

Note per il corso di

# **MECCANICA RAZIONALE**

(Corso di Laurea in Ingegneria Civile)

---

A.A. 2019/2020

A. Ponno

19 dicembre 2019



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla meccanica newtoniana</b>	<b>5</b>
1.1	Concetti di base . . . . .	5
1.2	Principi della dinamica . . . . .	8
1.3	Esempi di dinamica del punto . . . . .	13
1.3.1	Punto materiale nel campo di gravità (in assenza di attrito) . . . . .	13
1.3.2	Punto attaccato a una molla ideale . . . . .	14
1.4	Punto soggetto a forza centrale . . . . .	16
1.4.1	Analisi qualitativa del moto radiale . . . . .	19
1.5	Esercizi . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Il Problema dei due corpi</b>	<b>23</b>
2.1	Baricentro e spostamento relativo . . . . .	23
2.2	Leggi di conservazione generali . . . . .	24
2.3	Equazione polare delle orbite kepleriane . . . . .	26
2.4	Leggi di Keplero . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>33</b>
3.1	Concetti di base . . . . .	33
3.1.1	EDO autonome del primo ordine . . . . .	34
3.1.2	EDO conservative del secondo ordine . . . . .	36
3.2	EDO lineari a coefficienti costanti . . . . .	37
3.2.1	Proprietà generali . . . . .	37
3.2.2	Soluzione generale dell'omogenea . . . . .	38
3.2.3	Soluzione particolare . . . . .	40
3.3	Esercizi . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Piccole oscillazioni di sistemi di punti materiali</b>	<b>43</b>
4.1	Oscillatore armonico smorzato e forzato . . . . .	43
4.1.1	Comportamento asintotico generale . . . . .	46
4.1.2	Battimenti e risonanza . . . . .	47
4.2	Piccoli spostamenti di sistemi di punti attorno all'equilibrio . . . . .	49
4.3	Studio del sistema lineare . . . . .	52
4.4	Esercizi . . . . .	55

<b>5</b>	<b>Introduzione ai vincoli</b>	<b>57</b>
5.1	Meccanica del punto vincolato . . . . .	57
5.2	Attrito statico . . . . .	58
5.3	Attrito dinamico . . . . .	61
5.4	Reazioni nei punti di “fissaggio” . . . . .	62
5.5	Reazioni in punti mobili di ancoraggio . . . . .	62
5.6	Reazioni di appoggio . . . . .	63
5.7	Esercizi . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Equazioni cardinali</b>	<b>65</b>
6.1	Prima equazione cardinale . . . . .	65
6.2	Seconda equazione cardinale . . . . .	67
6.3	Uso delle equazioni cardinali . . . . .	69
6.4	Equazioni cardinali della statica . . . . .	72
6.5	Sistemi di forze applicate . . . . .	73
6.6	Solidi in appoggio ideale . . . . .	75
6.7	Vincoli ideali: principio dei lavori virtuali . . . . .	77
6.8	Esercizi . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Cinematica relativa e rigida</b>	<b>81</b>
7.1	Legge di Newton in un sistema non inerziale . . . . .	81
7.2	Forze apparenti e loro effetti . . . . .	85
7.3	Dinamica del corpo rigido libero . . . . .	86
7.4	Forma e proprietà della matrice di inerzia . . . . .	89

# Capitolo 1

## Introduzione alla meccanica newtoniana

### 1.1 Concetti di base

La meccanica Newtoniana è la scienza che studia il movimento dei corpi quando siano specificate le interazioni tra di essi. La nozione più elementare di corpo è quella di *punto materiale*. Per punto materiale si intende un qualsiasi corpo le cui dimensioni siano trascurabili (cioè significativamente più piccole) rispetto a quelle caratteristiche del problema. Ad esempio, una nave in mezzo al mare può essere (e di fatto viene) considerata un punto materiale se si deve determinare la sua posizione, posizione che viene concretamente determinata tramite GPS da due numeri: la latitudine e la longitudine. Chiaramente, la stessa nave non può essere trattata come un punto materiale durante le manovre in porto. Allo stesso modo, i corpi celesti soggetti alla legge di gravitazione newtoniana possono essere trattati come puntiformi se si vuole caratterizzarne il moto orbitale (ad esempio il moto di rivoluzione della terra intorno al sole o della luna intorno alla terra; notare che le orbite ellittiche nei due casi hanno semiassi maggiori molto più grandi dei raggi dei corpi coinvolti). D'altra parte, se ad esempio si vogliono studiare le maree terrestri (dovute all'azione gravitazionale congiunta di Luna e Sole sulla Terra), la Terra deve essere trattata come uno sferoide fluido, sebbene il fenomeno fisico sia dovuto alla stessa legge di gravitazione che causa i moti orbitali.

I corpi (approssimabili o meno come punti materiali) sono caratterizzati da alcune grandezze fisiche intrinseche, fondamentali nella determinazione del moto del punto stesso. La prima e più importante di queste è la *massa*, definita da Newton<sup>1</sup> come la quantità di materia in esso contenuta. Di fatto una tale definizione non spiega cosa è la massa, ma solo cosa è il rapporto tra le masse di due corpi. Oggi sappiamo che la materia ha struttura discreta ed è costituita, nello stato ordinario (cioè aggregato: solido liquido o gassoso), da atomi e da molecole (aggregati di atomi). L'atomo a sua volta ha una struttura semplice: un nucleo centrale costituito da protoni e neutroni "circondato" da tanti elettroni quanti sono i protoni nel nucleo. La massa di un elettrone è di circa  $10^{-27}$  grammi, quella del protone e del neutrone è tre ordini di grandezza maggiore, circa  $1.6 \cdot 10^{-24}$  grammi. Ne segue che la massa degli atomi, delle molecole e dei

---

<sup>1</sup>"Principi Matematici di Filosofia Naturale", parte generale, Definizione I.

corpi macroscopici è determinata quasi interamente dalla somma delle masse dei protoni e dei neutroni contenuti nei nuclei degli atomi costituenti. Il legame tra la massa dei nucleoni (protoni e neutroni) e la massa dei corpi macroscopici è determinato dal numero di Avogadro  $N_A$ , definito come il numero di molecole contenute in una mole di qualsiasi sostanza. Se una certa sostanza ha numero di massa molecolare (il numero di nucleoni di una singola molecola) pari ad  $A$ , una mole di tale sostanza consiste in  $A$  grammi. La massa della singola molecola è invece data da  $Am_u$ , dove  $m_u = 1.66 \cdot 10^{-24} gr$  è la così detta unità di massa atomica (la massa media di un nucleone “legato”). Dunque risulta  $N_A = (A \text{ gr}) / (Am_u) = 10^{24} / 1.66 = 6.02 \cdot 10^{23}$ , ovvero il numero di Avogadro è esattamente il reciproco dell’unità di massa atomica (espressa in grammi). Dunque una moderna definizione di massa richiede di spiegare cosa è la massa delle particelle elementari e perché alcune particelle hanno massa e altre no. Tali quesiti sono oggetto di ricerca attuale in fisica<sup>2</sup>.

Un’altra proprietà intrinseca delle particelle elementari e quindi di tutti i corpi è la **carica elettrica**. La carica di un corpo è determinata dalla somma (con segno) delle cariche della particelle elementari che lo costituiscono. In particolare, gli elettroni hanno carica negativa  $-e$  e i protoni hanno carica  $+e$  ( $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$  unità elettrostatiche), mentre i neutroni hanno carica elettrica nulla. Dunque gli atomi sono globalmente neutri, così come le molecole. I corpi macroscopici, a meno che non siano soggetti a trasferimenti di cariche elettriche in eccesso o difetto, sono globalmente neutri, con buonissima approssimazione. Questa è la ragione per cui a livello macroscopico l’interazione elettrostatica “a distanza” tra i corpi è normalmente irrilevante rispetto a quella gravitazionale (si sottolinea “a distanza” perché nel caso di contatto tra corpi le interazioni elettrostatiche danno luogo a forze macroscopicamente rilevanti; vedi più avanti). Cosa sia la carica elettrica, perché alcune particelle hanno carica e altre no, perché la carica occorra in natura solo in multipli di carica dell’elettrone o frazioni specifiche di questa sono di nuovo quesiti oggetto di ricerca attuale nella fisica delle particelle elementari.

La **posizione** di un punto materiale che si muove nello spazio euclideo  $D$ -dimensionale  $\mathbb{E}^D$  ( $D = 1, 2, 3$ ) è data assegnando una funzione  $\gamma : t \mapsto \vec{x}(t)$  che ad ogni istante di tempo  $t$  che varia in un dato intervallo reale associa il vettore  $\vec{x}(t) \in \mathbb{E}^D$ , posizione del punto al tempo  $t$ . Tale funzione è detta “curva” nello spazio  $D$ -dimensionale. In meccanica ci si riferisce a tale curva anche come alla “legge oraria” del punto. La velocità media del punto tra gli istanti di tempo  $t$  e  $t + \Delta t$  è definita dalla formula

$$\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \equiv \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}.$$

È naturale allora considerare il limite di tale espressione per  $\Delta t \rightarrow 0$  che, se esiste, definisce la **velocità** (istantanea) del punto materiale al tempo  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Si osservi che  $\vec{v}$ ,  $d\vec{x}/dt$  e  $\dot{\vec{x}}$  sono tutte notazioni equivalenti per la stessa quantità, definita come il limite della velocità media. Si vede facilmente che il vettore  $\vec{v}(t)$ , se non è identicamente nullo, è

<sup>2</sup>Vedi ad esempio [http://en.wikipedia.org/wiki/Higgs\\_boson](http://en.wikipedia.org/wiki/Higgs_boson); su tale tematica è stato assegnato il premio Nobel per la Fisica nel 2013.

tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $\vec{x}(t)$ . Concretamente, il calcolo di  $\vec{v}(t)$  si effettua per componenti. Infatti, in dimensione  $D = 3$  ad esempio, poiché  $\vec{x}(t) = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3 = \sum_{j=1}^3 x_j(t)\hat{e}_j$  ( $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  ed  $\hat{e}_3$  sono i versori della base canonica di  $\mathbb{E}^3$ ), si ha

$$\vec{v}(t) = \sum_{j=1}^3 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_j(t)}{\Delta t} \hat{e}_j = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j(t) \hat{e}_j = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Si procede analogamente in dimensione  $D = 2, 1$ .

In questo modo, data la curva  $\gamma$ , resta definita un'altra funzione a valori vettoriali  $t \mapsto \vec{v}(t)$ . Si può dunque considerare il tasso di variazione istantanea della velocità, cioè l'**accelerazione** (istantanea) del punto materiale al tempo  $t$ :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}.$$

Si faccia caso alle notazioni equivalenti che verranno usate per indicare l'accelerazione:  $\vec{a}$ ,  $d\vec{v}/dt$ ,  $\dot{\vec{v}}$  o, con riferimento alla posizione:  $d^2\vec{x}/dt^2$  e  $\ddot{\vec{x}}$ .

**Esempio 1.1.** Moto rettilineo uniforme:  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$ , con  $\vec{x}_0$  e  $\vec{v}_0$  vettori costanti (indipendenti dal tempo). In questo caso si vede facilmente (farlo e convincersene in tutti i modi possibili) che  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ , cioè la velocità istantanea del punto è indipendente dal tempo e pari a  $\vec{v}_0$ . Inoltre  $\vec{a}(t) = \vec{0}$ , cioè l'accelerazione è identicamente nulla. Vedremo che tale tipo di moto caratterizza la dinamica dei punti materiali isolati rispetto a particolari sistemi di riferimento.

**Esempio 1.2.** Moto uniformemente accelerato:  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2$ , con  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{v}_0$  e  $\vec{a}_0$  costanti. In questo caso si verifica facilmente (farlo) che  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t$  e cioè la velocità varia linearmente nel tempo. L'accelerazione è invece  $\vec{a}(t) = \vec{a}_0$ , cioè costante. Vedremo che compie questo tipo di moto un punto materiale nel campo di gravità oppure un punto materiale carico in un campo elettrico uniforme e costante.

**Esempio 1.3.** Moto elicoidale:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}.$$

Si noti che la proiezione del moto sul piano  $x_1, x_2$  è di tipo circolare uniforme:  $x_1^2(t) + x_2^2(t) = R^2$  e l'angolo  $\theta(t) = \omega t$  avanza a velocità costante, perché  $\dot{\theta} = \omega$ ; il periodo di tale moto circolare è  $2\pi/\omega$ . La proiezione del moto lungo l'asse  $x_3$  è invece di tipo rettilineo uniforme:  $x_3(t) = v_0 t$ ,  $\dot{x}_3 = v_0$ . Dunque il punto materiale gira attorno all'asse  $x_3$  mentre sale con velocità costante, percorrendo un'elica di passo  $x_3(2\pi/\omega) - x_3(0) = 2\pi v_0/\omega$ . La velocità e l'accelerazione del moto elicoidale sono rispettivamente

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R \sin(\omega t) \\ \omega R \cos(\omega t) \\ v_0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Si noti che la proiezione di  $\vec{v}$  sul piano  $x_1, x_2$  è ortogonale alla proiezione della posizione  $\vec{x}$ , mentre la proiezione dell'accelerazione  $\vec{a}$  è antiparallela a quest'ultima. Si muove di moto elicoidale una particella carica in un campo magnetico uniforme e costante.

## 1.2 Principi della dinamica

Nel seguito per sistema di riferimento si intenderà un sistema di coordinate fissato, tipicamente solidale a qualche corpo, che serva a misurare la posizione dei punti materiali nello spazio fisico. Si noti che nella pratica, non sempre tale sistema è costituito da una terna di assi mutuamente ortogonali. Ad esempio, per misurare la posizione di un punto (aereo, satellite ecc..) rispetto alla Terra si usa un sistema di linee coordinate ortogonali ma curvilinee: la latitudine, la longitudine e l'altitudine o quota (fare un disegno e rendersene conto).

I Principi della dinamica del punto materiale e dei sistemi di punti materiali, che vengono enunciati e commentati nel seguito, sono le ipotesi fondamentali alla base di tutta la meccanica e poggiano tutti, in ultima analisi, su evidenze sperimentali.

**Principio 1** (principio di inerzia). *Esiste almeno un sistema di riferimento rispetto al quale un punto materiale isolato ha accelerazione nulla.*

Un modo equivalente di formulare il precedente Principio è di dire che esiste un riferimento privilegiato nel quale un punto isolato persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Abbiamo visto sopra che i moti rettilinei uniformi hanno accelerazione nulla; vedremo sotto che vale anche il viceversa: i moti con accelerazione nulla sono rettilinei uniformi.

Per punto isolato si immagina, a livello ideale, di avere un solo punto nell'Universo. In pratica si considera un oggetto sufficientemente lontano da altri oggetti o sistemi con i quali esso possa interagire. Un buon esempio è quello di un satellite per esplorazioni spaziali che viaggia nello spazio, sufficientemente lontano da eventuali corpi celesti. In tale caso il riferimento privilegiato in questione è quello solidale con le stelle molto lontane, le così dette "stelle fisse". Nella pratica, la possibilità di considerare un corpo approssimativamente isolato si basa sul fatto che tutte le interazioni fondamentali note in natura decadono al crescere della distanza tra i corpi stessi.

Osserviamo che se esiste un riferimento privilegiato che soddisfa il primo Principio, allora ne esistono infiniti: tutti quelli che si muovono di moto rettilineo e uniforme rispetto ad esso. Infatti, se  $S$  è il sistema privilegiato ed  $S'$  è un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad  $S$  con velocità  $\vec{v}_0$  costante e arbitraria, allora le posizioni  $\vec{x}(t)$  rispetto ad  $S$  e  $\vec{x}'(t)$  rispetto ad  $S'$  di un punto materiale sono legate tra loro dalla relazione

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{v}_0 t \tag{1.2}$$

(si osservi che, senza perdita di generalità, si scelgono le origini  $O$  di  $S$ ,  $O'$  di  $S'$  e lo zero dei tempi in modo tale che  $O = O'$  per  $t = 0$ ). Ne segue, derivando due volte la (1.2), che  $\vec{a}' = \vec{a}$



e dunque se  $\vec{a} = \vec{0}$  anche  $\vec{a}' = \vec{0}$ . La classe di equivalenza dei sistemi che si muovono di moto rettilineo e uniforme uno rispetto all'altro e che contiene il sistema privilegiato di cui al primo principio è detta classe dei **sistemi di riferimento inerziali**.

Per un punto materiale non isolato, che sia cioè in presenza di un sistema  $\mathcal{S}$  di altri punti o corpi estesi, si suppone che l'azione del sistema su di esso si espliciti tramite un vettore  $\vec{F}$  che chiamiamo **forza** esercitata da  $\mathcal{S}$  sul punto materiale, o più semplicemente forza agente sul punto materiale. Tale definizione di forza è certamente vaga, ed è completata dal seguente Principio fondamentale.

**Principio 2** (legge di Newton). *In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale di massa  $m$ , non isolato e soggetto ad una forza  $\vec{F}$ , si muove secondo la legge*

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}} . \quad (1.3)$$

In pratica la forza  $\vec{F}$  è quel vettore che, se noto, permette di determinare il moto del punto materiale risolvendo l'equazione (1.3).

**Osservazione 1.1.** *La legge di Newton (1.3) resta valida (si verifica a posteriori) in sistemi di riferimento non inerziali.*

**Esempio 1.4.** *Supponiamo che sia assegnata la funzione  $t \mapsto \vec{F}(t)$ , cioè che la forza agente sul punto sia nota ad ogni istante di tempo. Allora, integrando l'equazione di Newton  $m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$  rispetto al tempo tra 0 e  $t$  si ottiene (verificarlo)*

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F}(s) \, ds , \quad (1.4)$$

e integrando ancora una volta (tra 0 e  $t$ ) si determina la posizione:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^s \vec{F}(r) \, dr . \quad (1.5)$$

Si osservi che nel caso particolare di forza  $\vec{F}$  identicamente nulla si ottiene che un punto con accelerazione nulla si muove di moto rettilineo e uniforme. Se invece  $\vec{F} = \vec{F}_0$  è costante, cioè indipendente da  $t$ , si ottiene un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante  $\vec{F}_0/m$  (verificarlo).

