

# UNIVERSITÀ DI PADOVA

Laurea triennale in Ingegneria Chimica e dei Materiali, e dell'Energia.  
Canale 2 (ultimo numero di matricola dispari)

## Programma d'esame di Fondamenti di Analisi 2 - A.A. 2019/2020

### Testo consigliato

M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli - *Analisi matematica*. Ed. McGraw-Hill (2011)

---

**1. Limiti e continuità.** TOPOLOGIA IN  $\mathbb{R}^n$ : Norma euclidea, distanza euclidea, disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e triangolare. Intorni sferici (palle). Punti di accumulazione, isolati, interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà. Il simbolo  $\infty$  e i suoi intorni. LIMITI: Limiti di successioni in  $\mathbb{R}^n$ , caratterizzazione di un insieme chiuso tramite successioni. Limiti di funzioni di  $n$  variabili e di funzioni a valori vettoriali, loro proprietà. Uso di restrizioni e delle coordinate polari per il calcolo di limiti. FUNZIONI CONTINUE: Continuità per funzioni di  $n$  variabili e per funzioni a valori vettoriali, proprietà elementari delle funzioni continue. Insiemi aperti/chiusi definiti da disequazioni con funzioni continue. Insiemi compatti e teorema di Weierstrass. Insiemi connessi e teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. L'immagine tramite una funzione continua di un insieme connesso/compatto è un insieme connesso/compatto. Grafico, insiemi di livello, studio del segno per funzioni scalari di due variabili.

**2. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.** FUNZIONI SCALARI DI PIÙ VARIABILI: Derivate direzionali e parziali, gradiente. Funzioni differenziabili e loro proprietà, formula del gradiente. Piano tangente a un grafico. Direzione di massima pendenza. Teorema del differenziale totale. Teorema del valor medio, funzioni definite su un connesso con gradiente nullo sono costanti. Derivate di ordine 2, matrice Hessiana, teorema di Schwarz e sue conseguenze. Formula di Taylor di ordine 2 con i resti di Lagrange e di Peano. MASSIMI E MINIMI: Estremi liberi: teorema di Fermat. Forme quadratiche definite e semidefinite positive e negative, forme indefinite: caratterizzazione mediante gli autovalori o con i minori principali. Determinazione della natura dei punti critici mediante la matrice Hessiana. Matrici Hessiane semidefinite positive/negative in un intorno convesso. FUNZIONI A VALORI VETTORIALI: differenziabilità e matrice Jacobiana. Derivazione di funzioni vettoriali composte (regola della catena).

**3. Curve e integrali curvilinei.** CURVE: Curve semplici, chiuse, di Jordan, in forma polare e cartesiana. Punti regolari, curve regolari a tratti. Versore e retta tangente. Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve di classe  $C^1$  e formula per la lunghezza. Curve (anti-)equivalenti e indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro. INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE: Integrali curvilinei di prima specie, indipendenza dell'integrale curvilineo di prima specie dal cambiamento di parametro. Ascissa curvilinea e sue proprietà. Versore normale. INTEGRALI CURVILINEI DI SECONDA SPECIE: campi vettoriali, integrali curvilinei di seconda specie, interpretazione come lavoro di un campo vettoriale di forze. Proprietà e comportamento rispetto a curve (anti-)equivalenti. CAMPI CONSERVATIVI, IRROTAZIONALI: Campi conservativi e potenziali, loro proprietà. Caratterizzazione dei campi conservativi su un insieme connesso con gli integrali di seconda specie. Rotore, rot grad = 0, campi irrotazionali, loro relazione con i campi conservativi. Insiemi semplicemente connessi. Equivalenza tra campi irrotazionali e campi conservativi su insiemi semplicemente connessi (lemma di Poincaré). Forme differenziali, forme chiuse, esatte, differenziale di una funzione.

**4. Funzioni implicite ed estremi vincolati.** FUNZIONI IMPLICITE: Teorema di Dini. Gli insiemi di livello di una funzione a due variabili sono curve vicino ai punti regolari. Ortogonalità del gradiente di una funzione a due variabili rispetto alle sue curve di livello. Teorema di Dini per i sistemi. DIFFEOMORFISMI: Diffeomorfismi, teorema della funzione inversa. Caratterizzazione dei diffeomorfismi tramite il determinante Jacobiano. Trasformazioni di coordinate: polari, cilindriche, sferiche. VINCOLI: Vincoli, punti regolari, vincoli regolari  $k$ -dimensionali. Estremi vincolati: vincoli esplicitabili tramite una parametrizzazione. Punti critici vincolati, funzioni Lagrangiane, metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le curve di livello di una funzione a due variabili sono tangenti al vincolo nei punti critici vincolati.

