

Esercizi sulle serie

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \alpha^n \quad \text{con } |\alpha| = 1$$

Per la formula di Wallis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi} \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{1}{(n+1)^{1/2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \neq 0, \text{ cioè } \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \sim \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Poiché $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \alpha^n$ divergente per $\alpha = 1$

e non converge assolutamente per $\alpha = -1$. Rimane da studiare la convergenza semplice di $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} (-1)^n$.

Poiché è una serie a segni alterni, per usare il criterio di Leibniz devo verificare che $\lim_n \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = 0$ e $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ decrescente. Poiché $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \sim \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

basta verificare che $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ è decrescente:

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)(2n+1)!!} = \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi la serie converge semplicemente per $\alpha = -1$.

$$2) \sum_{n \geq 1} (\sin(\sin(n! \log n)))^n$$

$$|\sin(n! \log n)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \geq 1$$

$\sin x$ è crescente
per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow |\sin(\sin(n! \log n))| \stackrel{\text{argomento} \leq \frac{\pi}{2}}{=} \sin |\sin(n! \log n)| \stackrel{\text{sen } x \text{ è crescente}}{\leq} \sin 1 < 1$$

$$\Rightarrow |\sin(\sin(n! \log n))|^n \leq (\sin 1)^n$$

Poiché $\sum_{n \geq 0} (\sin 1)^n$ è convergente (serie geometrica di ragione $\sin 1$)

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} |\sin(\sin(n! \log n))|^n \text{ convergente, e' la}$$

serie di potenze e' ass. convergente.

$$3) \sum_{n \geq 1} n^{\alpha} \log n \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}$$

$n^{\alpha} \log n \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ uso il criterio di confronto asintotico

$$\lim_n \frac{n^{\alpha} \log n}{\frac{1}{n^{\beta}}} = \lim_n n^{\alpha+\beta} \log n = 0 \quad \text{se } \alpha < -\beta$$

$$n^{\alpha} \log n = o\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Perche' $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\beta}}$ converge per $\beta > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n^{\alpha} \log n$ converge per

$$\alpha < -\beta < -1 \quad \forall \beta > 1 \Rightarrow \forall \alpha < -1.$$

Se $\alpha \geq 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \log n = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge.

Se $-1 \leq \alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha} \log n} = 0 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} = o(n^{\alpha} \log n)$ per $n \rightarrow +\infty$

Perche' $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge per $-1 \leq \alpha < 0 \Rightarrow$ la serie diverge.

$$4) \sum_{n \geq 1} (n^{\alpha} - 1) \text{ al variare di } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_n \underbrace{(n^{\alpha} - 1)}_{e^{n^{\alpha} \log n} - 1} = +\infty \text{ se } \alpha \geq 0 \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

Si ha $n^{\alpha} - 1 = e^{n^{\alpha} \log n} - 1 \sim n^{\alpha} \log n$ per $n \rightarrow +\infty$ se $\alpha < 0$,

$$\text{infatti } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \log n = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n^{\alpha} \log n} - 1}{n^{\alpha} \log n} = 1.$$

Perche' $\sum_{n \geq 1} n^{\alpha} \log n$ converge $\Leftrightarrow \alpha < -1$, per il confronto

asintotico anche $\sum_{n \geq 1} (n^{\alpha} - 1)$ converge $\Leftrightarrow \alpha < -1$.

INTEGRALI IMPROPRI

I INTEGRALI SU DOMINI ILLIMITATI ($[a, +\infty[$; $]-\infty, b]$; $\mathbb{R}$)

Def: 1) $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è LOCALMENTE INTEGRABILE se

$f|_{[c,d]}: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile $\forall [c,d] \subseteq [a, +\infty[$.

2) f loc. integrabile è INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO

su $[a, +\infty[$ se esiste finito $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx =: \int_a^{+\infty} f(x) dx$

(si dice anche che l'integrale IMPROPRIO $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE);

se invece $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx = \pm \infty$, si dice che $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ DIVERGE).

3) Se $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, f è ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO ($\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è ASS. CONVERGENTE)

4) Simile per $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$: $\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx$
(loc. integrabile) $=: \int_{-\infty}^b f(x) dx$

Prop: 1) Dato $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile;

se $f(x) \geq 0 \forall x \geq b \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge oppure diverge.

2) Date $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabili;

a) se $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq b$, allora:

$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ diverge} \\ \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \end{array} \right.$ (CRITERIO DEL CONFRONTO)

b) se $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \forall x \geq b$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty$, allora
 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge (CRITERIO DEL

2) se $\{f(x) > 0 \quad \forall x \geq b\}$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty$, allora

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ hanno lo stesso carattere (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO I)

c) se $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \forall x \geq b$ e $f = o(g)$ per $x \rightarrow +\infty$, allora:

$\begin{cases} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \\ \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ converge} \\ \int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ diverge} \end{cases}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO II)

3) Data $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile, se $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \quad \text{e} \quad \left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

(CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA)

Es: 1) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ convergente o divergente, perché $e^{-x} > 0 \quad \forall x$.

$$\text{Precisamente: } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^c e^{-x} dx}_{-e^{-x} \Big|_0^c} = \lim_{c \rightarrow +\infty} (-e^{-c} + e^0) = 1 \quad \text{così convergente.}$$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ convergente o divergente. Precisamente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx}_{\arctan x \Big|_0^c} = \lim_{c \rightarrow +\infty} (\arctan c - 0) = \frac{\pi}{2}$$

così è convergente.

