Lezione 9

venerdì 11 agosto 2017 09:09

ESERCIZI

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^x(2e^{2x}-3)}{e^{3x}-3e^x+2}\,dx$ Studiare la convergenza e calcolarlo

Verifico se $e^{3x}-3e^x+2=0$ per $x\in\,]-\infty,-\log 2]$.

Posto $t=e^x \Rightarrow t^3-3t+2=0$ per $t=1 \Rightarrow$ divido t^3-3t+2 per $t-1$ e trovo t^2+t-2, cioè

$t^3-3t+2=(t-1)(t^2+t-2)=0 \Rightarrow t=1$ è di nuovo soluzione $\Rightarrow$ divido di nuovo per $t-1$ e trovo $t+2$, cioè

$t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$ opp $t=-2$.

Quindi $e^{3x}-3e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=1$ opp. -2. Perché $e^x>0$, l'unica soluzione è $x=0\notin\,]-\infty,-\log 2]$.

Quindi l'integranda è continua su $]-\infty,-\log 2]$ e

$$\int_{-\infty}^{-\log 2} \frac{e^x(2e^{2x}-3)}{e^{3x}-3e^x+2}\,dx := \lim_{c\to-\infty}\int_c^{-\log 2}\frac{e^x(2e^{2x}-3)}{e^{3x}-3e^x+2}\,dx$$

$$\overset{t=e^x \to dt=e^x dx}{=} \lim_{c\to-\infty}\int_{e^c}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{2t^2-3}{(t-1)^2(t+2)}}\,dt$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{13}{9}\frac{1}{t-1}+\frac{5}{9}\frac{1}{t+2}$$

— o —

Ricordo: $\dfrac{A(t)}{B(t)}$ con $A(t), B(t)$: polinomi con $B(t)$ di grado ≥ 1

I caso: se grado $A(t) \geq$ grado $B(t)$, con l'algoritmo di Euclide si trovano

$$\begin{cases} Q(t): \text{ polinomio di grado} \leq \text{grado } A(t) - \text{grado } B(t) \\ R(t): \quad '' \quad '' \quad '' < \text{grado } B(t)\end{cases}$$

t.c. $\dfrac{A(t)}{B(t)} = Q(t) + \dfrac{R(t)}{B(t)} \Rightarrow$ II caso

II caso: se grado $A(t) <$ grado $B(t)$, allora

$\dfrac{A(t)}{B(t)}$ = somma finita di quozienti del tipo

$$\frac{\alpha}{(t-\alpha)^r} \quad e \quad \frac{a t + b}{(\underbrace{t^2+pt+q}_{\Delta<0})^m}$$

$\left[(t-\alpha)^r \text{ e } (t^2+pt+q)^m \text{ sono fattori di } B(t) \right]$

Es : 1) $\dfrac{2t^2-3}{(t-1)^2(t+2)} = \dfrac{A}{(t-1)^2} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t+2}$

$$= \frac{A(t+2) + \overbrace{B(t-1)(t+2)}^{B(t^2+t-2)} + \overbrace{C(t-1)^2}^{C(t^2-2t+1)}}{(t-1)^2(t+2)} \iff$$

$$2t^2-3 = (B+C)t^2 + t(A+B-2C) + 2A-2B+C \iff$$

$$\begin{cases} 2 = B+C \\ 0 = A+B-2C \\ -3 = 2A-2B+C \end{cases}$$

2) $\dfrac{2t^2-3}{(\underbrace{t^2+1}_{\Delta<0})(t+2)} + \dfrac{1}{3}(-2) + \dfrac{At+B}{t^2+1} \dfrac{13}{9} \log \dfrac{1}{2c} + \dfrac{C}{t+2} + \dfrac{5}{9} \log \dfrac{5}{2} \Big]$

