# SERIE NUMERICHE

**Def**: data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la succ. delle RIDOTTE $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita da $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $\sum_{n\geq 0} a_n := \lim_{n\to+\infty} s_n$ si dice la SERIE DI TERMINE GENERALE $a_n$. Se tale limite esiste finito ed è uguale a $s \in \mathbb{R}$, si chiama SOMMA DELLA SERIE e si dice che $\sum_{n\geq 0} a_n$ CONVERGE A $s$; se il limite esiste infinito ($\pm\infty$) si dice che $\sum_{n\geq 0} a_n$ DIVERGE; se il limite non esiste, si dice $\sum_{n\geq 0} a_n$ è INDEDERMINATA.

**Es**: 1) $\underbrace{\sum_{n\geq 0} q^n}_{= 1+q+q^2+q^3+\dots}$ SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE $q\in\mathbb{R}$

Se $q\neq 1$, si ha $\sum_{n\geq 0} q^n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^n}_{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q>1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$$

Se $q=1$, si ha $\sum_{n\geq 0} 1 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$

Ad esempio, se $q=\frac{1}{2}$ si ha $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

**Nota**: Il COMPORTAMENTO (convergente, divergente o indeterminata) non cambia se si modifica un numero finito di termini.

(la somma della serie, se finita, in generale cambia

$$\sum_{n\geq 0} \tilde{a}_n := \underbrace{b_0 + \dots + b_{n_0-1}}_{\text{termini eventualmente modificati}} + \sum_{n\geq n_0} a_n \quad )$$

**Es**: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = -1 + \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}}_{=2} = 1$

**Prop**: $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

DIM: $a_n = s_n - s_{n-1}$ $\left(s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\right) \Rightarrow \lim_n a_n = \lim_n s_n +$

$- \lim_n s_{n-1} = s - s = 0$. #

**Nota**: In generale non è vero il contrario.

**Es**: $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Si ha $\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, ma la serie è divergente, infatti: $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) =$

$= \log(n+1) - \log(n) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\log(n+1) - \log n\right]$

$= \left[\cancel{\log 2} - \underbrace{\log 1}_{=0}\right] + \left[\log 3 - \cancel{\log 2}\right] + \dots + \left[\log(n+1) - \cancel{\log n}\right]$

$= \log(n+1) \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\log(n+1)} = +\infty$.

**Nota**: $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è un esempio di serie TELESCOPICA:

$\sum_{n\geq 0} a_n$ con $a_n = \pm\left(b_{n+1} - b_n\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_n = \pm\left(b_{n+1} - b_0\right)$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n = \pm\left(\lim_n b_{n+1} - b_0\right)$.

**Es**: Serie di MENGOLI: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

Si ha: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = -\left(\underbrace{\lim_n \frac{1}{n+1}}_{=0} - 1\right) = 1$

## CRITERI PER SERIE A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI

**Def**: $\sum_{n\geq 0} a_n$ è DEFINITIVAMENTE A TERMINI NON NEGATIVI se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

**Prop**: $\sum_{n\geq 0} a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ converge (a $s \geq 0$ se $n_0 = 0$) oppure diverge a $+\infty$.

DIM: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è una succ. monotona non decrescente $\forall n \geq n_0$ (cioè $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \ \forall n \geq n_0 - 1$) $\Rightarrow \lim_n s_n$ è finito oppure $+\infty$. #

**Prop** (CRITERIO DEL CONFRONTO): date $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ con $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$, si ha:

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 0} b_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ convergente} & \left(\text{e } \sum_{n\geq 0} a_n \leq \sum_{n\geq 0} b_n \text{ se } n_0 = 0\right) \\ \sum_{n\geq 0} a_n \text{ divergente} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} b_n \text{ divergente} \end{cases}$$

DIM: Sia $n_0 = 0$. $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$.
Passando al limite e usando i teoremi di confronto per limiti di successioni si conclude. #

**Es**: 1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente. Infatti: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$

$(n^2 = n \cdot n > n(n-1) \quad \forall n \geq 1)$ e $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\underbrace{(n-1)}_{m}} = \underbrace{\sum_{m\geq 1} \frac{1}{(m+1)m}}_{\text{serie di Mengoli}} = 1$

