Teorema (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO): date $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ t.c.

$a_n, b_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$, si ha:

1) se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ ("a_n e b_n sono dello stesso ordine": $a_n \doteq b_n$ per $n\to+\infty$)

allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere;

2) se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ("a_n è o-piccolo di b_n": $a_n = o(b_n)$ per $n\to+\infty$)

allora
$$\begin{cases} \sum_n b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge}; \\ \sum_n a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ diverge}. \end{cases}$$

Nota: se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ ($b_n = o(a_n)$ per $n\to+\infty$)

e si può usare 2) scambiando a_n con b_n.

DIM: Sia $n_0 = 0$ e $a_n \neq 0 \neq b_n \quad \forall n\geq 0$. Allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}$ è limitata, cioè $\exists M>0$ t.c. $\frac{a_n}{b_n} \leq M \quad \forall n\geq 0$

$\Rightarrow a_n \leq M b_n \quad \forall n \geq 0$ e si applica il criterio del confronto (usando che $\sum_{n\geq 0} M b_n = M \sum_{n\geq 0} b_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n\geq 0} b_n$). Se inoltre $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$ (caso 1)), considero $\lim_n \frac{b_n}{a_n} \in \mathbb{R}$ e rifaccio lo stesso ragionamento: $\exists N>0$ t.c. $b_n \leq N a_n \quad \forall n \geq 0$. #

Es: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\binom{n}{2}$ è divergente

Infatti $\binom{n}{2} := \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{1}{n^3}\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\frac{(n-1)}{n^2} \doteq \frac{1}{n}$,

perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}$, e $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

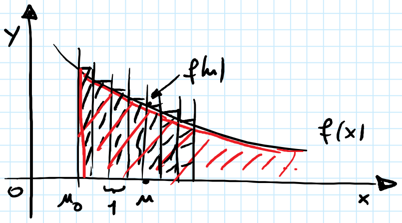
Nota: $\forall n \geq 1$, si ha $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall \alpha \geq 2 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergente,

perché lo è $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$.

$\forall n \geq 1$, si ha $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \quad \forall 0<\alpha\leq 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergente, perché lo è $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Rimane il caso $1 < \alpha < 2$.

<u>teorema</u> (CRITERIO INTEGRALE): Sia $f: [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq 0$ $\forall\, x \geq n_0$ e decrescente. Allora $\underbrace{\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx}_{:= \lim_{c \to +\infty} \int_{n_0}^{c} f(x)\,dx}$ e $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ hanno lo stesso carattere.



<u>Es</u>: 1) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ definita su $[1, +\infty[$ è decrescente e $\frac{1}{x^\alpha} > 0$ $\forall\, x \geq 1$ con $\alpha > 0$. Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ hanno lo stesso carattere, quindi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ è convergente $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$, divergente altrimenti $(0 < \alpha \leq 1)$.

2) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\log n)^\alpha}$ è convergente $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

(esercizio, usando il criterio integrale)

<u>Esercizio</u> ⊛: trovare gli $\alpha > 0$ t.c. la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{3\alpha n - \sqrt{n^2+1}}{(n+3)^{2\alpha}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1+n}\right)$ è convergente.

Prima ricordo il <u>CONFRONTO LOCALE TRA FUNZIONI</u>

<u>Def</u>: $\begin{cases} f, g \text{ funzioni definite su } I \setminus \{c\} \text{ con } I: \text{intorno di } c \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I \setminus \{c\} \\ \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$

1) Se $\ell \neq 0$, f è DELLO STESSO ORDINE di g per $x \to c$ ($f \doteq g$ per $x \to c$).

2) Se $\ell = 1$, f è EQUIVALENTE a g per $x \to c$ ($f \sim g$ per $x \to c$)

3) Se $\ell = 0$, f è TRASCURABILE rispetto a g per $x \to c$, oppure f è

o-PICCOLO di g per $x \to c$ $\quad (f = o(g)$ per $x \to c)$

Nota: 1) Se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g = o(f)$ per $x \to c$

2) Se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0 \Rightarrow f \doteq g$ per $x \to c$ oppure $f \sim \ell g$ per $x \to c$

$\left(\text{cioè } \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\ell g(x)} = 1 \right)$.