$$\ldots = \lim_{c\to-\infty} \underbrace{\int_{e^c}^{1/2} \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{13}{9}\frac{1}{t-1} + \frac{5}{9}\frac{1}{t+2} \right) dt}_{\left[\frac{1}{3}\frac{1}{t-1} + \frac{13}{9}\log|t-1| + \frac{5}{9}\log|t+2| \right]_{e^c}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \Big[-\Big(\frac{1}{3} \underbrace{\frac{1}{e^c-1}}_{\to 0} + \frac{13}{9} \underbrace{\log|e^c-1|}_{\to 0} + \frac{5}{9} \underbrace{\log|e^c+2|}_{\log 2} \Big) + \quad - \log 2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{9}\log 2 - \frac{2}{3} - \frac{13}{9}\log 2 + \frac{5}{9}\log 5 - \frac{5}{9}\log 2 = \frac{1}{3} - \frac{23}{9}\log 2 + \frac{5}{9}\log 5$$

2) $f(x) = x \arctan(\log|x|)$

a) Dominio, simmetrie, segno, limiti, asintoti;

b) Studiare il segno di $f''(x)$;

c) Usando b), verificare che esiste un unico punto $x_0 \in]0,1[$ t. c. $f'(x_0) = 0$. Determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$, estremi ed eventuali punti angolosi;

d) grafico.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(-x) = -x \arctg(\log|-x|) = -f(x) \Rightarrow$ dispari.

Restringo lo studio a $\{x > 0\}$

Segno di $f(x) = x \arctg(\log(x)) \geq 0 \iff \begin{cases} x > 0 & \text{SEMPRE} \\ \arctg(\log(x)) \geq 0 \end{cases}$

oppure $\begin{cases} x < 0 & \text{MAI, perché } x > 0 \\ \arctg(\log(x)) \leq 0 \end{cases}$ $\iff$

$\arctg(\log(x)) \geq 0 \iff \log x \geq 0 \iff x \geq 1$

$(\arctg y \geq 0 \quad \forall y \geq 0)$

Quindi $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x \in]0,1[$ e

$f(x) = 0$ per $x = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \underbrace{\arctg(\overset{\to +\infty}{\log x})}_{\to \frac{\pi}{2}} = +\infty \qquad \underbrace{\lim_{x \to 0^+} x \underbrace{\arctg(\overset{\to -\infty}{\log x})}_{\to -\frac{\pi}{2}} = 0}$$

$\Rightarrow f$ si può estendere per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) := 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2} x\right) \overset{!}{=} -\infty \Rightarrow \text{non ci sono asintoti obliqui.} \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctg(\log x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{1 + \log^2 x} = -\infty$$

b) $f'(x) = \arctg(\log x) + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\quad} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} > 0$

b) $f'(x) = \operatorname{arctg}(\log x) + \cancel{x} \cdot \dfrac{1}{1+\log^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} > 0$

$$f''(x) = \frac{1}{1+\log^2 x}\,\frac{1}{x} - \frac{2\log x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\log^2 x)^2}$$

$$= \frac{1}{x}\underbrace{\frac{(1-\log x)^2}{(1+\log^2 x)^2}}_{>0} > 0 \qquad \forall\, x>0$$

$f''(e)=0$ e $f''(x)>0 \quad \forall\, x \in\,]0,e[$ e $]e,+\infty[$.

$\Rightarrow f$ convessa su $]0,+\infty[$

Inoltre $\begin{cases} f' \text{ è strettamente crescente su }]0,+\infty[\\ f' \text{ è continua su }]0,+\infty[\end{cases}$

per dimostrare che esiste un unico zero di f' su $]0,1[$ per il teorema degli zeri basta verificare che f' assume valori negativi per $x \to 0+$ e positivi per $x \to 1-$.