Per il criterio del confronto $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Inoltre:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}}_{0 < \ \leq 1} \leq 2 \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} > 1.$$

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (serie ARMONICA) divergente

Infatti si ha $\log(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$, per cui

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$. Poiché $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ divergente

lo è anche $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

<u>Teorema</u> (CRITERIO DELLA RADICE): data $\sum_{n\geq 0} a_n$, se $\exists\ 0 \leq h < 1$ t.c.

$$\begin{cases} a_n \geq 0 & \forall n \geq n_0 \\ \sqrt[n]{a_n} \leq h & \text{"} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge.}$$

Se $$\begin{cases} a_n \geq 0 & \forall n \geq n_0 \\ \sqrt[n]{a_n} \geq 1 & \text{"} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ diverge.}$$

DIM: Sia $n_0 = 0$. Allora $\sqrt[n]{a_n} \leq h \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow a_n \leq h^n$ con $0 \leq h < 1$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n\geq 0} h^n$ converge, per il criterio del confronto converge anche $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow a_n \geq 1 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow \lim_n a_n \neq 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ non può convergere. #

<u>Cor</u>: data $\sum_n a_n$ con $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge} \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

<u>Es</u>: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ convergente, perché $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0 < 1$.

<u>Teorema</u> (CRITERIO DEL RAPPORTO): data $\sum_{n\geq 0} a_n$, se $\exists\ 0 < h < 1$ t.c.

$$\begin{cases} a_n > 0 & \forall n \geq n_0 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h & \text{"} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge}$$

Se $$\begin{cases} a_n > 0 & \forall n \geq n_0 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 & \text{"} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ diverge.}$$

DIM: Sia $n_0 = 0$. Per ipotesi $a_{n+1} \leq h\, a_n \quad \forall n \geq 0$, quindi

$a_1 \le h a_0$, $a_2 \le h a_1 \le h(h a_0) = h^2 \cdot a_0$, ..., $a_n \le h^n \cdot a_0 \quad \forall n \ge 0$.

Poiché $\sum_{n \ge 0} (a_0 h^n) = a_0 \sum_{n \ge 0} h^n$ è convergente, per il criterio del confronto lo è anche $\sum_{n \ge 0} a_n$.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad \forall n \ge 0 \Rightarrow a_{n+1} \ge a_n > 0 \quad \forall n \ge 0$ quindi

$\lim_{n \to +\infty} a_n \ne 0$ e $\sum_{n \ge 0} a_n$ non può convergere. #

<u>Cor.</u>: data $\sum_n a_n$ con $a_n \ge 0 \quad \forall n \ge n_0$

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n \ge 0} a_n \text{ converge} \\ \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n \ge 0} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

<u>Es</u>: $\sum_{n \ge 0} \frac{a^n}{n!}$ convergente $\forall a \ge 0$.

Infatti $\lim_n \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{a^n}{n!} = \lim_n \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, quindi la serie è convergente per il criterio del rapporto.

Osserviamo che $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$

<u>Nota</u>: 1) Se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ esiste (finito o infinito) $\Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

2) Se $\lim_n \sqrt[n]{a_n} < 1$ oppure $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$

($a_n$ è il termine generale di una serie convergente)

3) nei criteri della radice e del rapporto, se il valore del limite di $\sqrt[n]{a_n}$ oppure $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è 1, non si può dedurre nulla.

<u>Es</u>: $\sum_{n \ge 1} a_n$ con $a_n = \frac{1}{n}$ oppure $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Si ha $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, ma $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n}$ diverge e $\sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

4) Se $\sum_{n \ge 0} a_n$ è una serie a termini definitivamente non positivi ($a_n \le 0 \quad \forall n \ge n_0$) si possono usare gli stessi criteri.

Precisamente: sia $n_0 = 0 \Rightarrow a_n = -\underbrace{(-a_n)}_{\geq 0}$ e si ha

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0} -(-a_n) = -\underbrace{\sum_{n \geq 0} (-a_n)}_{\text{serie a termini non negativi}}$$

Quindi basta studiare $\sum_{n \geq 0} (-a_n)$ con i criteri visti sopra.