In generale la forza  $\vec{F}$  non è nota come funzione del tempo, ma, tipicamente, è nota la sua dipendenza dalla posizione, dalla velocità del punto e dal tempo. In tale caso l'equazione di Newton (1.3) non si risolve banalmente come nell'esempio precedente con due integrazioni.

**Osservazione 1.2.** *L'integrazione in (1.4) and (1.5) va intesa nell'usuale senso di Riemann-Cauchy: data una funzione  $s \mapsto \vec{u}(s)$ , definita nell'intervallo  $[0, t]$ , continua in tale intervallo e a valori vettoriali in  $\mathbb{E}^D$ , si definisce il suo integrale sull'intervallo di definizione come il limite della corrispondente somma di Riemann-Cauchy, ovvero*

$$\int_0^t \vec{u}(s) \, ds \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \vec{u}(nt/N) \frac{t}{N} .$$

Usando la decomposizione di  $\vec{u}(s)$  in una qualsiasi base fissata di  $\mathbb{E}^D$  (indipendente da  $s$ ), ad esempio la base canonica  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_D$ , facendo uso della definizione appena data si ottiene

$$\int_0^t \vec{u}(s) \, ds = \sum_{j=1}^D \hat{e}_j \int_0^t u_j(s) \, ds = \begin{pmatrix} \int_0^t u_1(s) \, ds \\ \vdots \\ \int_0^t u_D(s) \, ds \end{pmatrix},$$

ovvero l'integrale si calcola per componenti.

Una volta stabilite le prime ipotesi di lavoro per la dinamica di un singolo punto materiale, si deve passare a considerare i sistemi di punti materiali. Il caso interessante più elementare è ovviamente quello di un sistema isolato costituito da due punti materiali  $P$  e  $Q$  di massa rispettivamente  $m_P$  ed  $m_Q$  in un sistema di riferimento inerziale. Dal secondo Principio segue che per entrambi i punti deve valere la legge di Newton (1.3), ovvero

$$\begin{cases} m_P \vec{a}_P = \vec{F}_{PQ} \\ m_Q \vec{a}_Q = \vec{F}_{QP} \end{cases}, \quad (1.6)$$

dove  $\vec{F}_{PQ}$  è la forza che  $Q$  esercita su  $P$ , mentre  $\vec{F}_{QP}$  è la forza che  $P$  esercita su  $Q$ . L'ipotesi di lavoro fondamentale, contenuta nel Principio che segue, è che le due forze non possono essere indipendenti.

**Principio 3** (principio di azione e reazione). *Dati due punti materiali isolati  $P$  e  $Q$ , in un sistema di riferimento inerziale, la forza che  $Q$  esercita su  $P$  è uguale e contraria alla forza che  $P$  esercita su  $Q$ , ed è diretta lungo la retta per  $P$  e  $Q$ , cioè:*

1.  $\boxed{\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}}$  ;
2.  $\boxed{\vec{F}_{PQ} \parallel \overrightarrow{PQ}}$  .

Il terzo Principio della dinamica, appena formulato, si basa sul fatto che le due proprietà che lo caratterizzano sono verificate dalle due forze fondamentali che agiscono su corpi massivi e/o carichi, cioè la forza di attrazione gravitazionale (scoperta da Newton) e la forza di interazione elettrostatica (scoperta da Coulomb). Infatti, dati due punti materiali  $P$  e  $Q$  di massa  $m_P$  ed  $m_Q$ , carica  $q_P$  e  $q_Q$ , e posizione  $\vec{x}_P$  e  $\vec{x}_Q$ , la forza di attrazione gravitazionale che  $Q$  esercita su  $P$  è data da

$$\vec{F}_{PQ}^{(gr)} = -G \frac{m_P m_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^3} (\vec{x}_P - \vec{x}_Q), \quad (1.7)$$

dove  $G$  è una costante, detta "costante di gravitazione universale", il cui valore dipende dal sistema di unità di misura. La forza elettrostatica che  $Q$  esercita su  $P$  è invece data da

$$\vec{F}_{PQ}^{(el)} = k \frac{q_P q_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|^3} (\vec{x}_P - \vec{x}_Q), \quad (1.8)$$

dove anche  $k$  è una costante dipendente dalle unità di misura scelte. Si noti che la forza (1.8) è repulsiva per cariche di segno uguale ( $q_P q_Q > 0$ ) e attrattiva per cariche di segno opposto

( $q_P q_Q < 0$ ). Osserviamo che le altre due interazioni fondamentali note in Natura, ovvero l'interazione nucleare debole (responsabile dei fenomeni radioattivi) e quella forte (responsabile della struttura interna dei protoni e dei neutroni e della coesione nucleare), sono sostanzialmente non modellizzabili in termini di forze, nonché irrilevanti sulle scale macroscopiche della meccanica classica.

Una volta stabilite le ipotesi relative alle coppie di punti, si deve passare a trattare i sistemi isolati costituiti da  $n$  ( $\geq 2$ ) punti materiali. In questo caso sappiamo che per ogni punto del sistema vale la legge di Newton (1.3). Dunque

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.9)$$

ovvero, per esteso,

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 \\ \vdots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n \end{cases} \quad (1.10)$$

(si noti che in questo caso i punti materiali del sistema in esame sono numerati da 1 a  $n$ ). La seguente ipotesi sulla forma della forza  $\vec{F}_i$  esercitata sull' $i$ -esimo punto dai rimanenti  $n - 1$  ha carattere essenzialmente sperimentale.

**Principio 4** (principio di sovrapposizione delle forze). *In un sistema di riferimento inerziale, dato un sistema isolato costituito da  $n$  punti materiali, la forza che agisce sull' $i$ -esimo punto è la somma delle forze che ognuno dei restanti  $n - 1$  punti esercita su di esso:*

$$\boxed{\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}}, \quad (1.11)$$

dove ognuna delle  $\vec{F}_{ij}$  (la forza che il  $j$ -esimo punto esercita sull' $i$ -esimo) soddisfa il principio di azione e reazione:  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  e  $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{x}_i - \vec{x}_j$ .

La (1.11) si può riscrivere  $\vec{F}_P = \sum_{Q:Q \neq P} \vec{F}_{PQ}$ , essendo  $P$  il punto di riferimento e  $Q$  ogni altro punto del sistema diverso da  $P$ . Tale espressione vale per anche per sistemi costituiti da un numero infinito (numerabile o meno) di punti materiali. Ogni  $\vec{F}_{PQ}$  deve soddisfare le due condizioni del terzo principio.

**Esempio 1.5.** *Le equazioni di Newton per il sistema "Terra", "Luna", "Sole", pensato come isolato, sono*

$$\begin{cases} m_T \vec{a}_T = -Gm_T m_S \frac{\vec{x}_T - \vec{x}_S}{|\vec{x}_T - \vec{x}_S|^3} - Gm_T m_L \frac{\vec{x}_T - \vec{x}_L}{|\vec{x}_T - \vec{x}_L|^3} \\ m_L \vec{a}_L = -Gm_L m_S \frac{\vec{x}_L - \vec{x}_S}{|\vec{x}_L - \vec{x}_S|^3} - Gm_L m_T \frac{\vec{x}_L - \vec{x}_T}{|\vec{x}_L - \vec{x}_T|^3} \\ m_S \vec{a}_S = -Gm_S m_T \frac{\vec{x}_S - \vec{x}_T}{|\vec{x}_S - \vec{x}_T|^3} - Gm_S m_L \frac{\vec{x}_S - \vec{x}_L}{|\vec{x}_S - \vec{x}_L|^3} \end{cases} .$$

L'ipotesi generale sulla struttura delle forze nei sistemi meccanici è la seguente.

**Principio 5** (principio di determinismo newtoniano). *In un sistema di riferimento qualsiasi, le forze agenti su ciascuno degli  $n$  punti materiali di un dato sistema sono funzioni note delle posizioni e delle velocità di tutti i punti del sistema, ed eventualmente del tempo, e non dipendono da derivate della posizione di ordine maggiore o uguale al secondo:*

$$\boxed{\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n; t)} \quad , \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Questa ipotesi, in linguaggio moderno, equivale ad assumere che, nota la dipendenza delle forze dai suoi argomenti, le equazioni di Newton  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , costituiscono un sistema di *equazioni differenziali ordinarie* che può essere risolto in linea di principio per determinare la posizione di tutti i punti del sistema a qualsiasi istante di tempo in un certo intervallo  $I$  (non necessariamente infinito), se sono assegnate le posizioni e le velocità di tutti i punti ad un fissato istante di tempo in  $I$ .

**Esempio 1.6.** *Si consideri in dimensione uno l'equazione  $m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ . Supponiamo note le quantità  $x(t)$  e  $v(t) = \dot{x}(t)$  ad un fissato istante di tempo  $t$ . Allora, se  $\Delta t$  è sufficientemente piccolo, si può espandere  $x(t + \Delta t)$  ad un ordine finito qualsiasi, ottenendo*

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{m}f \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{1}{m} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} v(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial v} f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] \frac{(\Delta t)^3}{6} + O((\Delta t)^4) , \end{aligned}$$

dove si sottintende che  $f$  e le sue derivate parziali sono calcolate in  $(x(t), v(t), t)$ . Dunque la sola conoscenza di posizione e velocità iniziali e l'uso ripetuto dell'equazione per il calcolo delle derivate successive sono sufficienti per calcolare la posizione ad un istante precedente o successivo vicino a quello iniziale. Si noti che la velocità approssimata si ottiene dallo sviluppo di cui sopra scrivendo il rapporto incrementale  $[x(t + \Delta t) - x(t)]/\Delta t$ . Quella appena esposta è anche l'idea alla base dei metodi di integrazione numerica delle equazioni di Newton.

L'ulteriore ipotesi sulla struttura delle forze in sistemi di punti isolati riguarda le proprietà di invarianza rispetto a certe trasformazioni.

**Principio 6** (principio di relatività galileiana). *Dato un sistema isolato di  $n$  punti materiali in un sistema di riferimento inerziale, le sue equazioni di Newton  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$  sono invarianti rispetto alle seguenti trasformazioni:*

1.  $\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \vec{\xi}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), per ogni  $\vec{\xi}$  (traslazione spaziale arbitraria);
2.  $\vec{x}_i \mapsto R\vec{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), per ogni matrice di rotazione  $R$  (rotazione spaziale arbitraria);
3.  $t \mapsto t + t_0$ , per ogni  $t_0$  (traslazione temporale);
4.  $\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i - \vec{V}t$ , per ogni  $\vec{V}$  (cambio di sistema di riferimento inerziale).

**Osservazione 1.3.** Si può dimostrare che la conseguenza di tale Principio è che le forze  $\vec{F}_i$  possono dipendere solo dalle mutue differenze delle posizioni e delle velocità dei punti materiali e non possono dipendere esplicitamente dal tempo.

**Esempio 1.7.** Si consideri l'equazione di Newton per un singolo punto materiale:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) .$$

Il sesto Principio implica, in questo caso,  $\vec{F} = 0$  identicamente, in accordo con il primo Principio (svolgere in dettaglio).

Risulta che buona parte della fisica della materia si basa su modelli di forze che dipendono dalle posizioni dei punti materiali e non dalle loro velocità. Il modello base di sistema di punti materiali isolato in un sistema di riferimento inerziale è descritto dalle equazioni di Newton

$$m_p \vec{a}_P = \vec{F}_P = \sum_{Q:Q \neq P} \vec{F}_{PQ} ,$$

dove

$$\vec{F}_{PQ} = \Phi(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} , \quad (1.12)$$

e  $\Phi(r)$  è una assegnata funzione di una variabile reale ( $r > 0$ ). Le forze fondamentali (1.7) e (1.8) sono della forma (1.12), con  $\Phi(r) = -Gm_P m_Q / r^2$  e  $\Phi(r) = kq_p q_Q / r^2$ , rispettivamente.

## 1.3 Esempi di dinamica del punto

Abbiamo già visto che i casi di forza costante (indipendente da  $\vec{x}$ ,  $\vec{v}$  e  $t$ ), in particolare nulla, si risolvono come caso particolare della (1.5) con forza  $\vec{F} = \vec{F}_0$  assegnata. Per  $\vec{F}_0 = \vec{0}$  si ha moto rettilineo e uniforme, mentre per  $\vec{F}_0 \neq \vec{0}$  si ha moto uniformemente accelerato con accelerazione costante  $\vec{F}_0/m$ . Seguono due esempi fisici di quest'ultimo caso e lo studio della dinamica di un punto materiale connesso all'origine da una molla ideale.

### 1.3.1 Punto materiale nel campo di gravità (in assenza di attrito)

In approssimazione di terra piatta, la forza di gravità agente su un punto materiale è uniforme e costante, diretta verso il basso:  $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$ , essendo  $g$  l'accelerazione di gravità e  $\hat{e}_z$  il versore dell'asse  $z$  (cioè dell'asse  $(O, \hat{e}_z)$ ). L'equazione di Newton corrispondente, che descrive il moto di un proiettile o di un qualsiasi oggetto in caduta libera, quando si trascuri la resistenza dell'aria, è  $m\vec{a} = -mg\hat{e}_z$ , ovvero  $\vec{a} = -g\hat{e}_z$ , cioè il moto ha accelerazione uniforme e costante. Anche questo è un caso particolare di (1.4)-(1.5). Inserendo in tali formule  $\vec{F} = -mg\hat{e}_z$  si ottiene  $\vec{v}(t) = \vec{v}(0) - g\hat{e}_z t$  e

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)t - g\hat{e}_z \frac{t^2}{2} . \quad (1.13)$$

Dunque si ha un moto uniformemente accelerato. Si noti che la proiezione del moto sul piano  $(x, y)$  è di tipo rettilineo uniforme. Infatti, scrivendo la (1.13) per componenti e raccogliendo, si ha

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) + v_x(0)t \\ y(0) + v_y(0)t \\ z(0) + v_z(0)t - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Nel caso  $v_x(0) = v_y(0) = 0$  il moto è rettilineo (non uniforme ovviamente), e si svolge lungo una retta parallela all'asse  $z$ . Se almeno una delle due componenti  $x$  o  $y$  della velocità iniziale è diversa da zero, allora il punto si muove lungo un arco di parabola. Infatti, se  $v_x(0) \neq 0$ , si può sempre pensare di spostare l'origine delle coordinate in modo da farla coincidere con la posizione iniziale del punto, così che  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ . Inoltre, si possono ruotare gli assi coordinati in modo che  $v_y(0) = 0$ . Allora dalla (1.14), prima componente, si può ricavare il tempo in funzione della  $x$ ,  $t = x/v_x(0)$ , e sostituirlo nell'ultima componente, ottenendo

$$z = \frac{v_z(0)}{v_x(0)}x - \frac{g}{2v_x^2(0)}x^2,$$

che è l'equazione di una parabola nel piano  $(x, z)$ . Dall'equazione precedente si ricavano ad esempio la gittata  $L = 2v_x(0)v_z(0)/g$  e il tempo di volo  $T = L/v_x(0) = 2v_z(0)/g$  di una palla di cannone (farlo).

**Osservazione 1.4.** *Un punto materiale dotato di carica elettrica  $q$ , sotto l'azione di un campo elettrico uniforme e costante  $\vec{E}_0$ , è soggetto ad una forza  $q\vec{E}_0$ . L'equazione di Newton corrispondente è  $m\vec{a} = q\vec{E}_0$ . Questo è ancora un caso particolare di (1.4)-(1.5). Notare che si può sempre assumere  $\vec{E}_0 = E_0\hat{e}_z$ , e quindi per questo tipo di dinamica valgono tutte le considerazioni svolte nel caso precedente pur di sostituire la forza peso  $-mg$  (con segno meno incluso) con la forza elettrica  $qE_0$*

### 1.3.2 Punto attaccato a una molla ideale

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  attaccato all'estremo libero di una molla; l'altro estremo della molla è fissato all'origine  $O$  degli assi. Se  $\vec{x}_P$  indica la posizione del punto  $P$ , e  $\hat{x}_P = \vec{x}_P/|\vec{x}_P|$ , allora la forza a cui è soggetto il punto è data da

$$\vec{F} = \begin{cases} -k(|\vec{x}_P| - \ell)\hat{x}_P & , \quad |\vec{x}_P| > \xi_c \\ (+\infty)\hat{x}_P & , \quad |\vec{x}_P| \leq \xi_c \end{cases} \quad (\text{molla "reale"}). \quad (1.15)$$

Qui  $k$  è la costante elastica della molla,  $\ell$  è la lunghezza di riposo della molla, mentre  $\xi_c (< \ell)$  denota la lunghezza di compressione massima, data dal numero di spire per lo spessore del filo con il quale è realizzata la molla. Secondo la legge (1.15), una molla compressa in modo da avere una lunghezza minore di  $\xi_c$  esercita sull'estremo  $P$  una forza repulsiva idealmente infinita, il che indica che è impossibile comprimerla ulteriormente (nella pratica questo è possibile, a costo però di deformare la molla stessa). Naturalmente una molla reale non può neanche essere allungata arbitrariamente. Oltre una certa lunghezza di trazione massima (non prevista nella (1.15)) la molla prima oppone una resistenza molto alta ad un ulteriore allungamento, poi si

deforma e infine si rompe, tutto ciò dipendentemente dalle sue caratteristiche tecniche. Nel seguito tutti questi effetti verranno trascurati. Inoltre, si supporrà quasi sempre di avere a che fare con *molle ideali*, per le quali si suppone nulla la lunghezza di riposo, ponendo, per il punto materiale  $P$  attaccato al suo estremo libero, una legge di forza della forma

$$\vec{F} = -k\vec{x}_P \quad (\text{molla ideale}) . \quad (1.16)$$

Nel caso di due punti materiali  $P$  e  $Q$  connessi da una molla ideale di costante  $k$ , la forza che  $Q$  esercita su  $P$  è data da

$$\vec{F}_{PQ} = -k(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) , \quad (1.17)$$

che si riduce alla (1.16) per  $\vec{x}_Q = \vec{0}$ . Si noti che  $\vec{F}_{QP} = -\vec{F}_{PQ}$  e che  $\vec{F}_{PQ} \parallel \overrightarrow{QP} = \vec{x}_P - \vec{x}_Q$ , ovvero *l'interazione dovuta ad una molla ideale verifica il terzo principio*.