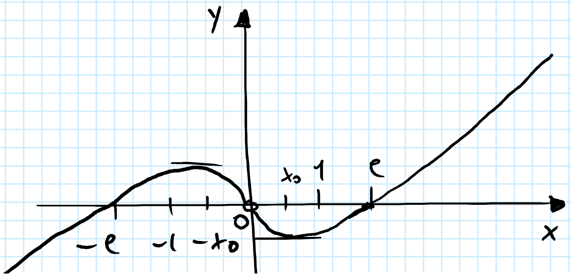
Si ha $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{\operatorname{arctg}(\log x)}_{\to -\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\dfrac{1}{1+\log^2 x}}_{\to 0} = -\frac{\pi}{2} < 0 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = f'(1) = 1 > 0 . \end{cases}$

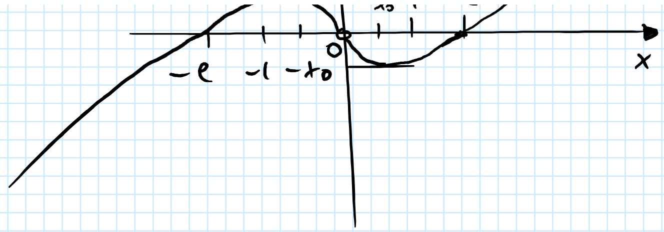
$\Rightarrow$ esiste un unico (perché f' strettamente crescente) $x_0 \in\,]0,1[$ t.c. $f'(x_0)=0$. Inoltre:

	0		x_0		1	
sgn f':		$-$		$+$		$+$
f		$\searrow$	m	$\nearrow$		$\nearrow$
f''		$+$		$+$		
f		$\cup$		$\cup$		

perché f' strettamente crescente e $f'(1)>0$.

$\Rightarrow x_0$ è minimo (assoluto) per f.





3) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx$

Studiamo se l'integranda è ben definita su $[\frac{2}{\pi}, +\infty[$

$\mathrm{Dom}\left(\log\left(\cos \frac{1}{x}\right)\right) \neq \left\{ x \neq 0 \,\middle|\, \cos \frac{1}{x} > 0 \right\}$

$$\left(\cos y > 0 \iff y \in \left] \underbrace{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \underbrace{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right[\quad \exists\, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$I_k := \left] \pi\left(-\frac{1}{2} + 2k\right), \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \right[$$

Se $x > \frac{2}{\pi} \Rightarrow 0 < y = \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \notin I_k \ \forall k \Rightarrow \cos \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > \frac{2}{\pi}$

quindi $\log\left(\cos \frac{1}{x}\right)$ è ben definita e continua su $]\frac{2}{\pi}, +\infty[$

In $x = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$ bisogna verificare se $\log \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata o illimitata per $x \to \frac{2}{\pi}+$:

$$\lim_{x \to \frac{2}{\pi}+} \log\left(\underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\to 0+}\right) = -\infty \Rightarrow \text{illimitata per } x \to \frac{2}{\pi}+.$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx := \underbrace{\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx}_{\substack{\text{improprio} \\ \text{II}}} + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx}_{\substack{\text{improprio} \\ \text{I}}}$$

per $a > \frac{2}{\pi}$

(I) Cerco $\alpha > 0$ t.c. $\log\left(\cos \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ oppure $o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\cos \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{\substack{y \to 0+ \\ y = \frac{1}{x}}} \frac{\log(\cos y)}{y^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{y \to 0+} \frac{-\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\alpha y^{\alpha - 1}},$$

$$= \lim \frac{-1}{\dots} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} y}_{\to 1}$$

$$= \lim_{y \to 0+} \frac{-1}{\alpha y^{\alpha-2} \cdot \underbrace{\frac{y}{\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{y \to 0+} -\frac{1}{\alpha y^{\alpha-2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Quindi: $\log\left(\cos \frac{1}{x}\right) \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

Poiché $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx$ converge.

