

Test di Autovalutazione

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 + 2 \log |x|}{2 + \log |x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f .
- (c) Determinare gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso di f .
- (d) Disegnare un grafico qualitativo di f .

(2) Per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$, determinare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x - 1 - \sin(\beta x) + x^3 \sin \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2} \log(x+1) - \cos \sqrt{x}}.$$

(3) (a) Verificare, senza calcolarlo, che il seguente integrale generalizzato converge

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-9)\sqrt{|x|}} dx.$$

(b) Calcolare il valore dell'integrale.

(4) Rappresentare le soluzioni della disequazione

$$\left| |z-1|^2 - \left| \frac{z-\bar{z}}{2} \right|^2 - 1 \right| \leq \operatorname{Im} z$$

(4 bis) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \tan x = \cos^3 x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(4 ter) (a) Determinare il dominio di $f(x, y) = \frac{1}{\log(\frac{x}{y})}$, disegnarlo e stabilire se è chiuso e limitato.

(b) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico di f in $(e, 1, f(e, 1))$, giustificando la risposta.

Tempo totale a disposizione: due ore e 45 minuti.

Lo svolgimento degli esercizi deve essere scritto unicamente sul foglio protocollo bianco siglato, **con adeguate giustificazioni dei passaggi**.

I fogli di brutta copia non vanno consegnati e comunque non vengono corretti.

E' vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Università degli Studi di Padova
Facoltà di Ingegneria, area dell'Informazione - Bressanone 2017
Analisi Matematica 1. 10 agosto 2017

SCHEMA DI SOLUZIONE

(Si prega di comunicare eventuali errori a dagnolo@math.unipd.it)

Attenzione: questo è solo un breve schema di soluzione. In sede d'esame è richiesto che i risultati siano opportunamente giustificati.

(1) (a) La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pm e^{-2}\}$. Poichè la funzione è pari, per simmetria limiteremo lo studio alla semiretta $x \geq 0$. Osserviamo che f si annulla in $x = e^{-\frac{5}{2}}$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow e^{-2} \pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2.$$

Quindi vi è un asintoto verticale $x = e^{-2}$, ed uno orizzontale $y = 2$ per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre f è continua in 0, quindi continua in tutto il dominio.

(b) Sempre per $x > 0$, si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x(2 + \log x)^2},$$

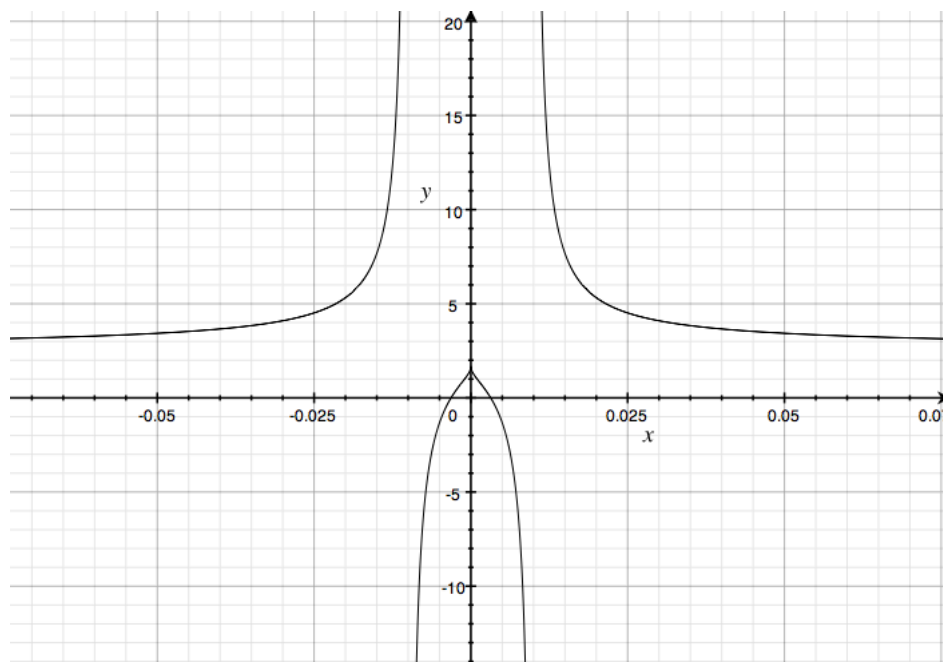
e quindi $f'(x) < 0$. Ne segue che f decresce in $(0, e^{-2})$ ed in $(e^{-2}, +\infty)$. Avendosi $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty$, l'origine è un punto di non derivabilità (cuspidè). Il solo estremo relativo è in 0, che è un massimo relativo.

