ è soluzione doppia.} \end{cases}$$

$\underbrace{c+id}_{\in \mathbb{C}}$ è soluzione di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ se

$$\left[\begin{array}{l} (c+id)^2 + a(c+id) + b = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - d^2 + ac + b = 0 \\ ad + 2cd = 0 \end{cases} \\ \underbrace{c^2 + (id)^2}_{-d^2} + 2cd \quad i^2 = -1 \end{array} \right]$$

E₂ : $\underbrace{4 e^{-2t}}_{e^{ct}} (p(t) \cos(dt) + q(t) \sin(dt))$ $c = -2, d = 0, p(t) = 4$ (polinomio di grado 0)

determino $s = \text{multiplicità di } -2 \text{ come sol. di } \lambda^2 - 4 = 0$.
 $\quad \quad \quad = 1$, perché -2 è sol. semplice.

Cerco $\varphi_p(t) = t e^{-2t} p$ $p = \text{costante}$ (= polinomio di grado 0)

$$\begin{cases} \varphi_p'(t) = p(e^{-2t} - 2te^{-2t}) \\ \varphi_p''(t) = 4p(t e^{-2t} - e^{-2t}) \end{cases} \Rightarrow \text{lo sostituisco nell'eq. :}$$

$$\varphi_p''(t) - 4\varphi_p(t) = 4e^{-2t} \Leftrightarrow 4p(t e^{-2t} - e^{-2t}) - 4p(e^{-2t} - 2te^{-2t}) = 4e^{-2t} \\ \Leftrightarrow p = -1$$

Quindi $\varphi_p(t) = -t e^{-2t}$ è l'ult. particolare è

$$\begin{aligned} y(t) = y_0(t) + \varphi_p(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - t e^{-2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ &= c_1 e^{2t} + (c_2 - t) e^{-2t} \end{aligned}$$

4) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$

Eq. caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 2 \quad (\Delta = 0)$

$\varphi_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} = (c_1 + t c_2) e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} c = 2 \\ d = 0 \\ p(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow s = 2 : \text{moltiplicità di } c = 2 \text{ come sol. dell'eq. caratter.}$

Cerco $\varphi_p(t) = t^2 e^{2t} p$. Facendo i conti, mi deve risultare

$2p e^{2t} (2t^2 + 4t + 1) - 4t(1+t) + 2t^2 = e^{2t} \iff p = \frac{1}{2}$

Quindi $\varphi_p(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$ è sol. particolare e l'int. generale è:

$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_p(t) = (c_1 + t c_2 + \frac{1}{2} t^2) e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5) $y'' + y = 3 \cos t$

Eq. caratter. $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i \quad (\Delta < 0)$

$\varphi_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ p(t) = 3 \end{cases} \Rightarrow s = 1 \text{ (moltiplicità di } 0 + 1 \cdot i \text{ come sol. dell'eq. caratter.)}$

Cerco $\varphi_p(t) = t(p_1 \cos t + q_1 \sin t)$ con $p_1, q_1 \in \mathbb{R}$

Facendo i conti, trovo: $-2p_1 \sin t + 2q_1 \cos t = 3 \cos t \iff$

$\begin{cases} -2p_1 = 0 \\ 2q_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ con } \varphi_p(t) = \frac{3}{2} t \sin t$

e l'int. generale è: $c_1 \cos t + (c_2 + \frac{3}{2} t) \sin t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' + 2y' + y = (t^3 + t) e^{-t}$

Eq. caratter. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \quad (\Delta = 0)$

$$\text{eq. cond.} \quad \lambda + c\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \quad (\Delta = 0)$$

$$\varphi(t) = (c_1 + t c_2) e^{-t}$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

$$p(t) = t^3 + t$$

$$\text{Cerca } \varphi_p(t) = t^2 e^{-t} p_1(t) \quad \text{con } p_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$$