Lezione 4

giovedì 15 giugno 2017 16:30

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Teorema (CRITERIO DI LEIBNIZ): Data $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$ $\forall\, n \geq n_0$, se $(a_n)_{n\geq n_0}$ è decrescente e infinitesima $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

Nota: $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$

Es: 1) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ (serie armonica a segno alterno) è convergente per il criterio di Leibniz: infatti $a_n = \frac{1}{n} > 0$ è decrescente e infinitesimo.

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$ serie a segno alterno

con $a_n := \underbrace{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{media aritmetica di } \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\}} > 0$.

Per usare il criterio di Leibniz, devo verificare che

a) a_n è decrescente: $a_{n+1} \leq a_n$ (esercizio);

b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Problema: per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ e $\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}_{\text{somma parziale della serie armonica}} \to +\infty$

Def: data una successione $(a_n)_{n\geq 1}$, la successione delle medie aritmetiche è $M(a_n) := \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

Teorema: se $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ (esiste finito o infinito), allora $\lim_{n\to+\infty} M(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Nota: se $\lim_n M(a_n)$ esiste, non è detto che $\lim_n a_n$ esista.

Es: $a_n = (-1)^n$ non converge $\left(\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1}\right)$

Es: $a_n = (-1)^n$ non converge $\left(\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} \right)$

ma $M((-1)^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} M((-1)^n) = 0$

Perché $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che

$M(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Quindi posso applicare il criterio di Leibniz e la serie converge.

SERIE A TERMINI DI SEGNO ARBITRARIO

Def: $\sum_{n\geq 0} a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ è assolutamente convergente se la serie a termini non neg. $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ è convergente.

Nota: se $\sum_{n\geq 0} a_n$ (con $a_n \in \mathbb{R}$) converge nel senso solito, si dice anche che converge "semplicemente".

Es: 1) $\sum_{n\geq 0} (-\frac{1}{2})^n$ (serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$) converge semplicemente $\left(a \ \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\right)$ e assolutamente, perché

$\sum_{n\geq 0} |(-\frac{1}{2})^n| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge $\left(a \ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\right)$.

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge semplicemente (per il criterio di Leibniz) ma non assolutamente, perché $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

teorema (criterio della convergenza assoluta): se $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge assolutamente, allora converge semplicemente e si ha

$\left|\sum_{n\geq 0} a_n\right| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n|$ (conv. assoluta $\Rightarrow$ conv. semplice $\not\Leftarrow$ [non conv. semp. $\Rightarrow$ non conv. ass.])

Es: 3) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ converge semplicemente, ma non assolutamente, perché $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 2$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$ diverge per il criterio del confronto

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}\right)$.

<u>Nota</u>: se $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n|$ diverge; inoltre si ha

$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ (oppure non esiste) $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ non converge.

Ad esempio:

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ non converge semplice.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

<u>Es</u>: 4) $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge assolutamente $\forall\, a \in \mathbb{R}$: $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \sum_{n\geq 0} \frac{|a|^n}{n!}$

converge (per il criterio del rapporto).

Vedremo che $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

5) $\sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\, a^n}_{a_n}$ $\qquad n!! = n$ semi-fattoriale $:= \begin{cases} \text{prodotto termini pari } \leq n \text{ se } n \text{ pari} \\ \text{prodotto termini dispari } \leq n \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$

Studio per quali $a \in \mathbb{R}$ converge assolutamente, cioè

$\sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\, |a|^n}_{|a_n|}$ convergente, con il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2(n+1)+1)!!}{(2(n+1)+2)!!}|a|^{n+1}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}|a|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)!!\,(2n+2)!!}{(2n+4)!!\,(2n+1)!!}|a| \qquad \left[\begin{array}{l}(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)!! \\ (2n)!! = 2n\,(2n-2)!!\end{array}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)(2n+1)!!\,(2n+2)!!}{(2n+4)(2n+2)!!\,(2n+1)!!}|a|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{2n+3}{2n+4}}_{\to 1} |a| = |a|$$

Se $|a| < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge, cioè $\sum_{n\geq 0} a_n$ conv. assolutamente

Se $|\alpha|>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ non converge (vedere Nota).

Per il caso $|\alpha|=1$, vedere LEZIONE 5.

<u>Esercizi:</u>

Studiare la convergenza assoluta/semplice delle seguenti serie al variare di $x\in\mathbb{R}$.

1) $\sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{a_n}$

Studiamo la serie a termini non neg. $\sum_{n\geq 1} \left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|^n$

con il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right| \to |\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{per } n\to+\infty$$

Se $|\operatorname{sen} x|<1$, cioè per $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, la serie $\sum_{n\geq 1}|a_n|$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ conv. assolutamente (quindi anche semplicemente)

Se $|\operatorname{sen} x|=1$, cioè se $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, si ha

$$a_n = \Bigg(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{1}{n}\right)}_{\underbrace{(-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)}_{(-1)^k\cos\frac{1}{n}}}\Bigg)^n = \left((-1)^k \cos\frac{1}{n}\right)^n.$$

Verifico se $\lim_{n\to+\infty}|a_n|=0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^k\cos\frac{1}{n}\right|^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n}_{e^{n\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}} = e^{\lim_{n\to+\infty} n\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)} = e^0 = 1$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} n\log\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\log(\cos x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0\right)$$

Per la Nota, si ha che $\sum_{n\geq 1} a_n$ non converge.