(c) Ancora per $x > 0$, si ha

$$f''(x) = \frac{\log x + 4}{x^2(2 + \log x)^3}.$$

Quindi f è convessa in $[0, e^{-4}]$ ed in $(e^{-2}, +\infty)$, con flesso in $x = e^{-4}$.

(d) Abbozzo del grafico:



(2) Sviluppando all'ordine 2 per $x \rightarrow 0+$, si ottiene

$$\begin{aligned} 2^x &= 1 + x \log 2 + x^2 \frac{(\log 2)^2}{2} + o(x^2); \\ \sin(\beta x) &= \beta x + o(x^2); \\ x^3 \sin \frac{1}{x} &= o(x^2) \quad (\text{perché } \sin \frac{1}{x} \text{ è limitata}); \\ \log(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2); \\ \cos \sqrt{x} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2); \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{2^x - 1 - \sin(\beta x) + x^3 \sin \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2} \log(x+1) - \cos \sqrt{x}} = \frac{x(\log 2 - \beta) + x^2 \frac{(\log 2)^2}{2} + o(x^2)}{\frac{5}{24}x^2 + o(x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0+$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^x - 1 - \sin(\beta x) + x^3 \sin \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2} \log(x+1) - \cos \sqrt{x}} = \begin{cases} +\infty & \beta < \log 2 \\ \frac{12}{5}(\log 2)^2 & \beta = \log 2 \\ -\infty & \beta > \log 2 \end{cases}$$

(3) (a) L'integrale generalizzato converge se e solo se convergono i due integrali generalizzati

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}(x-9)} dx = - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+9)} dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)} dx.$$

Per $x \rightarrow 0+$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+9)} \sim \frac{1}{9} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)} \sim -\frac{1}{9} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

quindi entrambi gli integrali convergono.

(b) Posto $x = t^2$, $t > 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+9)} dx = \int_0^1 \frac{2}{t^2+9} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-9)} dx &= \int_0^1 \frac{2}{t^2-9} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{3} \log \left| \frac{t-3}{t+3} \right| \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x+9)} dx = \frac{1}{3} \log \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \arctan \frac{1}{3}.$$