Studiamo dunque la dinamica di un punto materiale di massa  $m$  attaccato all'estremo libero di una molla ideale di costante elastica  $k$ , la cui equazione di Newton è  $m\vec{a} = -k\vec{x}$  (abbiamo posto  $\vec{x}_P \equiv \vec{x}$ ). Dividendo per  $m$ , osservando che il rapporto  $k/m$  ha le dimensioni del quadrato di una frequenza (ovvero dell'inverso di un tempo al quadrato) e ponendo

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad (1.18)$$

l'equazione  $\ddot{\vec{x}} = -(k/m)\vec{x} = -\omega^2\vec{x}$ , per componenti, si scrive

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ -\omega^2 z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \\ \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases} . \quad (1.19)$$

Dunque si hanno tre equazioni identiche, ognuna delle quali coinvolge una sola coordinata del punto materiale: risolta la prima, cioè

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} , \quad (1.20)$$

le altre due si risolvono immediatamente cambiando opportunamente nome alla variabile dipendente. Vedremo tra poco che l'equazione (1.20), che si chiama *equazione dell'oscillatore armonico*, è un'equazione differenziale ordinaria, che si risolve con tecniche note; anticipiamo però qui la sua soluzione in modo intuitivo. Cominciamo col considerare il caso particolare  $\omega = 1$ . Allora l'equazione (1.20) chiede di trovare una funzione  $t \mapsto x(t)$  tale che la sua derivata seconda sia uguale e opposta alla funzione stessa. Due funzioni che soddisfano tale requisito sono le funzioni armoniche  $\cos(t)$  e  $\sin(t)$ , che dunque risultano essere due soluzioni dell'equazione (1.20) con  $\omega = 1$ . A questo punto osserviamo che  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  soddisfano l'equazione (1.20) per qualsiasi valore di  $\omega$ . Il passo ulteriore consiste nel notare che una combinazione lineare delle due soluzioni, con coefficienti arbitrari, è ancora una soluzione dell'equazione. Infatti si verifica immediatamente che

$$\frac{d^2}{dt^2}[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] = -\omega^2[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] .$$

In definitiva, una soluzione dell'equazione (1.20) è

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) . \quad (1.21)$$

Ipotizziamo quindi che questa sia la soluzione più generale possibile dell'equazione (1.20), ovvero che non esista un'altra funzione di  $t$  che ne sia soluzione e sia (linearmente) indipendente da  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$  (in effetti questo si può dimostrare). Chiamiamo dunque la (1.21) *soluzione generale* dell'equazione dell'oscillatore armonico (1.20), e il moto da essa descritto *moto armonico* (unidimensionale). Notiamo che essa dipende da due costanti arbitrarie, ovvero dai parametri  $a$  e  $b$ , e che di fatto non si tratta di “una” soluzione, ma di una famiglia a due parametri di soluzioni. Il valore effettivo di tali costanti viene univocamente determinato specificando le condizioni iniziali, ovvero la posizione e la velocità che il punto materiale ha ad un dato istante, per esempio a  $t = 0$ . Siano allora  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_{0x}$  le proiezioni lungo l'asse  $x$  della posizione e della velocità iniziali. Dalla (1.21) segue

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = a \cos(0) + b \sin(0) = a ; \\ v_{0x} = \dot{x}(0) = -a\omega \sin(0) + b\omega \cos(0) = \omega b , \end{cases}$$

che determina la soluzione unica del *problema ai valori iniziali*, o *problema di Cauchy*, per l'equazione (1.20), cioè

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) . \quad (1.22)$$

Una volta determinata la  $x(t)$  corrispondente ai dati iniziali, la  $y(t)$  e la  $z(t)$  si scrivono immediatamente per analogia, ovvero

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin(\omega t) , \quad (1.23)$$

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{0z}}{\omega} \sin(\omega t) . \quad (1.24)$$

In definitiva, la soluzione in forma vettoriale dell'equazione di Newton  $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$  è

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \\ &= \vec{x}(0) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \vec{v}(0) \sin(\omega t) , \end{aligned} \quad (1.25)$$

che descrive un moto armonico tridimensionale.

## 1.4 Punto soggetto a forza centrale

Consideriamo ora un punto materiale di massa  $m$  soggetto a una forza della forma

$$\vec{F}(\vec{x}) = \Phi(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} , \quad (1.26)$$



dove  $\vec{x}$  è il vettore posizione del punto rispetto a una fissata origine  $O$ , mentre  $\Phi(s)$  è una assegnata funzione di  $s > 0$ . Forze della forma (1.26) sono dette *centrali*, e l'origine  $O$  del sistema è detta *centro di forza*. Il modello di forza (1.26) si ottiene considerando la forza di interazione (1.12) e ponendo il punto  $Q$  in  $O$  con massa  $m_Q$  infinita. L'equazione di Newton per il punto materiale in questione è

$$m\ddot{\vec{x}} = \Phi(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} . \quad (1.27)$$

Notare che tale equazione non è in disaccordo con il sesto Principio (di relatività) perché il punto materiale in questo caso non è isolato: interagisce con il centro di forza.

Ci si concentra ora sullo studio dell'equazione del moto (1.27). Per prima cosa si dimostra che tale moto si svolge su un fissato piano dello spazio. Per farlo si definisce la quantità

$$\vec{\ell} \equiv \vec{x} \times m\dot{\vec{x}} , \quad (1.28)$$

detto vettore *momento angolare* del moto relativo. Derivando rispetto al tempo e sfruttando l'equazione (1.27) si ottiene

$$\dot{\vec{\ell}} = \dot{\vec{x}} \times m\dot{\vec{x}} + \vec{x} \times m\ddot{\vec{x}} = \vec{x} \times \Phi(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = 0 , \quad (1.29)$$

ovvero  $\vec{\ell}$  risulta indipendente dal tempo e dunque il suo valore è determinato dai dati iniziali:  $\vec{\ell} = \vec{x}(0) \times m\dot{\vec{x}}(0)$ . Dalla definizione (1.28) di  $\vec{\ell}$  segue che sia  $\vec{x}$  che  $\dot{\vec{x}}$  sono ad esso ortogonali e dunque giacciono su un piano. In particolare, risulta

$$\vec{x} \cdot \vec{\ell} = x\ell_x + y\ell_y + z\ell_z = 0 , \quad (1.30)$$

che è l'equazione di un piano passante per l'origine e ortogonale al vettore  $\vec{\ell}$  (le componenti di  $\vec{\ell}$  sono i parametri di giacitura del piano).

**Osservazione 1.5.** *Dall'identità  $\dot{\vec{\ell}} = \vec{x} \times \vec{F}$ , segue che il momento angolare di un punto materiale soggetto ad una forza  $\vec{F}$  si conserva se e solo se la forza è parallela al vettore posizione  $\vec{x}$  del punto stesso. Supponendo che la forza sia posizionale (che dipenda cioè dalla posizione del punto e non dalla sua velocità) e che sia invariante per rotazione, si arriva alla forma (1.26).*

Avendo dimostrato la planarità del moto relativo, si può scegliere un sistema di riferimento tale che  $\vec{\ell} \parallel \hat{e}_z$ , in modo che il piano di moto sia il piano  $(x, y)$ , definito dall'equazione  $z = 0$ . Introduciamo ora su tale piano le coordinate polari  $r, \phi$  legate a  $x, y$  dalle equazioni

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} . \quad (1.31)$$

Si osservi che  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{x}|$  e  $\text{tg}\phi = y/x$ . Scrivendo l'equazione di Newton (1.27) per componenti, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} \ddot{x} = \Phi(r)x/r \\ \ddot{y} = \Phi(r)y/r \end{cases} . \quad (1.32)$$

Vogliamo riscrivere tale sistema in coordinate polari  $(r, \phi)$ . A tale scopo, risulta conveniente introdurre la variabile complessa

$$Z = x + iy = re^{i\phi} , \quad (1.33)$$

dove si ricorda che  $i$  è l'unità immaginaria ( $i^2 = -1$ ) e la seconda uguaglianza definisce la rappresentazione polare del numero complesso  $Z$ . Si osservi che  $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{x}|$ , mentre sfruttando l'identità di Euler  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$  in (1.33) si riottengono le relazioni (1.31). Ora, moltiplicando la seconda delle equazioni del sistema (1.32) per  $i$  e sommando le due equazioni, si ottiene

$$m\ddot{Z} = \Phi(|Z|) \frac{Z}{|Z|} , \quad (1.34)$$

equivalente al sistema stesso ed equivalente all'equazione in forma vettoriale (1.27). Calcolando le derivate di  $Z = re^{i\phi}$  rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{Z} = (\dot{r} + ir\dot{\phi})e^{i\phi} ; \quad (1.35)$$

$$\ddot{Z} = [(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + i(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})]e^{i\phi} . \quad (1.36)$$

Sostituendo l'espressione appena ottenuta per  $\ddot{Z}$  nell'equazione di Newton (1.34) a sinistra,  $Z = re^{i\phi}$  a destra, e tenendo conto del fatto che  $|Z| = r$ , si ottiene

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + im(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \Phi(r) ,$$

che separando la parte reale e quella immaginaria risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = \Phi(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = 0 \end{cases} . \quad (1.37)$$

Si riconosce subito che la seconda equazione di tale sistema, opportunamente moltiplicata per  $r$ , esprime la conservazione del momento angolare:

$$mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0 .$$

Che la quantità  $mr^2\dot{\phi}$  sia proprio la componente (unica)  $z$  del momento angolare (1.28) si deduce dalla catena di identità

$$\ell_z = (\vec{x} \times m\dot{\vec{x}})_z = m(xy - y\dot{x}) = \text{Im}(m\dot{Z}\bar{Z}) = mr^2\dot{\phi} .$$

Si può dunque porre

$$mr^2\dot{\phi} = \ell_z , \quad (1.38)$$

con  $\ell_z$  costante determinata dai dati iniziali:  $\ell_z = mr^2(0)\dot{\phi}(0)$ . Dalla (1.38) si ricava allora

$$\dot{\phi} = \frac{\ell_z}{mr^2} \quad (1.39)$$

e lo si sostituisce nella prima delle equazioni (1.37), ottenendo

$$\boxed{m\ddot{r} = \Phi(r) + \frac{\ell_z^2}{mr^3}} . \quad (1.40)$$

Si è dunque ridotto lo studio del problema dei due corpi allo studio della equazione di Newton scalare (1.40), risolta la quale, in linea di principio, si ottiene  $r(t)$  e lo si sostituisce nella (1.39) per ricavare  $\phi(t)$  tramite una semplice integrazione.

### 1.4.1 Analisi qualitativa del moto radiale

L'equazione (1.40) descrive il moto radiale del punto. Del tutto in generale, tale equazione non si sa risolvere esplicitamente. È possibile tuttavia trarre conclusioni qualitative importanti sul moto sfruttando una ulteriore legge di conservazione. Moltiplichiamo la (1.40) per  $\dot{r}$  e osserviamo che

$$\begin{aligned}\dot{r}\ddot{r} &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}^2}{2} ; \\ \dot{r} \frac{\ell_z^2}{mr^3} &= \frac{d}{dt} \left( -\frac{\ell_z^2}{2mr^2} \right) ; \\ \dot{r}\Phi(r) &= -\frac{d}{dt} V(r) ,\end{aligned}$$

dove nell'ultima relazione si è introdotta la funzione  $V(r)$ , che è una primitiva cambiata di segno della forza radiale  $\Phi(r)$ :  $V'(r) = -\Phi(r)$  (tale primitiva esiste sempre). La funzione  $V(r)$  è detta energia potenziale della forza  $\Phi$ . Le tre relazioni scritte sopra implicano

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{\dot{r}^2}{2} \right) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + V(r) \right) , \quad (1.41)$$

ovvero la legge di conservazione

$$H_{rad}(r, \dot{r}) \equiv m \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + V(r) = E , \quad (1.42)$$

essendo  $E$  una costante determinata dai dati iniziali  $r(0)$ ,  $\dot{r}(0)$  e  $\dot{\phi}(0)$ ; quest'ultimo valore determina, assieme a  $r(0)$ , il valore di  $\ell_z$ . La funzione  $H_{rad}$ , definita sopra, è detta energia totale (del moto radiale). La legge di conservazione (1.42), detta *legge di conservazione dell'energia* del moto radiale, permette di trarre conclusioni molto precise sul moto relativo. Ad esempio, osservando che  $m\dot{r}^2/2 \geq 0$ , si ricava

$$U_e(r) \equiv \frac{\ell_z^2}{2mr^2} + V(r) \leq E . \quad (1.43)$$

La funzione  $U_e(r)$  appena definita prende il nome di *energia potenziale efficace* del moto radiale. La disequazione (1.43) determina gli intervalli radiali consentiti per il moto relativo, determinati dall'insieme di sotto-livello  $E$  dell'energia potenziale efficace  $U_e(r)$  a primo membro. In altre parole, i valori di  $r$  consentiti sono quelli appartenenti all'insieme

$$S_{E, \ell_z} = \{r > 0 : U_e(r) \leq E\} . \quad (1.44)$$

Si noti che  $S_{E, \ell_z} \subseteq \mathbb{R}^+$ . Per esempio, se in corrispondenza a un dato valore dell'energia  $E$  si trova che  $S_{E, \ell_z}$  è un intervallo, allora si conclude che il moto radiale (e di conseguenza quello globale) è limitato; viceversa, se  $S_{E, \ell_z}$  risulta semi-infinito, si conclude che il punto materiale si allontana indefinitamente dall'origine. Elenchiamo alcune proprietà dell'insieme  $S_{E, \ell_z}$  (verificarle accuratamente aiutandosi con dei disegni).

- Per ogni assegnato valore dell'energia  $E$ ,  $S_{E,\ell_z}$  può essere vuoto o costituito da intervalli disgiunti eventualmente consistenti in singoli punti. L'intervallo più a destra può essere infinito.
- Se  $S_{E,\ell_z}$  consiste di più intervalli disgiunti, l'intervallo effettivo nel quale si svolge il moto radiale è quello al quale appartiene  $r(0)$ .
- Se  $U_e$  è inferiormente limitata, ovvero ammette minimo assoluto, allora  $S_{E,\ell_z}$  è vuoto per  $E < E_{min} \equiv \min_{r>0} U_e(r)$  e non vuoto per  $E \geq E_{min}$ .
- Se  $r = \bar{r}$  è un punto di minimo locale stretto (cioè  $U_e(r) > U_e(\bar{r})$  per  $r \neq \bar{r}$  appartenente ad un certo intorno di  $\bar{r}$ ), allora  $S_{U_e(\bar{r}),\ell_z}$  contiene il punto isolato  $r = \bar{r}$ . Se  $r(0) = \bar{r}$  si ha un moto circolare:  $r(t) = r(0) = \bar{r}$  per ogni  $t$ . In tale caso, dalla (1.39) risulta che  $\dot{\phi} = \ell_z/(m\bar{r}^2)$  è costante, ovvero il moto relativo è circolare uniforme:  $\phi(t) = \phi(0) + t\ell_z/(m\bar{r}^2)$ .

Dalle proprietà elencate si deduce che, nel caso in cui  $S_{E,\ell_z}$  contiene un intervallo limitato  $I = [r_1, r_2]$  e  $r(0) \in I$ , allora  $r(t) \in I$  per ogni  $t$ , ovvero  $r_1 \leq r(t) \leq r_2$  per ogni  $t$ . Questo significa che la distanza del punto dal centro di forza può variare da un valore minimo a un valore massimo, ovvero che sul piano di moto il punto si muove all'interno di una corona circolare delimitata dalla circonferenza interna di raggio  $r_1$  e dalla circonferenza esterna di raggio  $r_2$ . Per quanto riguarda l'angolo  $\phi$  si noti che dalla (1.39) segue che se  $\ell_z \neq 0$ , allora  $\dot{\phi}$  ha lo stesso segno di  $\ell_z$ , ovvero  $\phi(t)$  cresce nel tempo se  $\ell_z > 0$  e decresce se  $\ell_z < 0$ ; dunque l'angolo avanza in senso antiorario oppure orario e non può mai cambiare verso di rotazione. La rotazione diviene uniforme nel caso in cui l'intervallo  $I$  collassa in un punto (è il caso di moto circolare uniforme corrispondente ai minimi locali di  $U_e$ ).

Nel caso in cui l'intervallo più a destra di  $S_{E,\ell_z}$ , chiamiamolo  $J$ , sia semi-infinito, ovvero  $J = [r_0, +\infty[$ , se  $r(0) \in J$  allora  $r(t)$  può crescere indefinitamente. Questa situazione si verifica ad esempio nel caso in cui  $V(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$ , per valori di  $E > 0$ . Dalla (1.39) si vede che per  $r \rightarrow +\infty$  segue  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ , ovvero il moto diventa asintoticamente rettilineo (perché l'angolo diventa asintoticamente costante). D'altra parte, dalla legge di conservazione dell'energia (1.42) si trova che  $|\dot{r}| \rightarrow \sqrt{2E/m}$ , ovvero la velocità radiale diventa costante. In conclusione, se il punto materiale si allontana indefinitamente, il moto asintotico è rettilineo e uniforme.