3) $\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^c \sin x dx}_{-\cos x \Big|_0^c} = \lim_{c \rightarrow +\infty} (-\cos c)$ non esiste
 $\Rightarrow \sin x$ non è int. in senso generalizzato.

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^d} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^d} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log x}{-d} \right]_1^c$ se $d=1$

$$4) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} \log x \Big|_1^c & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^c & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{c \rightarrow +\infty} (\log c - 0) = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{c^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \end{cases}$$

così $\frac{1}{x^\alpha}$ è int. in senso generalizzato su $[1, +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$

$$5) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{1}{x (\log x)^\alpha} dx \stackrel{t = \log x}{=} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\log 2}^{\log c} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$dt = d \log x = \frac{1}{x} dx$

$$= \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$\left(\text{a } \frac{1}{\alpha-1} (\log 2)^{\alpha-1} \right)$

6) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ è abs. convergente ($\Rightarrow$ convergente):

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| = \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1 \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Nota: se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste ed è $\neq 0 \Rightarrow f$ non è integrabile

in senso generalizzato su $[a, +\infty[$.

A differenza delle serie, se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, non è detto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esista (ma se esiste, deve essere $= 0$).

7) $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ converge, ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ non esiste.

$t = x^2 \Rightarrow dt = dx^2 = 2x dx$

Infatti: $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \sin(x^2) dx$ $\begin{matrix} t=x^2 \Rightarrow dt=dx^2=2x dx \\ \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{matrix}$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \quad \text{convergente}$$

perché $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

P.P. $\Leftrightarrow \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_1^c - \frac{1}{2} \int_1^c \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt \right)$

$$= \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt$$

ass. convergente
perché $\left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$
e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge

parte intera di $x := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$

8) $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^2} dx$ è ass. convergente:

$\left| \frac{(-1)^{[x]}}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

9) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ non è ass. convergente: $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$

e $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_1^c \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(2x)}{x} \right)$

$\frac{1}{2} \int_1^c \frac{1}{x} dx \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} +\infty$ $\downarrow$ divergente

$\Rightarrow$ divergente

ma $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ è convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{P.P.}}{=} \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^c + \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = 0 + \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{(\text{ass.}) \text{ convergente}}$$

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile, è integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}$ se e solo se $\exists$ in $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[\exists a$, cioè se

esistono finiti: $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ $\left(\Leftrightarrow \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_c^d f(x) dx \right)$
 $\left(\begin{array}{l} c \rightarrow -\infty \\ \text{esiste finito} \end{array} \right)$

Notazione: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$

Nota: In generale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \neq \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx$

Eg: 1) $\lim_{c \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-c}^c \sin x dx}_=0 = 0$,
 perché $\sin x$ è dispari.

ma $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx := \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{+\infty} \sin x dx$ non esiste.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx}_= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$
 perché $\frac{1}{1+x^2}$ è pari.

II INTEGRALI DI FUNZIONI NON LIMITATE

Def: 1) $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile $\checkmark$ è integrabile in senso generalizzato su $[a, b[$ se $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ esiste finito
 $=: \int_a^b f(x) dx$ convergente

$$=: \int_a^b f(x) dx \text{ convergente}$$

Simile per $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx$.

2) $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile, $\bar{e}$ integrabile in senso generalizzato su $]a, b[$ se $\bar{e}$ è su $]a, d]$ e $[d, b[$, cioè

$$\text{se esistono limiti } \begin{cases} \int_a^d f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^d f(x) dx \text{ e} \\ \int_d^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_d^c f(x) dx \end{cases}$$

$$\left(\Leftrightarrow \lim_{\substack{c \rightarrow b- \\ c' \rightarrow a+}} \int_{c'}^c f(x) dx \text{ esiste finito} \right)$$

In tal caso la somma dei due limiti si denota $\int_a^b f(x) dx$ e si dice che $\int_a^b f(x) dx$ è convergente.

Es: $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ definita su $]a, b[$ e loc. int.

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$$

$$= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-\log(b-x) \Big|_a^{b-\varepsilon} \right) = +\infty & \text{per } \alpha=1 \\ -\log \varepsilon + \log(b-a) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(b-x)^{1-\alpha}} \Big|_a^{b-\varepsilon} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}} - \frac{1}{(b-a)^{1-\alpha}} \right) \end{cases}$$

Quindi: $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ è int. in senso gen. $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

$$\left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \text{ convergente} \right)$$

In particolare: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

Prop (CONFRONTO ASINTOTICO): data $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ Ec. int. e $f(x) \geq 0$
1) se $f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ per $x \rightarrow b^-$, allora $\begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ convergente} \\ \alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ divergente} \end{cases}$
2) se $f(x) = o\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ per $x \rightarrow b^-$, allora: $\alpha < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ convergente}$

Esercizi: 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

2) $\int_2^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3) $\int_0^1 \log x \, dx$

4) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ (e calcolare) $n \in \mathbb{N}$

5) $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\log x} dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$