3) $f \sim g$ per $x \to c \iff f - g = o(g)$ per $x \to c$ $\Big($ cioè $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$

Es: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$ $\left(\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = x + o(x) \\ \text{per } x \to 0 \end{array} \right)$

2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = o(x)$ per $x \to +\infty$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ $\left(\begin{array}{c} \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ \text{per } x \to 0 \end{array} \right)$

(oppure $\cos x - 1 \doteq x^2$ per $x \to 0$)

Nota: 4) $f = o(g)$ per $x \to c \iff f = o(\lambda g)$ con $\lambda \neq 0$

$\iff \lambda f = o(g)$ con $\lambda \neq 0$

5) $0 = o(f)$ per $x \to c$ $\forall f$ (non identicamente nulla)

6) $f = o(1)$ per $x \to c \iff f$ è infinitesima per $x \to c$

$\left(\text{cioè } \lim_{x\to c} f(x) = 0 \right)$

Notazione: $f = g + o(h)$ per $x \to c \overset{\text{def}}{\iff} f - g = o(h)$ per $x \to c$ $\left(\text{cioè } \lim_{x\to c} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = 0 \right)$

Es: 4) $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ $\quad (\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0)$

(equivalente: $\log x = x - 1 + o(x-1)$ per $x \to 1$)

5) $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ $\quad (e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0)$

6) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ per $x \to 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad ((1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0)$

Prop: Se $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ e $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ esistono (finiti o infiniti),

$$\begin{cases} f \sim \tilde{f} & \text{per } x \to c \\ g \sim \tilde{g} & \text{per } x \to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \end{cases}$$

Cor. : Se $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ e $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ esistono (finiti o infiniti),

$$\begin{cases} \tilde{f} = o(f) & \text{per } x\to c \\ \tilde{g} = o(g) & \text{per } x\to c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to c} \left(f(x) \pm \tilde{f}(x)\right)\left(g(x)\pm\tilde{g}(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x)g(x) \\ \lim_{x\to c} \frac{f(x)\pm\tilde{f}(x)}{g(x)\pm\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$$

Nota : Se $\tilde{f} = o(f)$ per $x\to c$, $\lim_{x\to c}\left(f(x)\pm\tilde{f}(x)\right) = \lim_{x\to c} f(x)$.

Esercizio : Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}^2(3x)}$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x\to 0$ $\Rightarrow$ $1-\cos(2x) \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$ per $x\to 0$

$\text{sen}\, x \sim x$ per $x\to 0$ $\Rightarrow$ $\text{sen}(3x)\sim 3x$ per $x\to 0$

$\Rightarrow$ $\text{sen}^2(3x) \sim (3x)^2 = 9x^2$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}^2(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$$

Nota : In generale NON è vero che: $\begin{cases} \tilde{f}\sim f & \text{per } x\to c \\ \tilde{g}\sim g & \text{per } x\to c\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim_{x\to c}\left(\tilde{f}(x)\pm\tilde{g}(x)\right)$$

Es : $f(x) = \sqrt{x^2+2x} \sim x$ per $x\to+\infty$

$g(x) = \sqrt{x^2-1}\sim x$ per $x\to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1 \neq \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(x-x)}_{0}$$

Soluzione dell'esercizio ⊛

Si ha: $\text{sen}\left(\underbrace{\frac{1}{1+n}}_{x\to 0 \text{ per } n\to+\infty}\right) \sim \frac{1}{1+n}\sim\frac{1}{n}$ per $n\to+\infty$; inoltre:

$$3\alpha n - \sqrt{n^2+1} \overset{\text{razionalizzato}}{=} \frac{(9\alpha^2-1)n^2-1}{3\alpha n + \underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}} \sim \frac{\overbrace{(9\alpha^2-1)}^{=0 \iff \alpha=\frac{1}{3}}n^2-1}{\underbrace{(3\alpha+1)}_{\neq 0}n} \sim \begin{cases}(3\alpha-1)n & \alpha\neq\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2n} & \text{se } \alpha=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\underbrace{\quad}_{n\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}} \qquad \underbrace{(\ldots)}_{\neq 0} \qquad -\frac{1}{2n} \quad \text{se } \alpha=\frac{1}{3}$$

per $n \to +\infty$

$$\underbrace{(n+3)^{2\alpha}}_{n^{2\alpha}\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)}_{\to 1}^{2\alpha}} \sim n^{2\alpha} \quad \text{per } n \to +\infty$$

Allora $$\frac{3\alpha n-\sqrt{n^2+1}}{(n+3)^{2\alpha}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{1+n}\right) \sim \begin{cases} \dfrac{(3\alpha-1)}{n^{2\alpha}} \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha}} & \text{se } \alpha \neq \dfrac{1}{3} \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^{8/3}} \sim \dfrac{1}{n^{8/3}} & \text{se } \alpha = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ne segue che il termine generale della serie è definitivamente costante e posso applicare il criterio del confronto asintotico $\Rightarrow$ la serie converge per $\alpha=\frac{1}{3}$ e se $\alpha \neq \frac{1}{3}$, quando $2\alpha>1$ cioè $\alpha>\frac{1}{2}$. In definitiva, la serie converge per

$\alpha \in \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.