Nel caso particolare  $\ell_z = 0$ , ovvero  $\vec{\ell} = \vec{0}$ , dalla (1.39) segue che  $\dot{\phi} = 0$  per ogni  $t$ , ovvero il moto è rettilineo e l'equazione radiale contiene tutta l'informazione su di esso. In realtà in questo caso si deve considerare  $r$  come variabile reale. Equivalentemente, l'equazione di Newton (1.27) ha una sola componente, quella lungo la retta di moto, e si scrive  $m\ddot{x} = \Phi(|x|)$ .

Come ultimo argomento osserviamo che la legge di conservazione dell'energia (1.42) si interpreta dicendo che le coppie  $(r, \dot{r})$  di posizione e velocità radiali permesse appartengono all'insieme di livello  $E$  della funzione  $H_{rad}(r, \dot{r})$ . Tale insieme di livello è dato in generale dall'unione di curve e punti isolati nel piano  $r, \dot{r}$ . L'insieme di tutte le curve di livello  $E$  dell'energia, al variare di  $E$ , prende il nome di *diagramma di fase del moto radiale*.

Si osservi che l'insieme di livello  $H_{rad} = E$  si determina esplicitamente risolvendo la (1.42) in  $\dot{r}$ , ottenendo

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_e(r)]}, \quad (1.45)$$

che descrive due grafici di funzioni che possono appartenere alla stessa curva oppure no, e certamente simmetrici rispetto all'asse  $r$ .

L'equazione (1.45) permette in linea di principio di risolvere l'equazione radiale. Infatti, scegliendo uno dei due segni e chiamando  $f(r)$  il lato destro, l'equazione considerata si scrive  $\dot{r} = f(r)$ , ovvero  $dr/f(r) = dt$ . Integrando quest'ultima in forma indefinita, e chiamando  $F(r)$  una primitiva di  $1/f(r)$ , si ottiene  $F(r) = t + c$ , dove  $c$  è una costante arbitraria. Allora la soluzione dell'equazione del moto radiale si ottiene invertendo  $F$ , ovvero  $r(t) = F^{-1}(t + c)$ .

## 1.5 Esercizi

**Esercizio 1.1.** *Determinare  $S_{E,\ell_z}$  nel caso in cui il punto sia soggetto a una molla ideale, cioè  $\Phi(r) = -kr$ . Mostrare che esistono tre tipi di moti possibili (due per momento angolare diverso da zero, corrispondenti a  $E = E_{min}$  ed  $E > E_{min}$ , piú uno per momento angolare nullo). Tracciare il corrispondente diagramma di fase del moto radiale, ovvero le curve di livello dell'energia radiale nel semi-piano  $(r, \dot{r})$ .*

**Esercizio 1.2.** *Determinare  $S_{E,\ell_z}$  nel caso di interazione gravitazionale o coulombiana, cioè  $\Phi(r) = -k/r^2$ . Mostrare che se  $k > 0$  esistono cinque tipi di moti possibili a seconda del valore dell'energia  $E$  e del momento angolare  $\ell_z$ , mentre se  $k < 0$  (caso coulombiano repulsivo) esistono due tipi di moti. Tracciare i corrispondenti diagrammi di fase del moto radiale.*

**Esercizio 1.3.** *Facendo uso della legge di conservazione dell'energia del moto radiale si dimostri che se  $\bar{r}$  è punto di minimo locale non degenerare per  $U_e(r)$ , ovvero  $U_e(\bar{r}) = E_{min}$ ,  $U'_e(\bar{r}) = 0$  e  $U''_e(\bar{r}) > 0$ , allora per  $E = E_{min} + \Delta E$ , con  $\Delta E$  incremento piccolo e positivo, la curva di fase nel piano  $(r, \dot{r})$  è approssimativamente una ellisse centrata in  $(\bar{r}, 0)$  e di semiassi  $\sqrt{2\Delta E/U''_e(\bar{r})}$  e  $\sqrt{2\Delta E/m}$ . Suggerimento: sviluppare  $U_e(r)$  secondo Taylor al secondo ordine con centro  $\bar{r}$  e trascurare il resto.*



# Capitolo 2

## Il Problema dei due corpi

In questo capitolo viene svolta l'analisi del moto di due punti materiali isolati  $P$  e  $Q$  che interagiscono tra loro tramite una forza della forma (1.12). Le equazioni di Newton del sistema sono dunque

$$m_P \ddot{\vec{x}}_P = \Phi(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} ; \quad (2.1)$$

$$m_Q \ddot{\vec{x}}_Q = -\Phi(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} , \quad (2.2)$$

essendo  $\Phi$  una determinata funzione di variabile reale positiva. L'esempio più importante di tale problema è quello gravitazionale:  $\Phi(r) = -Gm_P m_Q / r^2$  (in cui  $Q$  ad esempio è il Sole e  $P$  un pianeta). Altri esempi rilevanti sono il caso elettrostatico, con  $\Phi(r) = q_P q_Q / r^2$ , e quello armonico, con  $\Phi(r) = -kr$ . Viene svolta una analisi generale, valida per qualsiasi legge di forza  $\Phi(r)$ , per poi concentrarsi in dettaglio sul problema kepleriano attrattivo  $\Phi(r) = -k/r^2$ ,  $k > 0$ .

### 2.1 Baricentro e spostamento relativo

Per prima cosa si osserva che le due equazioni (2.1)-(2.2) sono della forma  $m_P \ddot{\vec{x}}_P = \vec{F}_{PQ}$ ,  $m_Q \ddot{\vec{x}}_Q = -\vec{F}_{PQ}$ ; risulta quindi evidente che se le si somma vettorialmente membro a membro si ottiene l'equazione

$$m_P \ddot{\vec{x}}_P + m_Q \ddot{\vec{x}}_Q = \vec{0} . \quad (2.3)$$

Se si introduce quindi il vettore posizione

$$\vec{X} \equiv \frac{m_P \vec{x}_P + m_Q \vec{x}_Q}{m_P + m_Q} , \quad (2.4)$$

l'equazione (2.3) (divisa per la somma delle masse) assume la forma

$$\ddot{\vec{X}} = \vec{0} . \quad (2.5)$$

Il vettore  $\vec{X}$  definito in (2.4) individua la posizione di un punto geometrico  $G$  detto *centro di massa* o *baricentro* del sistema di due punti materiali. Si noti che  $G$  appartiene al segmento

di estremi  $P$  e  $Q$ , essendo tanto più vicino a  $P$  quanto maggiore è  $m_P$  rispetto a  $m_Q$  (e viceversa); nel caso particolare  $m_P = m_Q$  il baricentro si trova nel punto medio del segmento  $PQ$  (convincersi di tali affermazioni). L'equazione (2.5) dice che il baricentro del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, ovvero

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(0) + t\dot{\vec{X}}(0) . \quad (2.6)$$

Come ulteriore passo, si osserva che le forze in (2.1)-(2.2) dipendono solo dal vettore *spostamento relativo*

$$\vec{x} \equiv \vec{x}_P - \vec{x}_Q , \quad (2.7)$$

che determina la posizione di  $P$  rispetto a  $Q$ . Volendo ottenere una equazione che coinvolge la sola variabile  $\vec{x}$ , si divide la (2.1) per  $m_P$  e la (2.2) per  $m_Q$ , sottraendo poi la seconda equazione dalla prima. Risulta

$$\ddot{\vec{x}}_P - \ddot{\vec{x}}_Q = \left( \frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_Q} \right) \Phi(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} , \quad (2.8)$$

che, introducendo la *massa ridotta*

$$\mu \equiv \left( \frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_Q} \right)^{-1} = \frac{m_P m_Q}{m_P + m_Q} , \quad (2.9)$$

diviene

$$\mu \ddot{\vec{x}} = \Phi(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} . \quad (2.10)$$

Si vede quindi che, con il cambio di variabili  $(\vec{x}_P, \vec{x}_Q) \mapsto (\vec{X}, \vec{x})$  definito dalla (2.4) e dalla (2.7), il problema dei due corpi (2.1)-(2.2), si semplifica. In particolare il moto del baricentro e quello relativo risultano disaccoppiati. Mentre il baricentro si muove di moto rettilineo e uniforme, il moto relativo dei due punti è determinato dalla equazione di Newton (2.10), che è identica all'equazione (1.27) e descrive il moto di un singolo punto materiale "fittizio", di massa (ridotta)  $\mu$ , soggetto ad una determinata forza centrale. Quest'ultimo problema è stato già studiato nel capitolo precedente e si è visto come sia possibile ridurlo al solo studio del moto radiale. In conclusione: se si risolve l'equazione del moto radiale associata all'equazione (2.10), si risolve completamente il problema dei due corpi.

Osserviamo infine che, se si risolve l'equazione (2.10), determinando  $\vec{x}(t)$ , invertendo le (2.4) e (2.7) si ricavano le posizioni dei due punti al tempo  $t$ , ovvero (verificare)

$$\begin{cases} \vec{x}_P(t) = \vec{X}(t) + \frac{m_Q}{m_P + m_Q} \vec{x}(t) \\ \vec{x}_Q(t) = \vec{X}(t) - \frac{m_P}{m_P + m_Q} \vec{x}(t) \end{cases} . \quad (2.11)$$

## 2.2 Leggi di conservazione generali

Il problema dei due corpi ammette due leggi di conservazione generali, precisamente si conservano il momento angolare totale e l'energia totale del sistema.



Il momento angolare totale del sistema di due punti materiali  $P$  e  $Q$  è definito come la somma dei momenti angolari di singolo punto, ovvero

$$\vec{L} = \vec{x}_P \times m_P \vec{v}_P + \vec{x}_Q \times m_Q \vec{v}_Q . \quad (2.12)$$

Mostriamo che per il sistema (2.1)-(2.2) tale vettore è costante. Derivando e sfruttando le due equazioni del moto si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \vec{x}_P \times m_P \vec{a}_P + \vec{x}_Q \times m_Q \vec{a}_Q = \\ &= (\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \times \Phi(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) \frac{\vec{x}_P - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|} = 0 . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Alternativamente, facendo uso delle trasformazioni (2.11) scriviamo il momento angolare totale  $\vec{L}$  nelle variabili di baricentro e di moto relativo; risulta (verificare)

$$\vec{L} = \vec{X} \times (m_P + m_Q) \dot{\vec{X}} + \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}} \equiv \vec{L}_G + \vec{\ell} , \quad (2.14)$$

avendo indicato con  $\vec{L}_G$  il momento angolare del baricentro e con  $\vec{\ell}$  quello del moto relativo. Ora, sapendo che (vedi (2.6))  $\vec{X}(t) = \vec{X}(0) + t\dot{\vec{X}}(0)$  e che  $\dot{\vec{X}}(t) = \dot{\vec{X}}(0)$ , si ha

$$\vec{L}_G = \vec{X}(t) \times (m_P + m_Q) \dot{\vec{X}}(t) = \vec{X}(0) \times (m_P + m_Q) \dot{\vec{X}}(0) . \quad (2.15)$$

Dunque  $\vec{L}_G$  è costante e quindi, essendo costante anche  $\vec{\ell}$  (come mostrato in precedenza nello studio dei moti centrali), risulta costante la somma  $\vec{\ell} + \vec{L}_G = \vec{L}$ .

L'energia totale del sistema (2.1)-(2.2) è la funzione

$$H(\vec{x}_P, \vec{v}_P, \vec{x}_Q, \vec{v}_Q) \equiv m_P \frac{|\vec{v}_P|^2}{2} + m_Q \frac{|\vec{v}_Q|^2}{2} + V(|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|) , \quad (2.16)$$

essendo  $V$  una primitiva, cambiata di segno, della funzione  $\Phi$  che definisce la forza, ovvero  $V' = -\Phi$ . La funzione  $V$  prende il nome di *energia potenziale* del sistema, mentre la somma dei termini proporzionali al quadrato delle velocità dei punti prende il nome di *energia cinetica* del sistema. Dimostriamo che  $H$  è costante. Anche  $H$  si può esprimere nelle variabili di baricentro e moto relativo. Sostituendo le (2.11) e le loro derivate in (2.16), si ottiene

$$H = (m_P + m_Q) \frac{|\dot{\vec{X}}|^2}{2} + \mu \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2} + V(|\vec{x}|) \equiv K_G(\dot{\vec{X}}) + H_{rel}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) , \quad (2.17)$$

dalla quale si vede che l'energia totale del sistema è la somma dell'energia cinetica  $K_G$  del baricentro e di quella (totale)  $H_{rel}$  del moto relativo. Essendo  $\dot{\vec{X}}$  costante,  $K_G$  è costante e quindi lo è  $H_{rel} = H - K_G$ . In particolare, facendo uso delle variabile complessa  $Z$ , e delle relazioni (1.35), e della (1.39), si ottiene

$$H_{rel} = \mu \frac{|\dot{\vec{x}}|^2}{2} + V(|\vec{x}|) = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_e(r) = H_{rad} , \quad (2.18)$$

ovvero l'energia totale del moto relativo è proprio l'energia del moto radiale introdotta nei moti centrali (ricordare sempre che però qui la massa è quella ridotta).

## 2.3 Equazione polare delle orbite kepleriane

In quanto segue ci concentriamo sulla determinazione della forma dell'orbita del moto relativo per il caso kepleriano  $\Phi(r) = -k/r^2$ , mantenendo fino alla fine il parametro  $k > 0$  non specificato. La forma dell'orbita non sarà determinata sotto forma di legge oraria, cioè di curva polare  $t \mapsto (r(t), \phi(t))$ , perché non risolveremo le equazioni del moto (1.39) e (1.40) (cosa possibile ma molto difficile). La forma dell'orbita verrà invece determinata come grafico di una funzione polare  $\phi \mapsto r = \rho(\phi)$ . Ricordiamo che dallo studio del moto centrale, l'equazione di Newton per il moto relativo (2.10) in coordinate polari piane, si scrive

$$\mu \ddot{r} = -U'_e(r) \quad ; \quad \dot{\phi} = \frac{\ell_z}{\mu r^2} \quad , \quad (2.19)$$

essendo

$$U_e(r) = \frac{\ell_z^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (2.20)$$

l'energia potenziale efficace del moto radiale. Vale inoltre la legge di conservazione dell'energia del moto radiale (e del moto relativo, per quanto visto sopra)

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U_e(r) = E \quad . \quad (2.21)$$

Supponiamo dunque che sia possibile esprimere  $r$  in funzione dell'angolo  $\phi$ , ovvero che esista la funzione composta  $t \mapsto r(t) = \rho(\phi(t))$ , essendo  $\rho(\phi)$  l'incognita del problema. Derivando rispetto al tempo una e due volte, facendo uso della seconda delle (2.19) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \rho'(\phi) \dot{\phi} = \frac{\ell_z}{\mu \rho^2} \rho' \quad ; \\ \ddot{r} &= \frac{\ell_z^2}{\mu^2 \rho^4} \left( \rho'' - 2 \frac{(\rho')^2}{\rho} \right) \quad . \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $\ddot{r}$  appena ottenuta nell'equazione del moto radiale, la prima delle (2.19), si ottiene

$$\frac{\ell_z^2}{\mu \rho^4} \left( \rho'' - 2 \frac{(\rho')^2}{\rho} \right) = -U'_e(\rho) \quad . \quad (2.22)$$

Per semplificare la forma molto complicata di tale equazione risulta conveniente introdurre la variabile

$$u(\phi) = \frac{1}{\rho(\phi)} \quad , \quad (2.23)$$

in termini della quale l'equazione (2.22) si scrive

$$u'' = -\frac{\mu}{\ell_z^2} \frac{d}{du} U_e(1/u) \quad , \quad (2.24)$$

che vale qualunque sia l'espressione di  $U_e$ . Ora, facendo uso dell'espressione esplicita (2.20) di  $U_e$  nel caso kepleriano, si trova che l'equazione del moto radiale (2.24) assume la forma semplice

$$u'' = -u + \frac{\mu k}{\ell_z^2} \quad . \quad (2.25)$$

Con il cambio di variabile  $v = u - \mu k / \ell_z^2$ , quest'ultima equazione diviene  $v'' = -v$ , cioè l'equazione dell'oscillatore armonico, la cui soluzione generale si può scrivere sempre nella forma  $v(\phi) = A \cos(\phi - \phi_0)$ , essendo  $A > 0$  e  $\phi_0$  una ampiezza e un angolo arbitrari (lo si dimostri). Dunque l'equazione (2.25) ha soluzione generale

$$u(\phi) = A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{\mu k}{\ell_z^2} .$$

Di conseguenza, l'equazione (2.22), equivalente all'equazione del moto radiale, è risolta da

$$\rho(\phi) = \frac{1}{u(\phi)} = \frac{1}{A \cos(\phi - \phi_0) + \frac{\mu k}{\ell_z^2}} .$$

Quest'ultima espressione si può riscrivere in una forma più semplice ricordando che  $\bar{r} = \ell_z^2 / (\mu k)$  è il punto critico dell'energia potenziale efficace (2.20), soluzione di  $U'_e(r) = 0$  (e quindi il raggio delle orbite circolari), scegliendo  $\phi_0 = 0$  (che equivale a scegliere  $\rho(0)$  come distanza minima dal centro), e definendo  $\varepsilon = A\bar{r}$ . Si ottiene quindi

$$\boxed{r = \rho(\phi) = \frac{\bar{r}}{1 + \varepsilon \cos \phi}} , \quad (2.26)$$

che è l'equazione generale dell'orbita del moto relativo kepleriano, espressa come grafico di una funzione polare. È noto che la (2.26) è l'equazione polare di una sezione conica di parametro  $\bar{r}$  ed eccentricità  $\varepsilon$ . Ricordiamo che le sezioni coniche sono così chiamate perché sono le curve che si ottengono intersecando la superficie di un cono a due falde con un piano. Le curve piane così ottenute possono essere circonferenze, ellissi, parabole o iperboli (escluso il caso degenerare in cui il piano passa per il vertice del cono). Tali curve, descritte in opportune coordinate polari, risultano essere tutte il grafico di una funzione polare della forma (2.26) e, più precisamente, si ha

- una circonferenza (di raggio  $\bar{r}$ ) per  $\varepsilon = 0$ ;
- una ellisse per  $0 < \varepsilon < 1$ ;
- una parabola per  $\varepsilon = 1$ ;
- un ramo di iperbole con apertura angolare tra gli asintoti pari a  $2\pi - 2 \arccos(-1/\varepsilon)$  per  $\varepsilon > 1$ .

