Università degli Studi di Padova
Facoltà di Ingegneria, area dell'Informazione - Bressanone 2017
Prova d'esame del 12 agosto 2017

Analisi Matematica 1

(1) [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left| \log(x^2 - 1) \right| .$$

(a) Determinarne il dominio, eventuali simmetrie, il segno ed i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinarne il dominio della derivata prima, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(2) [8 punti] Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \log^3 \left(\cos \frac{1}{n}\right) .$$

(3) [10 punti] (a) Determinare i valori di $\alpha > 0$ per cui è convergente il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{[x(x+4)^2]^{\alpha}} dx.$$

(b) Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$ (sugg.: porre $t = \sqrt{x}$).

(4) [6 punti] Si consideri il polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

(a) Verificare che se z_0 è una radice di $P(z)$, anche il coniugato $\bar{z}_0$ è una radice.

(b) Verificare che $z = i$ è una radice di $P(z)$.

(c) Trovare tutte le radici complesse di $P(z)$.

(4 bis) [6 punti] Calcolare tutte le soluzioni di

$$y'' - 2y' + y = e^x \cos x.$$

(4 ter) [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + \log^2 |y|\right) y & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

(a) Determinarne l'insieme dei punti di continuità.

(b) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico di $f(x,y)$ in $(0,1,0)$, giustificando la risposta.

(4 quater) [6 punti] (a) Calcolare il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n$$

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$$

Tempo totale a disposizione: due ore e 45 minuti.
Lo svolgimento degli esercizi deve essere scritto unicamente sul foglio protocollo bianco siglato, **con adeguate giustificazioni dei passaggi**.
I fogli di brutta copia non vanno consegnati e comunque non vengono corretti.
E' vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Università degli Studi di Padova
Facoltà di Ingegneria, area dell'Informazione - Bressanone 2017
Prova d'esame del 12 agosto 2017

SCHEMA DI SOLUZIONE

(Si prega di comunicare eventuali errori a `dagnolo@math.unipd.it`)

Attenzione: questo è solo un breve schema di soluzione. In sede d'esame è richiesto che i risultati siano opportunamente giustificati.

(1) La funzione è definita quando $x^2 - 1 > 0$ e $|\log(x^2 - 1)| \neq 0$, pertanto il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus ([-1, 1] \cup \{\pm\sqrt{2}\})$.
Essendo una funzione pari, si può discuterne il comportamento solo per la semiretta $x > 1$.
Segno: la funzione è strettamente positiva se $|\log(x^2 - 1)| > 1$, cioè (notando che $1 < \sqrt{1 + e^{-1}} < \sqrt{2} < \sqrt{1 + e}$) per $1 < x < \sqrt{1 + e^{-1}}$ e per $x > \sqrt{1 + e}$, e si annulla per $x = \sqrt{1 + e^{-1}}, \sqrt{1 + e}$.
Limiti:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}\pm} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

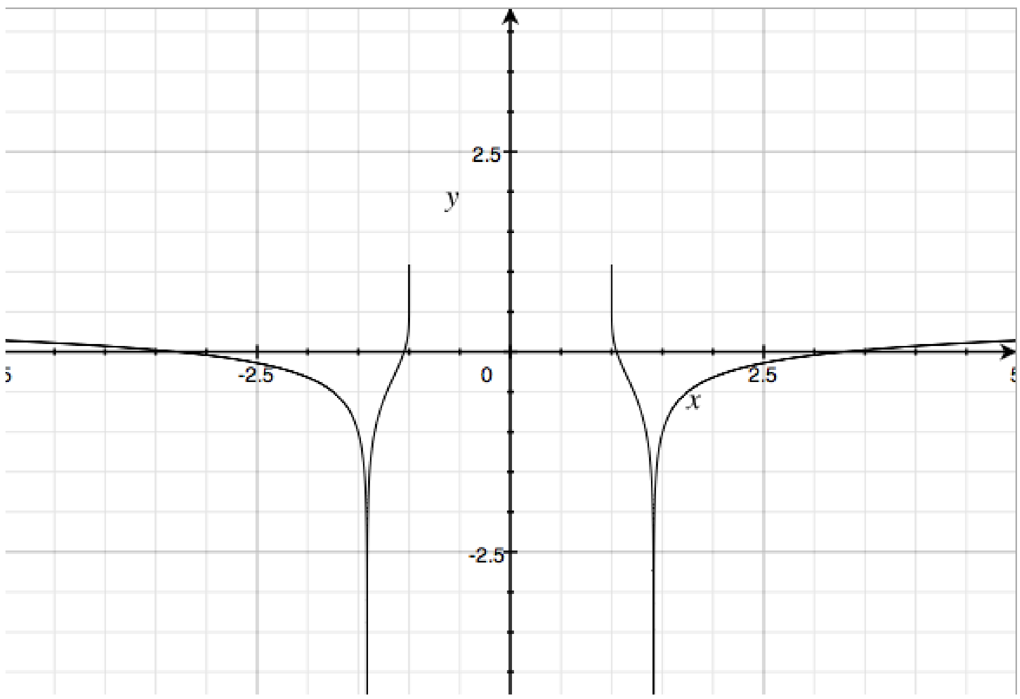
quindi $x = 1$ ed $x = \sqrt{2}$ sono asintoti verticali (destri e sinistri). Non ci sono asintoti obliqui, perchè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Derivata: ricordando che $(\log |t|)' = 1/t$, si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1)\log(x^2 - 1)},$$

che è definita in tutto il dominio di $f(x)$. Poichè $\frac{2x}{x^2-1} > 0$ per $x > 1$, la derivata non si annulla mai ed è strettamente positiva se e solo se $\log(x^2 - 1) > 0$. Pertanto risulta che $f(x)$ è strettamente decrescente nell'intervallo $(1, \sqrt{2})$ e strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{2}, +\infty)$. Non vi sono estremi relativi.
Abbozzo del grafico:



(2) Per $n \to +\infty$, si ha

$$\begin{aligned} 1 - e^{\frac{1}{n}} &= -\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}); \\ \log^3\left(\cos\frac{1}{n}\right) &= \log^3(1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \left(-\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8n^6} + o(\frac{1}{n^6}). \end{aligned}$$

Quindi

$$n^\alpha \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \log^3\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{8} n^{\alpha-7} + o(n^{\alpha-7}) \quad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui

$$n^\alpha \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \log^3\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{8}\frac{1}{n^{7-\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Allora la serie converge se e solo se $7 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 6$.

(3) Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{[x(x+4)^2]^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{2}{[x(x+4)^2]^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{[x(x+4)^2]^\alpha} dx.$$

Poichè $f(x) \sim \frac{2}{4^\alpha}\frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to 0^+$, ne segue che $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato in $]0,1[$ se e solo se $\alpha < 1$.
Analogamente, $f(x) \sim \frac{2}{x^{3\alpha}}$ per $x \to +\infty$, quindi $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato in $]1,+\infty[$ se e solo se $3\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{3}$.
In definitiva, $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato in $]0,+\infty[$ se e solo se $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

Sia $\alpha = \frac{1}{2}$. Per definizione si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{x(x+4)\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)} dx + \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)} dx.$$

Posto $t = \sqrt{x}$, si ha

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)} dx = \int \frac{4}{t^2+4} dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \int \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2} dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\arctan\frac{\sqrt{x}}{2} + \text{ cost.},$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} 2\arctan\frac{\sqrt{x}}{2}\Big|_\epsilon^1 + \lim_{c \to +\infty} 2\arctan\frac{\sqrt{x}}{2}\Big|_1^c = \pi.$$

(4) (a) Si ha $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0$.
(b) Si ha $P(i) = 1 + 2i - 3 - 2i + 2 = 0$.
(c) Poichè $3i$ è radice di $P(z)$, per il punto (a) anche $\bar{i} = -i$ è una radice. Pertanto $P(z)$ è divisibile per $(z-i)(z+i)$. Con l'algoritmo di Euclide, o col metodo di Ruffini, si trova

$$P(z) = (z-i)(z+i)(z^2 - 2z + 2).$$

Quindi le altre due radici di $P(z)$ sono

$$z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

In forma esponenziale, $z_{1,2} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ e $z_{3,4} = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$.

(4 bis) L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

che ha $\lambda = 1$ come soluzione doppia. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$\varphi_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Con il metodo dei coefficienti indeterminati, si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\varphi_p(x) = e^x(p \sin x + q \cos x).$$

Si ha

$$\begin{cases} \varphi_p'(x) = e^x[(p-q)\sin x + (p+q)\cos x] \\ \varphi_p''(x) = e^x(-2q \sin x + 2p \cos x), \end{cases}$$

allora $\varphi_p(x)$ é soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$e^x(-2q\sin x + 2p\cos x) - 2e^x[(p-q)\sin x + (p+q)\cos x] + e^x(p\sin x + q\cos x) = e^x \cos x$$

cioé se e solo se

$$\begin{cases} -p = 0 \\ -q = 1, \end{cases}$$

da cui

$$\varphi_p(x) = -e^x \cos x.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\varphi_0(x) + \varphi_p(x) = (c_1 - \cos x)e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(4 ter) (a) La funzione è continua fuori dall'asse x, in quanto composizione di funzioni continue. Poichè

$$\lim_{(x,y)\to(x_\circ,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_\circ,0)} \left(x^2 y + y \log^2|y|\right) = 0 = f(x_\circ, 0)$$

ne risulta che $f(x,y)$ è continua su tutto il piano.
(b) $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,1)$, perchè composizione di funzioni derivabili con derivate continue, quindi esiste il piano tangente in $(0,1,f(0,1)=0)$. Le derivate parziali sono

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 2xy, \\ \partial_y f(x,y) = x^2 + \log^2|y| + 2\log|y|, \end{cases}$$

pertanto il gradiente $\nabla f(x,y)$ calcolato in $(0,1)$ è $(0,0)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ in $(0,1,0)$ è $z = 0$.

(4 quater) (a) Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1+1)(-1)^{n+1}}{(n+1)(-1)^n} \right| = 1,$$

il raggio di convergenza è 1. Derivando termine a termine la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \qquad \text{per } x \in]-1,1[$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1} x^n = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{per } x \in]-1,1[$$

pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n = -\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1} x^n\right) = -1+\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{per } x \in]-1,1[.$$

(b) Per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3); \\ e^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3) \\ &= 1+(x-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)^2+\frac{1}{6}(x-\frac{1}{6}x^3)^3+o(x^3) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3); \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-(1+x+\frac{1}{2}x^2)+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$