**5. Integrali multipli.** INTEGRALI DOPPI SU UN RETTANGOLO: Suddivisioni, definizione di integrale e sue proprietà (linearità, monotonia, disuguaglianza triangolare e della media). Integrabilità delle funzioni continue, formule di riduzione (Fubini). INTEGRALI DOPPI - CASO GENERALE: Funzioni integrabili, insiemi misurabili e di misura nulla, loro caratterizzazione. Grafici di funzioni integrabili su intervalli, curve regolari a tratti e frontiere di insiemi misurabili hanno misura nulla. Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione (Fubini) su domini semplici. Additività dell'integrale rispetto al dominio, teorema della media integrale. Teorema del cambiamento di variabili. Area di una regione compresa tra curve in forma polare. Integrali di funzioni con simmetrie. INTEGRALI TRIPLI: Definizione di funzione integrabile, insiemi misurabili e loro caratterizzazione. Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione per fili e per strati. Teorema del cambiamento di variabili. Integrali di funzioni radiali. Teorema di Guldino per il volume di un solido di rotazione. Baricentro di un insieme misurabile, baricentro di un settore circolare. INTEGRALI GENERALIZZATI: Insiemi misurabili illimitati. Integrabilità di funzioni non necessariamente limitate su domini non necessariamente limitati, formula di riduzione per funzioni non negative. Integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile.

**6. Superfici e integrali di superficie.** SUPERFICI IN FORMA PARAMETRICA: Parametizzazioni, parametri. Superfici cartesiane, superfici di rotazione. Punti interni, bordo di una superficie, superfici senza bordo. Punti regolari, vettori tangenti, piano tangente. Versori normali alla superficie. Superfici in forma implicita (definite da un'equazione). Superfici orientabili. Superficie regolari a tratti, orientazione indotta sul bordo. INTEGRALI SUPERFICIALI: Definizione di area di una superficie e di integrale superficiale, sue motivazioni. Superfici composte. Teorema di Guldino per l'area di una superficie di rotazione. Baricentro di una curva. FLUSSI: Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; superficie chiuse e flusso uscente. Flusso uscente da una regione del piano.

**7. I teoremi della divergenza e del rotore.** TEOREMA DEL ROTORE: Teorema del rotore (o di Stokes) in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathbb{R}^2$ . Domini regolari a tratti nel piano e formule di Gauss-Green, applicazioni al calcolo di aree. TEOREMA DELLA DIVERGENZA Divergenza, campi solenoidali,  $\text{div rot} = 0$ , potenziale vettore. Lemma di Poincaré. Domini regolari a tratti nello spazio, normale esterna. Teorema della divergenza (o di Gauss) in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathbb{R}^2$ .

**6. Equazioni differenziali ordinarie.** GENERALITÀ: curve integrali, equazioni autonome, in forma normale. Riduzione di un'equazione di ordine  $n$  in forma normale ad un sistema del primo ordine. PROBLEMA DI CAUCHY: Problema di Cauchy per sistemi del primo ordine in forma normale. Teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale). EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE 1: Integrale generale dell'equazione omogenea. Soluzione particolare di equazioni non omogenee: metodo di variazione della costante. SISTEMI LINEARI: Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy. Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni dei sistemi omogenei. Matrice Wronskiana (risolvente) e ricerca di soluzioni particolari di sistemi non omogenei

col metodo di variazione delle costanti. Polinomio caratteristico e integrale generale di un sistema omogeneo a coefficienti costanti (caso  $n \times n$  solo per autovalori distinti, reali o complessi; caso  $2 \times 2$ , tutti i casi). EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE  $n$  A COEFFICIENTI COSTANTI: Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea. Polinomio caratteristico e integrale generale dell'equazione omogenea. Soluzione particolare di equazioni non omogenee: metodo di variazione delle costanti e metodo di somiglianza (coefficienti indeterminati). Principio di sovrapposizione per equazioni non omogenee. Soluzione di sistemi  $2 \times 2$  omogenei a coefficienti costanti mediante riduzione a un'equazione scalare di ordine 2 (eliminazione).

---