Dunque la forma dell'orbita del moto relativo nel problema dei due corpi è determinata dal valore dell'eccentricità  $\varepsilon$ , valore che a sua volta dipende dal valore dell'energia e del momento angolare. Mostriamo questo nel caso delle orbite ellittiche. Ricordiamo che in questo caso  $r$  è la distanza da uno dei due fuochi dell'ellisse, fuoco in cui è posta l'origine delle coordinate. L'altro fuoco dista quindi  $2f$  da questo, essendo  $2f$  la distanza focale. L'eccentricità dell'ellisse è per definizione il rapporto  $\varepsilon = f/a$  tra semi distanza focale e semiasse maggiore. Definiamo le quantità

$$r_- = \min_{\phi} \rho(\phi) = \rho(0) = \frac{\bar{r}}{1 + \varepsilon} \quad ; \quad r_+ = \max_{\phi} \rho(\phi) = \rho(\pm\pi) = \frac{\bar{r}}{1 - \varepsilon} , \quad (2.27)$$

che sono la minima e la massima distanza dall'origine (uno dei due fuochi dell'ellisse), detti anche pericentro e apocentro dell'orbita (perielio e afelio per i moti dei pianeti, e in particolare della Terra, intorno al Sole). Il semiasse maggiore dell'ellisse risulta allora dato da

$$a = \frac{r_- + r_+}{2} = \frac{\bar{r}}{1 - \varepsilon^2}, \quad (2.28)$$

mentre la semi distanza focale è

$$f = \frac{r_+ - r_-}{2} = \frac{\varepsilon \bar{r}}{1 - \varepsilon^2}. \quad (2.29)$$

L'eccentricità è quindi legata a  $r_{\pm}$  dalla formula

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{r_+ - r_-}{r_- + r_+}, \quad (2.30)$$

formula che risulta utile per la connessione tra eccentricità e costanti del moto (energia e momento angolare). Il calcolo di  $r_{\pm}$  si effettua ricordando che questi sono ovviamente i punti di inversione del moto radiale, cioè le soluzioni dell'equazione  $U_e(r) = E$ , essendo  $U_e(r)$  data dalla (2.20). Risolvendo una equazione di secondo grado si trova

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{k}{E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{E^2} + \frac{2\ell_z^2}{\mu E}} \right); \quad (2.31)$$

si noti che si ha  $0 < r_- \leq r_+$  per  $E_{min} \leq E < 0$ . Sostituendo i valori appena trovati per  $r_{\pm}$  nella (2.30) si ottiene

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell_z^2}{\mu k^2}}. \quad (2.32)$$

Si osservi che il parametro  $\bar{r}$  dell'ellisse dipende solo dal momento angolare, mentre l'eccentricità dipende sia dall'energia che dal momento angolare. In definitiva, si hanno i seguenti casi:

- $\varepsilon = 0$  per  $E = E_{min} = U_e(\bar{r})$ : moto circolare uniforme su circonferenza di raggio  $\bar{r}$ ;
- $0 < \varepsilon < 1$  per  $E_{min} < E < 0$ : moti limitati; orbite ellittiche.
- $\varepsilon = 1$  per  $E = 0$ : moti illimitati con velocità asintotica nulla per  $r \rightarrow +\infty$ ; orbite paraboliche.
- $\varepsilon > 1$  per  $E > 0$ : moti illimitati con velocità asintotica  $\sqrt{2E/\mu}$  per  $r \rightarrow +\infty$ ; orbite iperboliche.

Nel caso gravitazionale,  $k = Gm_P m_Q = G\mu M$ , essendo  $M = m_P + m_Q$ . Il parametro  $\bar{r}$  e l'eccentricità  $\varepsilon$  espressi in funzione di energia  $E$  e momento angolare  $\ell_z$ , sono dati esplicitamente da

$$\bar{r} = \frac{\ell_z^2}{G\mu^2 M}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\ell_z^2 E}{G^2 \mu^3 M^2}}. \quad (2.33)$$

Una ulteriore quantità che servirà dopo è l'area dell'ellisse. Questa risulta data dalla formula  $A = \pi ab$ , dove  $a$  è il semiasse maggiore e  $b$  il semiasse minore. Quest'ultimo è connesso ad  $a$  e alla semi distanza focale dal teorema di Pitagora (segue dalla definizione geometrica di ellisse come luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante e pari a  $2a$ ), ovvero  $b^2 + f^2 = a^2$ . Ne segue che  $b = \sqrt{a^2 - f^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$  e quindi l'area dell'ellisse risulta

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \pi a^{3/2} \sqrt{\bar{r}}, \quad (2.34)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della (2.28) per eliminare  $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ .

Come osservazione finale sulla forma dell'orbita del moto relativo, facciamo notare che fino a qui abbiamo sempre supposto implicitamente  $\ell_z \neq 0$ . Nel caso particolare di momento angolare nullo,  $\ell_z = 0$ , dalla (1.39) si deduce che  $\phi$  è costante, ovvero il moto è rettilineo (ma NON uniforme). Si può mostrare che in questo caso, per  $E < 0$  si ha sempre collisione tra i due punti, ovvero esiste un tempo finito  $\tau(E)$  tale che  $r \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \tau(E)$ .

## 2.4 Leggi di Keplero

Le tre leggi matematiche che regolano il moto dei pianeti intorno al sole (o anche dei satelliti attorno ai pianeti) furono ricavate da Keplero sui dati osservativi di Brahe. In questo contesto dobbiamo pensare che il punto  $P$  di massa  $m_P$  sia il pianeta, mentre il punto  $Q = S$ , di massa  $m_Q = m_S \gg m_P$  sia il Sole. In questo caso  $m_P \ll m_S$ , quindi la massa ridotta è  $\mu \simeq m_P$ , mentre la massa totale è  $M \simeq m_S$ , e per quasi tutti i pianeti si può assumere che il baricentro sia vicino al centro del Sole (vedi osservazione a fine paragrafo). Le tre leggi di Keplero sono le seguenti.

1. I pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il vettore Sole-pianeta "spazza" aree uguali in tempi uguali, ovvero la velocità areolare è costante.
3. Il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore dell'orbita di ogni pianeta è costante.

Dimostriamo ora tali leggi facendo uso dei vari risultati ottenuti nell'analisi del moto relativo nel problema dei due corpi.

1. La dimostrazione della prima legge è già stata data. In realtà si è trovato un risultato più generale, ovvero che qualsiasi corpo celeste di massa piccola si muove, rispetto al Sole, su un'orbita che ha la forma di una sezione conica. In particolare, i pianeti si muovono su orbite limitate che, per quanto visto, sono necessariamente ellittiche; l'orbita circolare può essere considerata un caso limite di orbita ellittica (quando l'eccentricità tende a zero). Il fatto che il Sole occupi uno dei due fuochi si ritrova matematicamente osservando che nell'equazione polare (2.26), nel caso  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $r$  è proprio la distanza di un punto generico dell'ellisse da uno dei suoi due fuochi.

2. Consideriamo un intervallo di tempo piccolo  $\Delta t > 0$ . L'area  $\Delta A$  spazzata dal raggio vettore tra  $t$  e  $t + \Delta t$  è

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{x}(t) \times \vec{x}(t + \Delta t)|, \quad (2.35)$$

che segue dalla definizione geometrica di prodotto vettoriale (fare un disegno e convincersene). Sviluppando  $\vec{x}(t + \Delta t)$  al primo ordine secondo Taylor si ottiene

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{x}(t) \times [\vec{x}(t) + \Delta t \vec{v}(t) + O(\Delta t^2)]| = \quad (2.36)$$

La velocità areolare è, per definizione, la derivata rispetto al tempo dell'area spazzata al tempo  $t$ , ovvero

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \vec{v}| = \frac{|\ell_z|}{2\mu}. \quad (2.37)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione (1.28) del momento angolare del moto relativo. Dunque la velocità areolare risulta costante perché il momento angolare si conserva. Si rifletta sul fatto che tale conclusione è vera in generale: la forma specifica della legge di forza non gioca alcun ruolo.

3. Sia  $T$  il periodo di rivoluzione del pianeta. Integrando la (2.37) tra 0 e  $T$  (o su qualsiasi intervallo di tempo lungo esattamente  $T$ ), si ottiene

$$A(T) - A(0) = \frac{|\ell_z| T}{2\mu}. \quad (2.38)$$

A sinistra di tale equazione compare la variazione di area spazzata in un periodo di rivoluzione, che è pari all'area racchiusa dall'orbita ellittica, data dalla (2.34). Esplicitando  $T$  si ottiene

$$T = \frac{2\pi\mu ab}{|\ell_z|} = \frac{2\pi\mu\sqrt{\bar{r}}}{|\ell_z|} a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2},$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato  $\bar{r} = \ell_z^2/(\mu k)$ . Quadrando si ottiene

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad (2.39)$$

che è l'espressione matematica della terza legge di Keplero.

**Osservazione 2.1.** *Si osservi che la costante di proporzionalità tra  $T^2$  e  $a^3$  dipende dalla massa totale  $M$  e quindi varia, sebbene di poco, da pianeta a pianeta. Scrivendo infatti  $M = m_P + m_S$ , si può riscrivere la (2.39) nella forma*

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \frac{1}{1 + (m_P/m_S)},$$

dalla quale si vede che lo scostamento del rapporto  $T^2/a^3$  dalla costante "solare"  $4\pi^2/(Gm_S)$  dipende dal rapporto  $m_P/m_S$  tra massa del pianeta e massa del Sole, risultando al più pari a una parte su mille (nel caso di Giove).

Tabella 2.1: Dati dei pianeti del sistema solare

Pianeta	$a$ [U.A.]	$T$ (anni)	$\varepsilon$	$\theta$	$m_P/m_S$
Mercurio	0.39	0.24	0.205	7°00'	$1.6 \cdot 10^{-7}$
Venere	0.72	0.61	0.006	3°23'	$2.4 \cdot 10^{-6}$
Terra	1	1	0,016	0°00'	$3.0 \cdot 10^{-6}$
Marte	1.52	1.88	0.093	1°51'	$3.2 \cdot 10^{-7}$
Giove	5.20	11.83	0.048	1°18'	$0.9 \cdot 10^{-3}$
Saturno	9.55	29.43	0.055	2°29'	$2.8 \cdot 10^{-4}$
Urano	19.22	84.18	0.046	0°46'	$4.4 \cdot 10^{-5}$
Nettuno	30.11	164.56	0.008	1°46'	$0.5 \cdot 10^{-4}$
Plutone	39.60	247.47	0.246	17°07'	$1.7 \cdot 10^{-6}$

Nella tabella 2.1 che segue sono riportati alcuni dati relativi ai pianeti del sistema solare. Per la precisione, per ogni pianeta si riportano il semi-asse maggiore  $a$  dell'orbita misurato in Unità Astronomiche (U.A.); il periodo di rivoluzione  $T$  misurato in anni (terrestri); l'eccentricità  $\varepsilon$  dell'orbita; l'angolo di inclinazione  $\theta$  rispetto al piano dell'orbita terrestre, misurato in gradi; il rapporto  $m_P/m_S$  tra la massa del pianeta e la massa del Sole. Si tenga presente che che 1 U.A.  $\simeq 1.5 \cdot 10^8$  Km è la distanza media Terra-Sole, e che la massa del sole, a cui si fa riferimento, è  $m_S \simeq 2 \cdot 10^{30}$  Kg. Può anche essere utile tenere presente che il Sole ha un raggio medio  $R_S \simeq 7 \cdot 10^5$  Km, ovvero  $R_S \simeq 4.7 \cdot 10^{-3}$  U.A., condizione che consente di trascurare le dimensioni del Sole stesso nella studio della dinamica planetaria, almeno in prima approssimazione: per Mercurio, il pianeta più interno, il rapporto tra raggio solare e semi-asse maggiore vale  $R_S/a \simeq 0.01$ .

Per quanto riguarda la posizione del baricentro nella dinamica Sole-Pianeta, osserviamo che, essendo  $m_P/m_S \ll 1$ , si ha (dimostrarlo)

$$|\vec{X} - \vec{x}_S| \simeq \frac{m_P}{m_S} |(\vec{x}_P - \vec{x}_S)| . \quad (2.40)$$

Dunque la distanza del baricentro  $G$  dal centro del Sole è pari alla distanza del pianeta dal Sole moltiplicata per il rapporto di massa. Dalla tabella 2.1 si ottiene una stima del lato destro della (2.40), ovvero  $|\vec{X} - \vec{x}_S| \simeq (m_P/m_S)a$ , e si vede che tale distanza, per Giove è circa pari al raggio solare  $R_S$ , per Saturno, Nettuno e Urano è dello stesso ordine di grandezza di  $R_S$  ma minore (a decrescere nel dato ordine), mentre per tutti gli altri pianeti è molto più piccola di  $R_S$  (verificarlo).





# Capitolo 3

## Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo si discutono alcuni aspetti delle equazioni differenziali ordinarie, con particolare attenzione a quelli rilevanti per lo studio delle (piccole) oscillazioni dei sistemi di punti materiali. In quanto segue la variabile indipendente reale  $t$  è sempre denominata “tempo”; questa restrizione interpretativa non toglie alcuna generalità ai concetti presentati.

### 3.1 Concetti di base

Un'Equazione Differenziale Ordinaria (EDO) di ordine  $n$  è una equazione della forma

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = g\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}, t\right) \quad (3.1)$$

dove  $g(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t)$  è una assegnata funzione di  $n + 1$  variabili reali e l'incognita è una funzione reale di una variabile reale  $t \mapsto x(t)$ ; il dominio stesso di tale funzione, e la sua estensione massimale, è una incognita del problema. Si noti che quindi una equazione differenziale di ordine  $n$  è definita da una legge che pone esprime il valore assunto dalla derivata  $n$ -esima di una funzione al tempo  $t$  con il valore che assumono le sue derivate di ordine inferiore allo stesso istante  $t$ . L'equazione di Newton per un moto nello spazio unidimensionale  $\mathbb{E}^1$  è una EDO di ordine 2. L'EDO (3.1) si dice *autonoma* se la funzione  $g$  a secondo membro non dipende esplicitamente dal tempo  $t$  (l'ultimo argomento). Osserviamo che la singola EDO (3.1) di ordine  $n$  si può sempre scrivere come sistema equivalente di  $n$  equazioni del primo ordine, dando semplicemente dei nomi alle derivate della funzione incognita a partire dalla derivata prima fino alla derivata di ordine  $n - 1$ . Ad esempio, ponendo  $x = u_1$ ,  $dx/dt = u_2$ ,  $\dots$ ,  $d^{n-1}x/dt^{n-1} = u_n$ , si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = u_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} = u_n \\ \dot{u}_n = g(u_1, \dots, u_n, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Nel seguito non ci occuperemo del problema fondamentale dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni del sistema (3.2) in corrispondenza a un assegnato dato iniziale  $u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)$ . Osserviamo soltanto che, sotto ipotesi abbastanza deboli, ad esempio la derivabilità della funzione  $g$  rispetto a tutti gli argomenti in un intorno del punto  $(u_1(t_0), \dots, u_n(t_0), t_0)$ , si riesce a dimostrare che la soluzione del sistema (3.2) esiste ed è unica in un certo intervallo di tempo contenente l'istante iniziale  $t_0$ .

### 3.1.1 EDO autonome del primo ordine

L'equazione generale del primo ordine in forma normale è della forma  $\dot{x} = g(x, t)$ . In generale, assegnata la funzione  $g$  a secondo membro, tale equazione non si sa risolvere. Tuttavia, nel caso autonomo

$$\dot{x} = g(x) , \quad (3.3)$$

il problema della soluzione di tale equazione si sa ricondurre al problema del calcolo di integrali e di inversione di funzioni. Infatti l'equazione differenziale (3.3) si può scrivere  $dx/g(x) = dt$ , che integrata (in senso indefinito a sinistra e a destra) diventa  $G(x) = t + C$  essendo  $G(x)$  una primitiva di  $1/g(x)$  e  $C$  una costante arbitraria di integrazione. Invertendo (dove possibile) la funzione  $G$  si trova  $x(t) = G^{-1}(t + C)$ , che è la soluzione generale (ovvero una famiglia a un parametro di soluzioni) dell'equazione (3.3). Imponendo il dato iniziale  $x(0) = \xi$  si trova  $C = G(\xi)$ , ovvero la soluzione  $x(t) = G^{-1}(t + G(\xi))$ .

#### Analisi qualitativa

Risulta istruttivo eseguire quella che va sotto il nome di *analisi qualitativa* dell'equazione (3.3), che consiste nel determinare le proprietà generali (per ogni  $g$ ) o particolari (per una assegnata  $g$ ) delle soluzioni senza calcolare queste ultime. Consideriamo un punto "fittizio" che si muove sulla retta reale e occupa la posizione  $x(t)$  al tempo  $t$ . Allora l'equazione (3.3) fornisce la velocità  $\dot{x}(t)$  di tale punto al tempo  $t$  in funzione della sua posizione allo stesso istante. Possiamo dunque tracciare il grafico della funzione  $g(x)$  (farlo con qualche esempio) e ottenere alcune indicazioni immediate sul moto del punto.