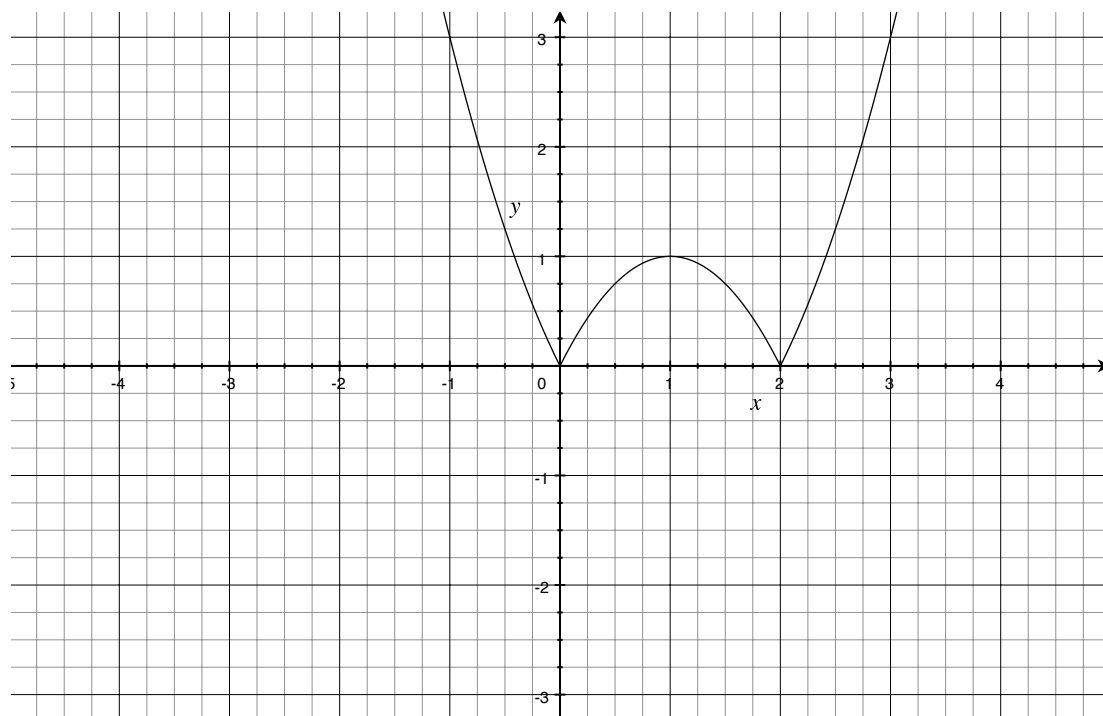
(4) Posto $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\left| (x-1)^2 + y^2 - \left| \frac{2iy}{2} \right|^2 - 1 \right| = |(x-1)^2 - 1| \leq y$$

quindi l'insieme delle soluzioni è costituito dai punti (x, y) del piano appartenenti all'epigrafico (cioè che stanno al di sopra o sul grafico) della funzione

$$|(x-1)^2 - 1| = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{per } x < 0 \text{ o } x > 2 \\ 1 - (x-1)^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

il cui grafico è abbozzato qui:



(4 bis) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del prim'ordine, pertanto, applicando la formula risolutiva, l'integrale generale è della forma

$$\varphi(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} \cos^3 x \, dx$$

con $A'(x) = \tan(x)$.

Poichè

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} x \, dx = -\log |\cos x| + \text{costante},$$

e $\cos x > 0$ in un intorno di 0, posto $A(x) = -\log \cos x$ si trova:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \cos x \int \frac{1}{\cos x} \cos^3 x \, dx \\ &= \cos x \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \cos x \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C \right) \end{aligned}$$

Ponendo $\varphi(0) = 1$, si ottiene $C = 1$.

(4 ter) (a) Deve essere $\frac{x}{y} > 0$ e $\log(\frac{x}{y}) \neq 0$, quindi il dominio di $f(x, y)$ è

$$\{(x, y) : x, y > 0 \text{ oppure } x, y < 0, \text{ e } y \neq x\},$$

(il primo ed il terzo quadrante, esclusi gli assi cartesiani e la diagonale $y = x$) che é aperto e illimitato.

(b) $f(x, y)$ è continua e differenziabile su tutto il dominio, perchè composizione di funzioni derivabili con derivate continue, e $(e, 1)$ vi appartiene, quindi esiste il piano tangente in $(e, 1, f(e, 1) = 1)$.

Il gradiente $\nabla f(x, y)$ calcolato in $(e, 1)$ è

$$\left(\partial_x \frac{1}{\log(\frac{x}{y})}, \partial_y \frac{1}{\log(\frac{x}{y})} \right) (e, 1) = \left(-\frac{1}{\log^2(\frac{x}{y})} \frac{y}{x} \frac{1}{y}, -\frac{1}{\log^2(\frac{x}{y})} \frac{y}{x} \left(-\frac{x}{y^2} \right) \right) (e, 1) = \left(-\frac{1}{e}, 1 \right)$$

e l'equazione del piano tangente è

$$z - 1 = \nabla f(e, 1) \cdot (x - e, y - 1)$$

cioé

$$z = -\frac{1}{e}x + y + 1.$$