Precisamente: se k pari $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \underbrace{\left((-1)^k \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n > 0}$ è a termini positivi $\Rightarrow$ divergente

se k è dispari $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \underbrace{\left((-1)^k \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{(-1)^n \underbrace{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n}_{>0}}$ è a segni alterni, quindi indeterminata.

2) $\sum_{n\geq 0} \underbrace{n\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n}\right) x^n}_{a_n}$

Studio la serie a termini positivi $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ con il criterio del rapporto ($\pi - 2\arctg\sqrt{n} > 0$, perché $2\arctg x \in]-\pi,\pi[$) $\lim_{x\to+\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n+1}\right)|x|^{n+1}}{n\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n}\right)|x|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} |x| \underbrace{\frac{\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n+1}\right)}{\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n}\right)}}_{\to 1} = |x|$$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi - 2\arctg\sqrt{n+1}}{\pi - 2\arctg\sqrt{n}} \overset{H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{-2\,\frac{1}{1+n+1}\,\frac{1}{2\sqrt{n+1}}}{-2\,\frac{1}{1+n}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1\right)$$

Se $|x| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ conv. assolutamente.

Se $|x| > 1 \Rightarrow \sum a_n$ non converge. Precisamente, se $x > 1$ $\sum_{n\geq 0} a_n$ è a termini positivi $\Rightarrow$ divergente; se $x < -1$, $\sum_{n\geq 0} a_n$ è a segni alterni $\left(x^n = ((-1)|x|)^n = (-1)^n |x|\right) \Rightarrow$ indeterminata.

Se $|x| = 1$, cioè $x = 1$ opp. $x = -1$, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} n\left(\pi - 2\arctg\sqrt{n}\right) = \ldots \overset{H}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\frac{n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ non converge (se $x=1$, divergente; se $x=-1$, indet.)

3) $\sum (-1)^n \left[\sqrt{\frac{1}{n}} - \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \right]$

a) Determinare i valori di $\alpha > 0$ t.c. la serie è ass. conv.

b) Studiare la convergenza semplice per $\alpha = \frac{1}{2}$.

SERIE DI TAYLOR

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, derivabile ∞-volte in $x_0 \in I$.

Def: 1) La serie $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ è la SERIE DI TAYLOR di f CENTRATA in x_0. (Se $x_0 = 0$, si chiama anche SERIE DI MAC LAURIN di f : $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$)

2) Se la serie di Taylor di f centrata in x_0 converge a $f(x)$ $\forall x \in J :=$ intorno di $x_0 \subseteq I$ $\Rightarrow$ f è SVILUPPABILE IN SERIE DI TAYLOR in x_0

teorema: Se $\begin{cases} f \text{ derivabile } \infty\text{-volte in } J := \{|x-x_0| \leq \delta\} \subseteq I \\ |f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in J \text{ e } \forall n \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0, cioè

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x) \quad \forall x \in J.$$

Es: 1) e^x è C^∞ e $\forall n \geq 0$ $\left|\frac{d^n}{dx^n} e^x\right| = |e^x| \leq e^{x_0+\delta} =: M$ $\forall x \in J := \{|x-x_0| \leq \delta\}$ $\Rightarrow$ e^x è sviluppabile in serie di Taylor in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. In particolare, per $x_0 = 0$ ottengo $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ è C^∞ e $\left|\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{sen} x\right| \leq 1$, $\left|\frac{d^n}{dx^n} \cos x\right| \leq 1$ $\forall n \geq 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ sviluppabili in serie di Taylor in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. In particolare, per $x_0 = 0$ si ha:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) $\frac{1}{1-x}$ è sviluppabile in serie di Taylor in $]-1,1[$
— esercizio

3) $\frac{1}{1-x}$ è sviluppabile in serie di Taylor in $]-1,1[$

In particolare, per $x_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x} \overset{\text{esercizio}}{=} \underbrace{\sum_{n\geq 0} x^n}_{\sum_{n\geq 0} \frac{\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1-x}\big|_{x=0}}{n!} \cdot x^n} \quad \forall\, x \in]-1,1[$.

4) Integrando ambo i termini $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ tra 0 e x (la serie si integra termine a termine) si ottiene

$$\underbrace{\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt}_{} = \sum_{n\geq 0} \int_0^x t^n\,dt$$

$$-\log(1-x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall\, x \in]-1,1[$$

Cambiando $-x$ con x, ottengo

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall\, x \in]-1,1[$$

serie di Taylor di $\log(1+x)$ in $x_0 = 0$.

5) Cambiando x con $-x^2$ in $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \forall\, x \in]-1,1[$

ottengo $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} \quad \forall\, x \in]-1,1[$. Integrando tra 0 e x ambo i termini ottengo

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall\, x \in]-1,1[\text{ e per } x = 1.$$

In particolare, per $x = 1$ si ottiene $\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

<u>Nota</u>: non tutte le funzioni C^∞ sono sviluppabili in serie di Taylor.