Per prima cosa osserviamo che se  $x_0$  è uno zero qualsiasi di  $g$ , soddisfa cioè  $g(x_0) = 0$ , allora  $x(t) = x_0$  per ogni  $t$  è soluzione dell'equazione (3.3) (viceversa se una soluzione è costante allora il suo valore assunto è necessariamente uno zero di  $g$ ). Tali soluzioni costanti sono dette soluzioni (o punti) di *equilibrio*, o anche semplicemente equilibri: il punto è fermo. Tra due zeri consecutivi la funzione  $g(x)$  (supposta almeno continua) assume o valori positivi o valori negativi. Se in un dato intervallo  $g(x)$  è positiva, allora  $\dot{x} = g(x) > 0$  finché  $x$  appartiene a tale intervallo; corrispondentemente  $x(t)$  è una funzione monotona crescente e dunque il punto fittizio si sposta verso destra sull'asse delle  $x$ . Se invece  $g(x) < 0$  in un dato intervallo, il punto percorre quest'ultimo spostandosi verso sinistra. Si riesce dunque a comprendere la direzione del moto del punto tra un equilibrio e l'altro analizzando il segno di  $g$ .

Per uno zero semplice di  $g$  (cioè tale che  $g'(x_0) \neq 0$ ) si osserva il seguente fatto (fare un grafico e verificare quanto segue). Se  $g'(x_0) < 0$  le direzioni di moto del punto fittizio puntano verso  $x_0$  sia a sinistra che a destra di quest'ultimo. Dunque l'equilibrio  $x_0$  in questione risulta *stabile*, nel senso che se il punto fittizio parte vicino a tale equilibrio vi resta vicino per tutti i

tempi (in questo caso il punto si avvicina sempre di più all'equilibrio). Viceversa, un equilibrio (semplice)  $x_0$  caratterizzato da una pendenza di  $g$  positiva ( $g'(x_0) > 0$ ) risulta instabile: il punto fittizio esce da qualsiasi intorno di  $x_0$  e non vi torna.

Nel caso di zero non semplice, per il quale  $g'(x_0)$ , si possono presentare varie situazioni. Se ad esempio  $g''(x_0) > 0$  allora l'equilibrio risulta semi-stabile, con il punto fittizio che si avvicina all'equilibrio partendo alla sinistra e se ne allontana partendo alla destra di esso. Altri esempi sono  $g(x) = x^3$ , il cui unico equilibrio  $x_0 = 0$  (zero del terzo ordine) è instabile e  $g(x) = -x^3$ , il cui unico equilibrio  $x_0 = 0$  è stabile.

### Linearizzazione intorno a zeri semplici

Il ruolo giocato dalla derivata di  $g$  all'equilibrio si spiega facilmente andando ad analizzare l'equazione (3.3) intorno a uno zero semplice  $x_0$ . Per fare questo si opera la traslazione  $x(t) = x_0 + y(t)$  nell'ipotesi di  $y$  piccola (cioè di vicinanza a  $x_0$ ). Sostituendo nella (3.3) ed espandendo la  $g$  secondo Taylor al primo ordine si ottiene:

$$\dot{y} = g(x_0 + y) = g(x_0) + g'(x_0)y + O(y^2) . \quad (3.4)$$

Ora, tenendo conto del fatto che  $g(x_0) = 0$ , si trascura il resto  $O(y^2)$  e si studia l'equazione approssimata che regola la dinamica dello "scarto"  $y(t) = x(t) - x_0$ :

$$\dot{y} = c y , \quad (3.5)$$

dove  $c = g'(x_0)$ . Per risolvere l'equazione (3.5) cerchiamo la soluzione nella forma di una serie di potenze con coefficienti incogniti, ovvero  $y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ . Sostituendo e manipolando un po' si trova la seguente relazione di ricorrenza per i coefficienti  $a_n$ :

$$a_{n+1} = c \frac{a_n}{n+1} . \quad (3.6)$$

Si vede facilmente che la soluzione della (3.6) è data da

$$a_n = \frac{c^n}{n!} a_0 , \quad (3.7)$$

dove  $n! = n(n-1) \dots 1$  e il coefficiente  $a_0$  è arbitrario (verificarlo). Dunque la soluzione cercata per l'equazione (3.5) è della forma

$$y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{n \geq 0} a_0 \frac{(ct)^n}{n!} = a_0 e^{ct} . \quad (3.8)$$

Si osservi che  $y(0) = a_0$ . Tornando al nostro problema di partenza, con  $c = g'(x_0)$ , si vede subito che se  $g'(x_0) > 0$ , per ogni scelta di  $a_0 \neq 0$  lo scarto  $y(t)$  cresce in modulo nel tempo; viceversa, se  $g'(x_0) < 0$  lo scarto tende a zero e quindi  $x(t) \rightarrow x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3.1.2 EDO conservative del secondo ordine

L'EDO di ordine 2 più generale (in forma normale) è della forma

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t) . \quad (3.9)$$

Siamo interessati a tale tipo di equazioni e a loro sistemi perchè queste sono le equazioni che governano il moto di punti materiali soggetti a forze assegnate. Infatti, si può pensare all'equazione (3.9) come all'equazione di Newton che descrive il moto di un punto materiale sulla retta, con  $g \equiv f/m$ , essendo  $f$  la forza agente sul punto. La singola equazione del secondo ordine (3.9) è equivalente al sistema di due equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = g(x, v, t) \end{cases} . \quad (3.10)$$

L'EDO del secondo ordine (3.9), o il sistema equivalente (3.10), in generale, non si sa risolvere. Tuttavia, se ci si restringe al caso di  $g$  indipendente sia da  $\dot{x}$  che da  $t$ , si può effettuare una analisi qualitativa molto completa e ridurre il calcolo della soluzione a quello di una opportuna primitiva, seguito da una inversione, in modo del tutto simile a quanto visto per le equazioni del primo ordine.

Consideriamo dunque l'equazione autonoma del secondo ordine

$$\ddot{x} = g(x) . \quad (3.11)$$

Tale equazione è detta *conservativa* perché per essa vale una legge di conservazione dell'energia, qualsiasi sia  $g$ . Infatti, introducendo la funzione  $U(x)$  tale che  $U'(x) = -g(x)$ , detta energia potenziale, si dimostra che la funzione

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \quad (3.12)$$

è indipendente dal tempo. Vale dunque la legge di conservazione  $H = E$ , ovvero

$$H(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E , \quad (3.13)$$

dove il valore costante  $E$  della funzione energia totale  $H$  è determinato dal dato iniziale:  $E = H(\dot{x}(0), x(0)) = \dot{x}^2(0)/2 + U(x(0))$ . La legge di conservazione (3.13) determina gli intervalli di posizione consentiti. Infatti, osservando che  $\dot{x}^2 \geq 0$ , si ha

$$U(x) = E - \frac{\dot{x}^2}{2} \leq E ,$$

ovvero, per ogni fissato valore dell'energia  $E$ , i valori di  $x$  consentiti sono dati dall'insieme di sotto-livello  $E$  dell'energia potenziale  $U(x)$ , ovvero  $S_E = \{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E\}$ . Inoltre, la legge di conservazione dell'energia determina la forma delle curve di livello  $E$  della funzione  $H$  nel piano  $(x, \dot{x})$ . Infatti, risolvendo la (3.13) per  $\dot{x}$  si trova

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2[E - U(x)]} . \quad (3.14)$$

L'insieme delle curve determinate dalla (3.14), o equivalentemente dalla (3.13), al variare di  $E$  nel piano  $(x, \dot{x})$ , è detto *diagramma di fase* dell'equazione  $\ddot{x} = -U'(x)$ . Tracciare un diagramma di fase dettagliato costituisce l'obiettivo principale dell'analisi qualitativa delle EDO conservative del secondo ordine.

Osserviamo infine che l'equazione (3.14) consente di trovare la soluzione esplicita  $x(t)$  dell'equazione differenziale data. Infatti, scegliendo uno dei due "rami" (segno + o segno -) si ottiene una equazione autonoma del primo ordine che può essere risolta trovando una primitiva di  $1/\sqrt{2[E - U(x)]}$ , secondo il metodo illustrato sopra per le EDO autonome del primo ordine.

## 3.2 EDO lineari a coefficienti costanti

L'EDO di ordine  $n$  in forma normale (3.1) si dice *lineare* se la funzione  $g$  a secondo membro è una funzione lineare dei suoi primi  $n$  argomenti. In questo caso l'equazione ha la forma

$$\frac{d^n x}{dt^n} = c_0 x + c_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + c_n, \quad (3.15)$$

dove i coefficienti  $c_0, \dots, c_n$  possono dipendere dal tempo  $t$ . Nel caso in cui i coefficienti  $c_0, \dots, c_{n-1}$  sono indipendenti dal tempo l'EDO (3.15) si dice *lineare a coefficienti costanti, non omogenea* se  $c_n(t) \neq 0$  e *omogenea* se  $c_n = 0$ . Nel seguito ci occuperemo solo di EDO lineari a coefficienti costanti (omogenee e non), che sono le uniche per le quali esiste un metodo generale per la determinazione della soluzione.

**Esempio 3.1.** *La dinamica verticale di un punto materiale soggetto al proprio peso e alla resistenza del mezzo è descritta dall'equazione  $m\ddot{z} = -\gamma\dot{z} - mg$ . Dividendo per la massa  $m$  si ottiene una EDO lineare a coefficienti costanti di ordine  $n = 2$ , con  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = -\gamma/m$  e termine noto  $f = -g$ .*

**Esempio 3.2.** *Nel seguito verrà trattato in dettaglio il caso fisicamente rilevante dell'oscillatore armonico smorzato e forzato, descritto dall'equazione  $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t)$ . Dividendo per  $m$  si ottiene una EDO lineare a coefficienti costanti di ordine  $n = 2$ , con  $c_0 = -k/m$ ,  $c_1 = -\gamma/m$  e termine noto  $f(t) = F(t)/m$ .*

### 3.2.1 Proprietà generali

Riportiamo di seguito le proprietà principali della EDO lineare a coefficienti costanti

$$\boxed{\frac{d^n x}{dt^n} = c_0 x + c_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + f(t)}, \quad (3.16)$$

dove  $c_0, \dots, c_{n-1}$  sono indipendenti dal tempo e si è posto  $c_n(t) \equiv f(t)$ .

1. L'EDO lineare omogenea corrispondente ( $f = 0$ )

$$\frac{d^n x}{dt^n} = c_0 x + c_1 \frac{dx}{dt} + \cdots + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \quad (3.17)$$

ammette sempre  $n$  soluzioni linearmente indipendenti  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ . La funzione

$$x_{om}(t) \equiv a_1 x^{(1)}(t) + \dots + a_n x^{(n)}(t) \quad (3.18)$$

è soluzione dell'equazione (3.17) per ogni scelta dei parametri  $a_1, \dots, a_n$  e si chiama *soluzione generale dell'omogenea*.

2. Nel caso non omogeneo (3.16) la soluzione generale dell'equazione è della forma

$$x(t) = x_{om}(t) + x_p(t) , \quad (3.19)$$

dove  $x_{om}(t)$  è la soluzione dell'equazione omogenea (3.17), che è indipendente da  $f(t)$ , mentre  $x_p(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (3.16) che dipende dal termine noto  $f(t)$  ma non dipende da parametri (costanti arbitrarie).

3. Se il termine noto  $f(t)$  dell'equazione (3.16) è della forma  $f(t) = \sum_k f_k(t)$  (dove la somma può correre su un numero finito o infinito di termini), allora la soluzione particolare corrispondente  $x_p(t)$  è della forma  $x_p(t) = \sum_k x_p^{(k)}(t)$ , dove  $x_p^{(k)}(t)$  è la soluzione particolare dell'EDO non omogenea con termine noto  $f_k$ , cioè

$$\frac{d^n x}{dt^n} = c_0 x + c_1 \frac{dx}{dt} + \dots + c_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + f_k(t) .$$

Questa proprietà, di grande utilità pratica, è nota come principio di sovrapposizione.

### 3.2.2 Soluzione generale dell'omogenea

Per risolvere l'equazione (3.16) si deve saper risolvere l'omogenea corrispondente (3.17) e saper trovare la soluzione particolare. La soluzione dell'omogenea  $x_{om}$  si trova cercando di determinare le  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di cui essa è combinazione lineare. Tali soluzioni vengono inizialmente cercate nella forma esponenziale  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Il motivo di tale scelta è dettato dal fatto che  $d^j e^{\lambda t} / dt^j = \lambda^j e^{\lambda t}$ , cioè che derivare  $j$  volte la funzione  $e^{\lambda t}$  equivale a moltiplicarla per  $\lambda^j$ . Allora si vede subito che  $e^{\lambda t}$  è soluzione della EDO se e solo se  $\lambda$  è radice del polinomio

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - \lambda c_1 - c_0 , \quad (3.20)$$

ovvero soddisfa l'equazione

$$P_n(\lambda) = 0 , \quad (3.21)$$

detta *equazione caratteristica* associata all'EDO omogenea (3.17). Il polinomio (3.20) si chiama *polinomio caratteristico* e le sue radici si dicono *radici caratteristiche* della EDO (3.17). In questo modo si riconduce il problema della soluzione di una equazione differenziale al problema standard della ricerca delle radici di un polinomio di grado  $n$  con assegnati coefficienti reali. Notiamo subito che se l'equazione (3.21) ammette  $n$  soluzioni distinte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , allora le corrispondenti  $n$  funzioni esponenziali

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} , \dots , x^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t} ,$$

sono linearmente indipendenti (provare a dimostrarlo) e quindi la soluzione generale dell'EDO omogenea (3.17) è data da

$$x(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{\lambda_j t} . \quad (3.22)$$

Si può dimostrare che se la radice  $\lambda$  dell'equazione (3.21) ha molteplicità  $m$ , con  $2 \leq m \leq n$ , ad essa corrisponde una soluzione della forma  $\hat{P}_{m-1}(t)e^{\lambda t}$ , dove  $\hat{P}_{m-1}(t)$  è un arbitrario polinomio in  $t$  di grado  $m-1$ , caratterizzato quindi da  $m$  parametri indipendenti. Vedremo sotto un esempio del caso più semplice possibile ( $n = m = 2$ ). Tornando al caso di radici distinte (molto diffuso: si rifletta sul perché), osserviamo che la combinazione lineare (3.22) presenta un problema: del tutto in generale le radici del polinomio caratteristico sono complesse, dunque sono complessi gli esponenziali corrispondenti e, in generale, risulta complessa la combinazione lineare (3.22), reali o complessi che siano i coefficienti  $a_j$ . Per risolvere questo problema facciamo notare preliminarmente che, essendo reali i coefficienti dell'equazione (3.17), lo sono di conseguenza i coefficienti del polinomio caratteristico in (3.21) e quindi, come si dimostra subito, se  $\lambda_0 = \lambda'_0 + i\lambda''_0$  è una radice di tale polinomio lo è anche la sua complessa coniugata  $\bar{\lambda}_0 = \lambda'_0 - i\lambda''_0$ . Infatti se  $P_n(\lambda_0) = 0$ , coniugando tale identità e tenendo presente che i coefficienti di  $P_n$  sono reali, si ha  $0 = \overline{P_n(\lambda_0)} = P_n(\bar{\lambda}_0)$ . Ora, per ogni coppia di radici complesse e coniugate  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ , si consideri la combinazione lineare reale

$$ae^{\lambda_0 t} + \bar{a}e^{\bar{\lambda}_0 t} = 2\text{Re}(ae^{\lambda_0 t})$$

a coefficienti complessi e coniugati  $a, \bar{a}$ . Ponendo  $a = a' + ia''$ ,  $\bar{a} = a' - ia''$ ,  $\lambda_0 = \lambda'_0 + i\lambda''_0$ ,  $\bar{\lambda}_0 = \lambda'_0 - i\lambda''_0$  e sviluppando, si ottiene

$$\begin{aligned} ae^{\lambda_0 t} + \bar{a}e^{\bar{\lambda}_0 t} &= (a' + ia'')e^{(\lambda'_0 + i\lambda''_0)t} + (a' - ia'')e^{(\lambda'_0 - i\lambda''_0)t} = \\ &= e^{\lambda'_0 t} \left[ a' \left( e^{i\lambda''_0 t} + e^{-i\lambda''_0 t} \right) + ia'' \left( e^{i\lambda''_0 t} - e^{-i\lambda''_0 t} \right) \right] = \\ &= e^{\lambda'_0 t} [2a' \cos(\lambda''_0 t) - 2a'' \sin(\lambda''_0 t)] \equiv \\ &\equiv e^{\lambda'_0 t} [A \cos(\lambda''_0 t) + B \sin(\lambda''_0 t)] , \end{aligned} \quad (3.23)$$

avendo ridefinito, nell'ultimo passaggio, le costanti arbitrarie  $A \equiv 2a'$  e  $B \equiv -2a''$ , mentre nel terz'ultimo passaggio si è usata la formula di Eulero che connette l'esponenziale di un numero immaginario puro con le funzioni trigonometriche reali, precisamente

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} . \quad (3.24)$$

Dunque, nel caso di  $n$  soluzioni distinte dell'equazione caratteristica (3.21), di cui le prime  $r$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , reali e le rimanenti  $2k$ ,  $\lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+k}, \bar{\lambda}_{r+k}$ , complesse (cioè  $k$  coppie di radici complesse e coniugate), con  $r+2k = n$ , la soluzione generale dell'EDO omogenea (3.17), tenendo conto della (3.23), si scrive

$$x_{om}(t) = \sum_{j=1}^r a_j e^{\lambda_j t} + \sum_{j=r+1}^{r+k} e^{\lambda_j t} [A_j \cos(\lambda''_j t) + B_j \sin(\lambda''_j t)] , \quad (3.25)$$

in cui, nelle due somme, gli  $n$  coefficienti  $a_1, \dots, a_r, A_{r+1}, B_{r+1}, \dots, A_{r+k}, B_{r+k}$ , sono tutti reali.