Oppure: con gli sviluppi di Taylor per $x \to +\infty$ $\left(\Rightarrow \frac{1}{x} \to 0+\right)$

$$\log\left(\cos \frac{1}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \\ \log(1+y) = y + o(y) \\ \quad \text{per } y \to 0 \end{array}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$\Rightarrow \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) \sim -\frac{1}{2x^2} \quad \text{per } x \to +\infty$$

(II) Cerco $\alpha > 0$ t.c. $\log\left(\cos \frac{1}{x}\right) \gtrsim \frac{1}{\left(x - \frac{2}{\pi}\right)^\alpha}$ oppure $o\left(\frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^\alpha}\right)$ per $x \to \frac{2}{\pi}+$.

$$\lim_{x \to \frac{2}{\pi}+} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\left(x - \frac{2}{\pi}\right)^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{2}{\pi}+} \frac{-\operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\alpha \left(x - \frac{2}{\pi}\right)^{\alpha-1}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{per } \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos \frac{1}{x} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(x - \frac{2}{\pi}\right) \Rightarrow \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) \gtrsim \log\left(x - \frac{2}{\pi}\right)$$

per $x \to \frac{2}{\pi}+$. Ricordo che $\log y$ è integrabile in $]0,1]$

$\Rightarrow \log\left(x - \frac{2}{\pi}\right)$ è integrabile in $]\frac{2}{\pi}, a]$

$\Rightarrow \log\left(\cos \frac{1}{x}\right)$ è integrabile in $]\frac{2}{\pi}, a]$, cioè

$\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \log\left(\cos \frac{1}{x}\right) dx$ converge $\left(\text{senza il confronto con } \frac{1}{\left(x - \frac{2}{\pi}\right)^\alpha}\right)$

$\frac{}{\pi}$

In definitiva, $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log\left(\cos\frac{1}{x}\right) dx$ converge.

In (II), si poteva usare lo sviluppo di Taylor in $\frac{2}{\pi}$:

$$\cos\frac{1}{x} = \cos\frac{2}{\pi} + \left(\cos\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\frac{2}{\pi}} \cdot \left(x-\frac{2}{\pi}\right) + o\left(x-\frac{2}{\pi}\right) \text{ per } x \to \frac{2}{\pi}$$

con la definizione: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$

$$= 0 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(x-\frac{2}{\pi}\right) + o\left(x-\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{1}{x} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(x-\frac{2}{\pi}\right) \quad \text{per } x \to \frac{2}{\pi}$$

(Attenzione: $\cos\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \frac{2}{\pi}$ $\Rightarrow$ non posso usare lo sviluppo di Taylor di $\log(\underbrace{1+y}_{\to 1})$ per $y \to 0$ (equivalente, lo sviluppo di Taylor di $\log y$ per $y \to 1$).)

Se non ci si ricordava che $\int_0^1 \log y \, dy$ è convergente, si deve fare il confronto asintotico con $\frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^\alpha}$:

$$\lim_{x \to \frac{2}{\pi}^+} \frac{\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^\alpha}} \overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{2}{\pi}} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\alpha\frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha+1}}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{2}{\pi}} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\cancel{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)}} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\neq 0}}{-\alpha \frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha+\cancel{1}}}} = 0$$

$$\Rightarrow \log\left(\cos\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^\alpha}\right) \text{ per } x \to \frac{2}{\pi}^+ \text{ con } 0<\alpha<1$$

Poiché $\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \frac{1}{\left(x-\frac{2}{\pi}\right)^\alpha} dx$ converge per $\alpha<1$, allora converge anche $\int_{\frac{2}{\pi}}^{a} \log\left(\cos\frac{1}{x}\right) dx$.

4) $$f(x) = \frac{\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|}{e^{\left|x^2-\frac{1}{4}\right|}}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ perché $e^y > 0 \quad \forall y$

$$f(-x) = \frac{|-x+\frac{1}{2}| + |-x-\frac{1}{2}|}{e^{|(-x)^2 - \frac{1}{4}|}} = \frac{|x-\frac{1}{2}| + |x+\frac{1}{2}|}{e^{|x^2-\frac{1}{4}|}} = f(x)$$

$\Rightarrow f$ pari. Restringo lo studio a $\{x \geq 0\}$, quindi:

$$|x+\tfrac{1}{2}| = x + \tfrac{1}{2} \quad \text{per} \quad x \geq 0 > -\tfrac{1}{2}$$

$$|x-\tfrac{1}{2}| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x^2 - \tfrac{1}{4}| = |x - \tfrac{1}{2}|\underbrace{|x+\tfrac{1}{2}|}_{x+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{4} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ (-x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - x^2 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