### 3.2.3 Soluzione particolare

Risulta molto semplice determinare la soluzione particolare della EDO lineare a coefficienti costanti non omogenea (3.16) nel particolare caso in cui

$$f(t) = Ae^{zt} , \quad (3.26)$$

essendo  $A$  un parametro reale o complesso e  $z \in \mathbb{C}$  **non coincidente con alcuna radice caratteristica della EDO omogenea associata**. Quest'ultima condizione si scrive in forma compatta  $P_n(z) \neq 0$ . In questo caso si cerca una soluzione della (3.16) della forma  $Be^{zt}$ , cioè proporzionale allo stesso esponenziale della  $f(t)$  ma con ampiezza incognita  $B$ . Sostituendo  $x(t) = Be^{zt}$  nella (3.16) si ottiene  $B = A/P_n(z)$ , ovvero

$$x_p(t) = \frac{Ae^{zt}}{P_n(z)} . \quad (3.27)$$

Si vede chiaramente per quale motivo si è fatta l'ipotesi  $P_n(z) \neq 0$ . Ora, grazie al principio di sovrapposizione, nel caso piú generale in cui il termine noto sia combinazione lineare (finita o infinita) di esponenziali della forma (3.26), cioè

$$f(t) = \sum_k A_k e^{z_k t} , \quad (3.28)$$

si trova che la soluzione particolare corrispondente è

$$x_p(t) = \sum_k \frac{A_k}{P_n(z_k)} e^{z_k t} . \quad (3.29)$$

Si osservi che se il singolo termine noto della forma (3.26) è complesso, ovvero se  $z$  è complesso (indipendentemente dal fatto che  $A$  lo sia o meno), allora la soluzione particolare (3.27) è complessa. D'altra parte, si può dimostrare che se la somma (3.28) è reale, allora è reale anche la corrispondente soluzione particolare (3.29) (si suddividano i termini della somma in modo che o  $z_k, A_k \in \mathbb{R}$  oppure  $z_k, A_k \in \mathbb{C}$ ; in questo secondo caso si deve supporre che esista anche il termine con  $\bar{z}_k, \bar{A}_k$  e si procede come per la soluzione generale dell'omogenea).

Il caso di termine noto costante,  $f(t) = A$ , si riconduce a quello precedente assumendo  $z = 0$ . Se  $P_n(0) = -c_0 \neq 0$  allora la soluzione particolare corrispondente è  $x_p = -A/c_0$ , anche essa costante. Se invece  $P_n(0) = -c_0 = 0$  si procede come segue. Se  $c_1 \neq 0$  allora posto  $\dot{x}_p = -A/c_1$  si osserva che tutte le derivate di  $x_p(t)$  dalla seconda in poi sono nulle. Quindi  $x_p(t) = -At/c_1$  è la soluzione particolare cercata. Se invece  $c_1 = 0$  ma  $c_2 \neq 0$ , si pone  $\ddot{x}_p = -A/c_2$  e quindi si verifica, ragionando come sopra, che  $x_p(t) = -At^2/(2c_2)$  è la soluzione particolare cercata; e così via.

## 3.3 Esercizi

**Esercizio 3.1.** *Trovare la soluzione generale dell'equazione  $m\ddot{z} = -mg - \gamma\dot{z}$  (caduta dei gravi con attrito del mezzo). Trovare la soluzione corrispondente ai dati iniziali  $z(0) = h, \dot{z}(0) = 0$ .*



*Espandere la soluzione in serie di Taylor fino all'ordine due incluso attorno a  $t = 0$  e mostrare che per  $t \ll m/\gamma$  si ha moto uniformemente accelerato, cioè vale la legge di caduta dei gravi ideale.*

**Esercizio 3.2.** *Trovare la soluzione generale dell'equazione  $m\ddot{x} = -kx + mg + A \cos t$  (dinamometro forzato). Si assuma  $k/m \neq 1$ . Trovare la soluzione corrispondente ai dati iniziali  $x(0) = mg/k$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .*

**Esercizio 3.3.** *Trovare la soluzione generale dell'equazione (omogenea)  $\ddot{x} = \ddot{x} + 4x + e^{-t}$ . Suggerimento: si osservi che  $\lambda = 2$  è radice del polinomio caratteristico dell'equazione.*



# Capitolo 4

## Piccole oscillazioni di sistemi di punti materiali

### 4.1 Oscillatore armonico smorzato e forzato

Come esempio fondamentale di equazione lineare a coefficienti costanti (omogenea e non) discutiamo l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato e forzato, cioè l'equazione di Newton di un punto materiale di massa  $m$  che si muove su una retta, attaccato all'origine tramite una molla ideale di costante elastica  $k$ , soggetto ad attrito viscoso del mezzo (ad esempio l'aria) caratterizzato da un coefficiente  $\gamma > 0$  e soggetto ad una forza esterna dipendente dal tempo  $F(t)$ . Tale equazione si scrive

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t) ,$$

ovvero, dividendo per la massa

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x} + f(t)} , \quad (4.1)$$

dove si sono definite la *frequenza propria* dell'oscillatore “libero”

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} ; \quad (4.2)$$

il *coefficiente di smorzamento*

$$\mu \equiv \frac{\gamma}{2m} \quad (4.3)$$

e la *forza per unità di massa*

$$f(t) \equiv \frac{1}{m} F(t) . \quad (4.4)$$

Per quanto riguarda quest'ultima quantità, trattiamo il caso particolare di una forzante armonica, ovvero

$$f(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) + C , \quad (4.5)$$

con  $A$ ,  $B$  e  $C$  costanti arbitrarie. Per risolvere l'EDO (4.1) con la forza esterna della forma (4.5) risolviamo prima l'EDO omogenea ponendo  $f = 0$  e cercando soluzioni in forma esponenziale,

cioè  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Si ottiene l'equazione caratteristica

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0, \quad (4.6)$$

le cui due soluzioni sono

$$\lambda_{\pm} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}. \quad (4.7)$$

Si presentano quindi i seguenti tre casi.

1. Caso sovra-smorzato:  $\mu > \omega$ . Le due radici in (4.7) sono reali e negative ( $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ ) e la soluzione dell'omogenea (cioè della (4.1) con  $f = 0$ ) è

$$x_{om}(t) = ae^{\lambda_- t} + be^{\lambda_+ t} = ae^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t} + be^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})t}. \quad (4.8)$$

Si osservi che quando  $t \rightarrow +\infty$   $x_{om}(t) \rightarrow 0$  senza compiere alcuna oscillazione.

2. Caso critico:  $\mu = \omega$ . Le due radici in (4.7) sono reali, coincidenti e negative:  $\lambda_- = \lambda_+ = -\omega$ . In tale caso troviamo un solo esponenziale, cioè  $e^{-\omega t}$  e si verifica facilmente che l'altra soluzione dell'omogenea è  $te^{-\omega t}$  (farlo). Dunque la soluzione generale dell'omogenea in questo caso è

$$x_{om}(t) = ae^{-\omega t} + bte^{-\omega t} = (a + bt)e^{-\omega t}. \quad (4.9)$$

Si osservi che la soluzione reale  $-\mu = -\omega$  dell'equazione caratteristica ha molteplicità due (cioè si hanno due radici coincidenti) e la soluzione dell'omogenea è un polinomio di primo grado, con due coefficienti arbitrari, che moltiplica un esponenziale. Anche in questo caso quando  $t \rightarrow +\infty$   $x_{om}(t) \rightarrow 0$  senza compiere alcuna oscillazione.

3. Caso sotto-smorzato:  $\mu < \omega$ . Le due radici caratteristiche in (4.7) sono complesse e coniugate, ovvero

$$\lambda_{\pm} = -\mu \pm i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}. \quad (4.10)$$

La corrispondente soluzione generale dell'omogenea, per quanto visto nel paragrafo precedente, è

$$x_{om}(t) = e^{-\mu t} \left[ a \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \mu^2} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \mu^2} t\right) \right], \quad (4.11)$$

con  $a$  e  $b$  reali. Si osservi che anche in questo caso quando  $t \rightarrow +\infty$   $x_{om}(t) \rightarrow 0$ , ma il comportamento della soluzione è di tipo oscillatorio.

A questo punto cerchiamo la soluzione particolare dell'equazione (4.1) con forzante (4.5). Sfruttiamo il principio di sovrapposizione e cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$x_p(t) = x_p^{(1)} + x_p^{(2)}(t) + \overline{x_p^{(2)}(t)} + x_p^{(3)}(t) + \overline{x_p^{(3)}(t)}, \quad (4.12)$$

dove  $x_p^{(1)}$  è la soluzione particolare dell'equazione (4.1) con  $f_1 = C$ ,  $x_p^{(2)}(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione (4.1) con  $f_2(t) = Ae^{i\Omega t}/2$ , essendo la sua complessa coniugata corrispondente a  $\overline{f_2(t)}$ , mentre  $x_p^{(3)}(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione (4.1) con  $f_3 = Be^{i\Omega t}/(2i)$  e la sua complessa coniugata corrisponde a  $\overline{f_3(t)}$ . Notiamo che le componenti della forzante sono della forma esponenziale complessa (3.26), e che di conseguenza le componenti della particolare

corrispondente sono ancora della forma esponenziale (3.27) posto che il polinomio caratteristico dell'omogenea non si annulli in zero e in  $\pm i\Omega$ . Dalla (4.6) si ottiene subito  $P_2(0) = \omega^2$  e  $P_2(\pm i\Omega) = (\omega^2 - \Omega^2) \pm i2\mu\Omega$ , che sono quantità sempre diverse da zero. Si ha quindi

$$x_p^{(1)} = \frac{Ce^{0t}}{P_2(0)} = \frac{C}{\omega^2}; \quad (4.13)$$

$$x_p^{(2)}(t) = \frac{Ae^{i\Omega t}}{2P_2(i\Omega)} = \frac{Ae^{i\Omega t}}{2[(\omega^2 - \Omega^2) + i2\mu\Omega]} = \frac{Ae^{i\Omega t}}{2} \frac{(\omega^2 - \Omega^2) - i(2\mu\Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}; \quad (4.14)$$

$$x_p^{(3)}(t) = \frac{Be^{i\Omega t}}{2iP_2(i\Omega)} = \frac{Be^{i\Omega t}}{2i[(\omega^2 - \Omega^2) + i2\mu\Omega]} = \frac{Be^{i\Omega t}}{2i} \frac{(\omega^2 - \Omega^2) - i(2\mu\Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}. \quad (4.15)$$

Definiamo ora un un angolo  $\phi$  tramite le formule

$$\cos \phi = \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}}; \quad \sin \phi = \frac{(2\mu\Omega)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}}. \quad (4.16)$$

Tenendo presente che

$$e^{-i\phi} = \frac{(\omega^2 - \Omega^2) - i(2\mu\Omega)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}},$$

sommando le (4.13)-(4.15) come richiesto in (4.12) si ottiene la soluzione particolare corrispondente alla forzante (4.5):

$$x_p(t) = \frac{A \cos(\Omega t - \phi) + B \sin(\Omega t - \phi)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}} + \frac{C}{\omega^2}. \quad (4.17)$$

Si è trovato che la “risposta” dell'oscillatore ad una sollecitazione armonica di data frequenza e ampiezza, cioè la soluzione particolare corrispondente, è data dalla stessa funzione armonica, coseno o seno, con la stessa frequenza della sollecitazione, ma con un *ritardo di fase*  $\phi$  e una ampiezza che dipendono dalla frequenza stessa della sollecitazione, dalla frequenza propria dell'oscillatore e dal coefficiente di smorzamento.

**Osservazione 4.1.** Osserviamo che dalle definizioni (4.16) segue che  $\sin \phi \geq 0$ , quindi ci si può restringere a considerare valori dell'angolo  $\phi$  tali che  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

Ci riferiamo all'angolo  $\phi$  definito dalle (4.16) come al ritardo di fase perché la funzione coseno nella risposta (4.13), come funzione del tempo, è traslata a destra di una quantità  $\Delta t = \phi/\Omega$  rispetto alla funzione coseno della forzante:

$$\cos(\Omega t - \phi) = \cos(\Omega(t - \phi/\Omega)) = \cos(\Omega(t - \Delta t)),$$

cioè la risposta è in ritardo rispetto alla sollecitazione (ad esempio, partendo a  $t = 0$ , la sollecitazione è massima per la prima volta esattamente a  $t = 0$ , mentre la risposta è massima per la prima volta a  $t = \Delta t > 0$ ). Il ritardo di fase  $\phi$ , come funzione del coefficiente di smorzamento  $\mu$  e della frequenza della forzante  $\Omega$ , si comporta nel seguente modo (si faccia riferimento alle formule (4.16)). Per  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\sin \phi \rightarrow 0$  e  $\cos \phi \rightarrow \pm 1$  a seconda che il segno

di  $\omega > \Omega$  oppure  $\omega < \Omega$  cioè, corrispondentemente,  $\phi \rightarrow 0$  oppure  $\phi \rightarrow \pi$  e si dice che la risposta è in fase o in opposizione di fase con la forzante. Per  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\cos \phi \rightarrow 0$  e  $\sin \phi \rightarrow 1$ , cioè  $\phi \rightarrow \pi/2$  e si dice che la risposta è in quadratura (di fase) con la forzante. Per quanto riguarda la dipendenza dalla frequenza della forzante, se  $\Omega \rightarrow 0$  si ha  $\cos \phi \rightarrow 1$  e  $\sin \phi \rightarrow 0$ , cioè  $\phi \rightarrow 0$ . Invece, se  $\Omega \rightarrow \infty$  si ha  $\cos \phi \rightarrow -1$  e  $\sin \phi \rightarrow 0$ , cioè  $\phi \rightarrow \pi$ . Dunque, a coefficiente di smorzamento fissato, il ritardo di fase cresce con la frequenza della forzante, passando da zero a  $\pi$ , ovvero il ritardo nella risposta dell'oscillatore cresce.

Per quanto riguarda l'ampiezza della risposta (4.13), essa è data dall'ampiezza  $A$  della forzante esterna moltiplicata per la funzione

$$F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\mu\Omega)^2}} . \quad (4.18)$$

detta *fattore d'ampiezza*. Si ha  $F(0) = 1/\omega^2$  mentre  $F(\Omega) \sim 1/\Omega^2$  per  $\Omega \rightarrow \infty$ . Inoltre, si vede facilmente (farlo) che  $F(\Omega)$  ha un massimo in  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - 2\mu^2}$  se  $\omega > \sqrt{2}\mu$ ; se invece  $\omega < \sqrt{2}\mu$   $F(\Omega)$  è monotona decrescente. Si osservi che nel caso di "piccolo" coefficiente di smorzamento  $\mu$  (cioè  $\mu \ll \omega$ ) la frequenza della forzante alla quale si ha risposta massima è molto prossima alla frequenza propria  $\omega$ , poiché  $\sqrt{\omega^2 - 2\mu^2} \simeq \omega$ . Il valore massimo corrispondente del fattore d'ampiezza  $F(\Omega)$  è  $\max F = F(\sqrt{\omega^2 - 2\mu^2}) = 1/(2\mu\sqrt{\omega^2 - \mu^2}) \simeq 1/(2\mu\omega)$  per  $\mu$  piccolo e, corrispondentemente, il ritardo di fase  $\phi$  è prossimo a  $\pi/2$  (verificarlo). La risposta massima in quadratura ad una sollecitazione di frequenza prossima alla frequenza propria dell'oscillatore è un fenomeno fisico di fondamentale importanza, detto *risonanza*, che rianalizziamo in dettaglio nel prossimo paragrafo, nel caso ideale di assenza di attrito.

### 4.1.1 Comportamento asintotico generale

Da quanto visto fino ad ora, applicando il principio di sovrapposizione, segue che se la forzante  $f$  nell'equazione (4.1) ha la forma

$$f(t) = \sum_k [A_k \cos(\Omega_k t) + B_k \sin(\Omega_k t)] + C , \quad (4.19)$$

dove la somma può correre su un numero finito o infinito di indici, e la somma infinita può essere eventualmente rimpiazzata da un integrale:  $\sum_k \rightarrow \int d\Omega$ . La soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore armonico in questo caso è data da

$$x(t) = x_{om}(t) + \underbrace{\sum_k \frac{A_k \cos(\Omega_k t - \phi_k) + B_k \sin(\Omega_k t - \phi_k)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\mu\Omega_k)^2}} + \frac{C}{\omega^2}}_{x_p(t)} , \quad (4.20)$$

con  $x_{om}(t)$  data dalla (4.8), dalla (4.9) o dalla (4.11) a seconda del caso, e con il  $k$ -esimo ritardo di fase  $\phi_k$  determinato da

$$\cos \phi_k = \frac{(\omega^2 - \Omega_k^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\mu\Omega_k)^2}} ; \quad \sin \phi_k = \frac{(2\mu\Omega_k)}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\mu\Omega_k)^2}} . \quad (4.21)$$

Sono da sottolineare due aspetti. Il primo è che qualsiasi funzione  $f(t)$  può essere approssimata bene quanto si vuole, in ogni intervallo di tempo fissato a priori, da una somma di funzioni trigonometriche come quella che compare a destra nella (4.19). Ne segue che la casistica trattata sopra ha carattere molto generale. Il secondo è che in presenza di attrito ( $\mu > 0$ ), anche piccolo,  $x_{om}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Quindi per l'oscillatore smorzato si ha sempre  $x(t) \sim x_p(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ : dopo un tempo caratteristico dell'ordine di  $1/\mu$ , detto *transiente*, domina la componente particolare della soluzione, che per tale ragione viene detta "risposta" (asintotica) dell'oscillatore. Inoltre, se in presenza di piccolo attrito una delle frequenze, che caratterizzano la forzante, diciamo  $\Omega_s$ , è molto prossima alla frequenza propria  $\omega$ , cioè se si ha risonanza, allora la risposta in questione (cioè la  $x_p(t)$ ) è a sua volta dominata dal  $s$ -esimo termine della somma a destra della (4.20), ovvero:

$$\mu \ll \omega ; \Omega_s \simeq \omega ; t \rightarrow +\infty \Rightarrow x(t) \simeq \frac{A_s}{2\mu\omega} \sin(\omega t) - \frac{B_s}{2\mu\omega} \cos(\omega t) , \quad (4.22)$$

dove si è tenuto conto della analisi di ampiezza e fase svolta sopra nel caso di risonanza. Un fenomeno di questo tipo è alla base del fenomeno di sintonizzazione della radio, schematizzabile con una sequenza induttanza (L), resistenza (R), capacità (C) in serie, a cui viene applicato un assegnato voltaggio  $V(t)$  dipendente dal tempo. L'equazione del circuito appena descritto è

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{V} , \quad (4.23)$$

essendo l'incognita  $I(t)$  la corrente che circola nel circuito ed essendo  $L$ ,  $R$  e  $C$  l'induttanza, la resistenza e la capacità del circuito. Notare che a destra compare la derivata del voltaggio applicato. Dividendo la (4.23) per  $L$  e definendo  $2\mu \equiv R/L$ ,  $\omega^2 \equiv 1/(LC)$ ,  $f(t) \equiv \dot{V}(t)/L$ , e  $x(t) \equiv I(t)$ , si ottiene esattamente l'equazione (4.1). L'idea centrale è che variando la capacità del circuito, a induttanza e resistenza fissate, si varia la frequenza propria  $\omega$  dell'oscillatore. Le stazioni emettono invece su certe frequenze  $\Omega_k$  fissate. Quando la frequenza propria del circuito diventa molto prossima a una delle frequenze di trasmissione, cioè  $\omega \simeq \Omega_s$ , si ha risonanza, con una risposta descritta dalla (4.22) con  $\omega = \Omega_s$ ; in pratica tutto va come se l'unica componente forzante del circuito fosse quella dovuta al segnale di frequenza  $\Omega_s$ .