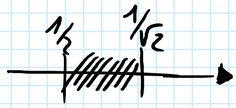
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \cancel{\frac{1}{2}} + x + \cancel{\frac{1}{2}}}{e^{x^2-\frac{1}{4}}} = \dfrac{2x}{e^{x^2-\frac{1}{4}}} = 2x\, e^{\frac{1}{4}-x^2} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ \dfrac{-\cancel{x} + \frac{1}{2} + \cancel{x} + \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{4}-x^2}} = e^{x^2 - \frac{1}{4}} & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x\, e^{\frac{1}{4}-x^2} = 0 \qquad y = 0 : \text{asintoto orizzontale}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{1}{4}-x^2} + 2x e^{\frac{1}{4}-x^2} \cdot (-2x) = 2e^{\frac{1}{4}-x^2}(1-2x^2) & \text{per } x > \frac{1}{2} \\ e^{x^2-\frac{1}{4}} \cdot 2x = 2x\, e^{x^2-\frac{1}{4}} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} 1 - 2x^2 > 0 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{per } x > \frac{1}{2} \\ \text{per ogni } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



quindi $f'(x) > 0$ per $x \in]0, \frac{1}{2}[$ e $x \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$

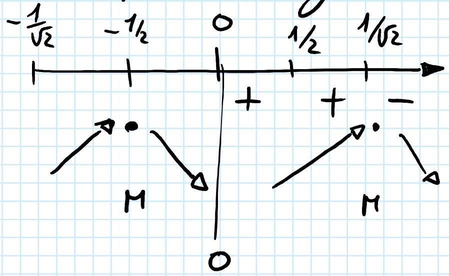
In $x = 0$ si ha $f'_+(0) = e^{x^2-\frac{1}{4}} \cdot 2x \Big| = 0$

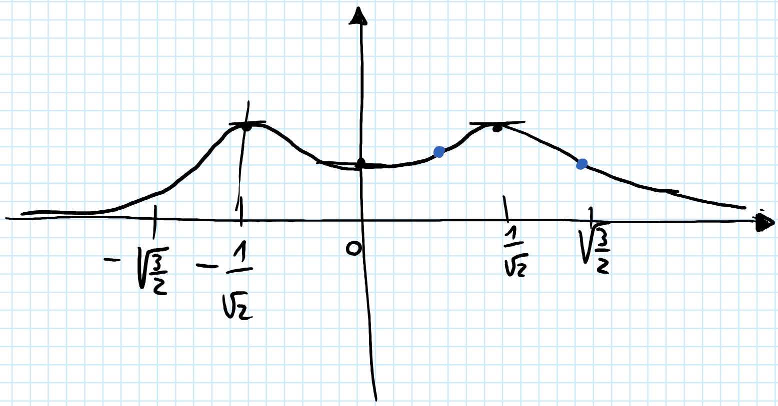
In $x=0$ si ha $f'_+(0) = e^{x^2-\frac{1}{4}}\cdot 2x\Big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow$ $f'_-(0)=0$ per parità $\Rightarrow$ f è derivabile in 0

In $x=\frac{1}{2}$ si ha
$$\begin{cases} f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{4}-x^2}(1-2x^2)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 \\ f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = 2x\,e^{x^2-\frac{1}{4}}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=\frac{1}{2}$. In definitiva non ci sono punti angolosi:



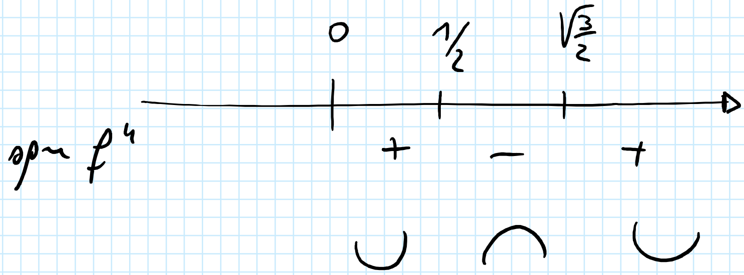


Rimane lo studio di $f''(x)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -4x(3-2x^2)\underbrace{e^{\frac{1}{4}-x^2}}_{>0} & \text{per } x>\frac{1}{2} \\ 2\underbrace{(1+2x^2)}_{>0}\underbrace{e^{x^2-\frac{1}{4}}}_{>0} & \text{per } 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

$f''(x)>0$ per $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ e per $x\in\left]\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right[$

$f''(x)=0$ per $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$



Valutando $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si verifica che $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono massimi assoluti, mentre 0 è minimo relativo perché $f(x)>0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ (nessun minimo assoluto)

5) $f(x) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x}$

$\operatorname{Dom} f = \{x \neq 0\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \underbrace{\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow f$ non si prolunga per continuità in $x=0$, perché $\lim\limits_{x \to 0+} f \neq \lim\limits_{x \to 0-} f$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \pm \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$y = x \pm \frac{\pi}{4}$ asintoti obliqui $\left(\begin{array}{ll} y = x + \frac{\pi}{4} & \text{destro} \\ y = x - \frac{\pi}{4} & \text{sinistro} \end{array} \right)$

$\operatorname{arctg} y > 0 \quad \forall y > 0$ e < 0 altrimenti

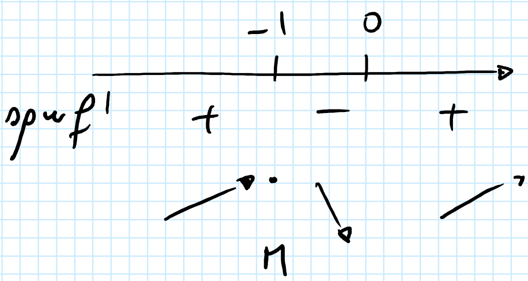
$\operatorname{arctg} \underbrace{\dfrac{x+1}{x}}_{(1 + \frac{1}{x}) > 1 \text{ per } x > 0} > 0$ per $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ per $x > 0$

Per $x < 0$, il segno di $f(x)$ lo dedurremo dopo lo studio della derivata $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{2x^2 + 2x + 1} \quad \text{per } x \neq 0$$

$2x^2 + 2x = 2x(x+1)$

$f'(x) > 0 \iff x \notin \,]-1, 0[\quad ; \quad f'(x) = 0$ per $x = -1$

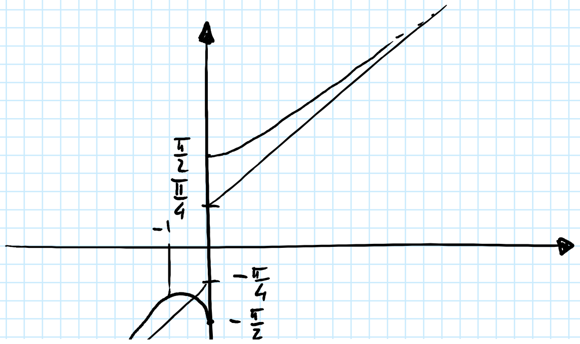


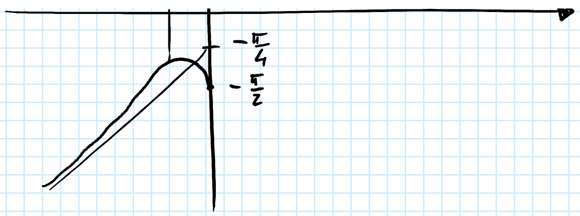
$x = -1$ è massimo relativo (perché $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

e $f(-1) = -1$, da cui si deduce

$f(x) \le f(-1) = -1 < 0 \quad \forall x \le 0$

$\Rightarrow f$ negativa per $x \le 0$.




$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$