### 4.1.2 Battimenti e risonanza

Ai fini di approfondire lo studio del fenomeno della risonanza e di metterne in evidenza gli aspetti più caratteristici, consideriamo il caso di un oscillatore non smorzato sotto l'azione di una forzante cosinusoidale di data frequenza e ampiezza, ovvero risolviamo l'equazione

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + A \cos(\Omega t) . \quad (4.24)$$

Cercando una soluzione particolare della forma  $B \cos(\Omega t)$  si trova subito  $B = A/(\omega^2 - \Omega^2)$  e quindi la soluzione generale della EDO (4.24) è

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) . \quad (4.25)$$

A questo punto determiniamo le costanti arbitrarie  $a$  e  $b$  in termini dei dati iniziali, ovvero della posizione  $x(0) \equiv x_0$  e della velocità  $\dot{x}(0) \equiv v_0$  dell'oscillatore al tempo  $t = 0$ . Si trova  $a = x_0 - A/(\omega^2 - \Omega^2)$  e  $b = v_0/\omega$ , da cui, sostituendo in (4.25) segue

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{\frac{A}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]}_{x_A(t)} . \quad (4.26)$$

In questo modo abbiamo separato la parte di soluzione dipendente dai dati iniziali e quella dipendente dalla sollecitazione esterna, cioè proporzionale ad  $A$ , che per comodità chiamiamo  $x_A(t)$ . Ora, per  $\Omega$  non troppo vicina a  $\omega$ , la soluzione (4.26) è una combinazione lineare di funzioni armoniche a due frequenze distinte e non c'è altro da aggiungere. D'altra parte, se  $\Omega$  risulta molto vicina a  $\omega$ ,  $x_A(t)$  presenta un comportamento non banale: nel limite per  $\Omega \rightarrow \omega$ , a  $t$  fissato, tale componente è una forma indeterminata del tipo  $0/0$ , che va risolta. Per farlo riscriviamo la differenza di coseni nel modo seguente:

$$\cos(\Omega t) - \cos(\omega t) = 2 \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) .$$

Allora

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{A}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] = \\ &= \frac{2A}{\omega^2 - \Omega^2} \sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) = \\ &= \frac{A}{\omega + \Omega} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\omega - \Omega}{2} t\right)}{\frac{\omega - \Omega}{2}} \right] \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) = \\ &= \frac{A}{2\omega(1 - \varepsilon)} \left[ \frac{\sin(\varepsilon\omega t)}{\varepsilon\omega} \right] \sin(\omega(1 - \varepsilon)t) , \end{aligned} \quad (4.27)$$

avendo posto nell'ultimo passaggio

$$\varepsilon \equiv \frac{\omega - \Omega}{2\omega} . \quad (4.28)$$

In questo modo, il limite che ci interessa,  $\Omega \rightarrow \omega$ , equivale al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Prima di calcolare il limite esattamente, osserviamo che se il modulo  $|\varepsilon|$  della semi-differenza delle due frequenze è molto piccolo, cioè  $|\varepsilon| \ll 1$ , allora l'espressione  $x_A(t)$  nella quarta riga in (4.27) consiste in una funzione armonica oscillante rapidamente ad una frequenza molto prossima a  $\omega$ , modulata in ampiezza da una funzione armonica che oscilla molto lentamente tra i due valori  $\pm 1/(|\varepsilon|\omega)$  con frequenza  $|\varepsilon|\omega$  (e quindi periodo  $2\pi/(|\varepsilon|\omega)$ ). Questa modulazione lenta e rilevante dell'ampiezza delle oscillazioni veloci dà luogo al così detto fenomeno dei *battimenti*. Una delle sue manifestazioni tipiche è quella delle vibrazioni del vetro di una finestra sottoposta ad opportune sollecitazioni acustiche dall'esterno; in questo caso le vibrazioni veloci del vetro, modulate lentamente in ampiezza, si possono udire con chiarezza. Il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  della (4.27) si calcola immediatamente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_A(t) = \frac{A}{2\omega} t \sin(\omega t) . \quad (4.29)$$



Dunque se la risonanza è esatta, cioè se la frequenza della forzante coincide esattamente con quella propria, la componente della soluzione che dipende dalla forzante è rappresentata da un'oscillazione armonica a frequenza propria con ampiezza crescente linearmente col tempo. Ovviamente questo tipo di risposta ad una sollecitazione esterna non può durare molto a lungo: per  $t$  sufficientemente grande i massimi di  $|x_A(t)|$  divengono talmente grandi da causare la rottura fisica dell'oscillatore o la perdita di validità dell'approssimazione lineare sulle forze coinvolte. Nella realtà, ciò che può prevenire la rottura in risonanza delle strutture oscillanti è l'attrito, che qui abbiamo trascurato. In presenza di (piccolo) attrito, la fenomenologia è simile a quella descritta sopra per  $t \ll 1/\mu$ , mentre da  $t \simeq 1/\mu$  in poi si ha  $x(t) \simeq x_p(t)$ , i battimenti terminano e si ha una risposta asintotica della forma discussa nel paragrafo precedente, con ampiezza limitata. Si noti che affinché i battimenti siano osservabili è necessario che  $1/\mu \gg 2\pi/(|\varepsilon|\omega)$ ; si rifletta sul perché. Ovviamente la risonanza può avere conseguenze disastrose anche in presenza di attrito. Questo avviene se l'ampiezza asintotica della risposta, sebbene limitata, è comunque troppo grande; un esempio è proprio la rottura dei vetri sottoposti a opportune sollecitazioni acustiche.

## 4.2 Piccoli spostamenti di sistemi di punti attorno all'equilibrio

Supponiamo che un dato sistema di  $n$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_n$  sia specificato dalle forze  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  indipendenti dal tempo. Il sistema è descritto allora dalle equazioni di Newton

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_1(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \\ \vdots \\ m_n \vec{a}_n = \vec{f}_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \end{cases} \quad (4.30)$$

La soluzione di un sistema di questo tipo, cioè l'insieme di tutte le posizioni dei punti al variare del tempo, quando vengano specificate le posizioni e le velocità di ogni punto al tempo  $t = 0$ , in generale non si sa trovare, se non per sistemi molto particolari. Una classe di soluzioni di fondamentale importanza è quella degli equilibri. Si dice che il sistema descritto dalle equazioni (4.30) è in equilibrio se le velocità dei punti sono tutte nulle ( $\vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_n = \vec{0}$ ) e le posizioni soddisfano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \vec{f}_1(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{f}_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = \vec{0} \end{cases} \quad (4.31)$$

Dunque se un sistema di punti è in equilibrio i punti sono tutti fermi in posizioni tali che la forza totale a cui è soggetto ogni punto è nulla (e quindi lo è l'accelerazione, cioè la velocità resta nulla). Per gli sviluppi che seguono è conveniente introdurre i vettori

$$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} ; \quad \vec{F} \equiv \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

che hanno  $N = nD$  componenti, essendo  $n$  il numero di punti materiali del sistema e  $D$  la dimensione dello spazio fisico in cui si muovono i punti ( $D = 1, 2, 3$  a seconda dei casi). In termini dei vettori (4.32) il sistema di equazioni di Newton (4.30) si scrive

$$\begin{cases} M_1 \ddot{X}_1 = F_1(X_1, \dots, X_N, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_N) \\ \vdots \\ M_N \ddot{X}_N = F_N(X_1, \dots, X_N, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_N) \end{cases} \Leftrightarrow M \ddot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}), \quad (4.33)$$

dove  $M_1 = \dots = M_D = m_1$ ,  $M_{D+1} = \dots = M_{2D} = m_2$ , ecc., essendo  $M$  la matrice diagonale  $N \times N$  delle masse, i cui elementi sulla diagonale principale sono  $M_1, \dots, M_N$ . Il sistema di equazioni che determina le posizioni di equilibrio dei punti si scrive invece

$$\begin{cases} F_1(X_1, \dots, X_N, 0, \dots, 0) = 0 \\ \vdots \\ F_N(X_1, \dots, X_N, 0, \dots, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{X}, \vec{0}) = \vec{0}. \quad (4.34)$$

Ora vogliamo capire cosa succede se il sistema viene posto inizialmente in prossimità di un equilibrio, eventualmente sotto l'azione di sollecitazioni esterne. A tale scopo fissiamo una soluzione  $(\vec{x}_1^{(eq)}, \dots, \vec{x}_n^{(eq)})$  del sistema (4.31), ovvero un vettore di posizioni di equilibrio

$$\vec{X}^{(eq)} \equiv \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(eq)} \\ \vdots \\ \vec{x}_n^{(eq)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1^{(eq)} \\ \vdots \\ X_N^{(eq)} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

soluzione del sistema (4.34), cioè tale che  $\vec{F}(\vec{X}^{(eq)}, \vec{0}) = \vec{0}$ . Supponendo quindi che il sistema si muova "attorno" all'equilibrio, poniamo

$$\vec{X}(t) = \vec{X}^{(eq)} + \vec{\xi}(t), \quad (4.36)$$

dove  $\vec{\xi}$  è anch'esso un vettore a  $N$  componenti. Sostituendo la traslazione (4.36) nel sistema di Newton (4.33) si ottiene il sistema equivalente

$$M \ddot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{X}_{eq} + \vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}). \quad (4.37)$$

A questo punto si suppone che i moduli  $|\vec{\xi}|$  e  $|\dot{\vec{\xi}}|$  dello spostamento relativo rispetto all'equilibrio e della sua velocità siano "piccoli", ovvero che il sistema si muova vicino all'equilibrio, senza allontanarsi troppo dalla configurazione spaziale che lo caratterizza, e comunque muovendosi lentamente. Sotto tale ipotesi si può sviluppare secondo Taylor il lato destro della (4.37) al primo ordine in  $\vec{\xi}$  e  $\dot{\vec{\xi}}$ , trascurare i termini di grado superiore al primo e studiare la dinamica del sistema che ne risulta. A posteriori si verifica se l'ipotesi di prossimità all'equilibrio è consistente o no. Scrivendo la  $j$ -esima componente del sistema (4.37) ed eseguendo lo sviluppo si ottiene

$$\begin{aligned} M_i \ddot{\xi}_i &= F_i(X_1^{(eq)} + \xi_1, \dots, X_N^{(eq)} + \xi_N, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_N) = F_i(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) \xi_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) \dot{\xi}_j = \\ &= - \sum_{j=1}^N K_{ij} \xi_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} \dot{\xi}_j, \end{aligned} \quad (4.38)$$

avendo tenuto conto del fatto che  $F_i(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, N$  e avendo definito, nell'ultimo passaggio, le due matrici  $N \times N$  costanti  $K$  e  $G$ , con rispettivi elementi

$$K_{ij} \equiv -\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) ; \quad (4.39)$$

$$G_{ij} \equiv -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}(\vec{X}_{eq}, \vec{0}) . \quad (4.40)$$

Il sistema lineare (4.38) si può scrivere in forma vettoriale compatta

$$M\ddot{\vec{\xi}} = -K\vec{\xi} - G\dot{\vec{\xi}} . \quad (4.41)$$

Questo sistema di equazioni di Newton descrive i movimenti “liberi” che il sistema compie attorno all'equilibrio, finché gli spostamenti dei punti e le loro velocità restano sufficientemente piccoli. Nel caso in cui i punti materiali del sistema sono anche soggetti a forze esterne  $E_1(t), \dots, E_N(t)$  dipendenti solo dal tempo, il sistema di equazioni (4.41) si scrive

$$M\ddot{\vec{\xi}} = -K\vec{\xi} - G\dot{\vec{\xi}} + \vec{E}(t) . \quad (4.42)$$

Se la forza  $\vec{F}$  non è specificata, le matrici  $K$  e  $G$  possono essere di qualsiasi tipo. Un buon modello di forza  $\vec{F}$  è della forma

$$\vec{F}(\vec{X}, \vec{V}) = -\frac{\partial U(\vec{X})}{\partial \vec{X}} - \Gamma \vec{V} , \quad (4.43)$$

dove  $U(\vec{X})$  è l'energia potenziale della componente conservativa della forza e  $\Gamma$  è la matrice dei coefficienti di attrito, che si può assumere diagonale e definita positiva. Si noti che per il modello di forza (4.43), la funzione energia totale

$$H(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) = \frac{\dot{\vec{X}} \cdot M\dot{\vec{X}}}{2} + U(\vec{X}) \quad (4.44)$$

soddisfa l'identità

$$\dot{H} = -\dot{\vec{X}} \cdot \Gamma \dot{\vec{X}} \quad (4.45)$$

lungo le soluzioni della equazione di Newton  $M\ddot{\vec{X}} = \vec{F}$  (lo si dimostri). Quindi se  $\Gamma = 0$   $\dot{H} = 0$ , cioè l'energia totale  $H$  si conserva. Per tale ragione le forze di origine potenziale, cioè soddisfacenti  $\vec{F} = -\nabla U$ , si dicono conservative.

Per il modello (4.43), si ha che le configurazioni di equilibrio  $\vec{X}^{(eq)}$  sono i punti critici dell'energia potenziale  $U$ , ovvero i punti tali che  $\nabla U(\vec{X}) = \vec{0}$ . La matrice  $K$  coincide, per la (4.43) e la (4.39), con la matrice delle derivate seconde della  $U$ , o matrice hessiana, calcolata nel punto di equilibrio:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}(\vec{X}^{(eq)}) .$$

Il caso più interessante, ai fini dello studio dei piccoli spostamenti del sistema attorno all'equilibrio, è quello in cui il punto di equilibrio  $\vec{X}^{(eq)}$  è un punto di minimo locale non degenere per la

funzione  $U$ . In questo caso la matrice hessiana di  $U$  calcolata all'equilibrio, cioè la matrice  $K$ , è definita positiva, ovvero ha tutti gli autovalori positivi (gli autovalori sono certamente reali perché tale matrice è simmetrica) o, equivalentemente, la forma quadratica  $\vec{u} \cdot K\vec{u}$  è positiva per ogni vettore  $\vec{u}$  non identicamente nullo. Come si vedrà, questo assicura che i movimenti liberi (non soggetti a sollecitazioni esterne) che il sistema compie attorno all'equilibrio, se inizialmente piccoli, restano tali nel tempo.

Per il modello (4.43), la matrice  $G$  definita in (4.40) risulta esattamente uguale a  $\Gamma$ . Nel seguito supporremo che  $\Gamma$  sia proporzionale alla matrice delle masse  $M$  tramite una costante  $2\mu > 0$ , ovvero

$$G = \Gamma = 2\mu M . \quad (4.46)$$

Questo equivale a supporre che ogni punto del sistema sia soggetto, almeno per velocità piccole, a una forza di attrito viscoso con coefficiente proporzionale alla propria massa. Tale scelta è chiaramente molto artificiale ed è fatta qui per semplificare la trattazione matematica del problema. In molti casi di interesse fisico la matrice  $G$  che definisce le forze d'attrito è simmetrica ma soltanto semi-definita positiva, e non proporzionale alla matrice  $M$  delle masse.

### 4.3 Studio del sistema lineare

Studiamo quindi il sistema (4.42) in cui  $G = 2\mu M$  e  $K$  è una matrice simmetrica definita positiva:

$$M\ddot{\xi} = -K\xi - 2\mu M\dot{\xi} + \vec{E}(t) . \quad (4.47)$$

Moltiplicando tutto da sinistra per  $M^{-1}$  (che equivale a dividere la  $i$ -esima componente dell'equazione vettoriale per  $M_i$ ) e definendo le quantità

$$A \equiv M^{-1}K \quad ; \quad \vec{e}(t) \equiv M^{-1}\vec{E}(t) , \quad (4.48)$$

si ottiene il sistema

$$\boxed{\ddot{\xi} = -A\xi - 2\mu\dot{\xi} + \vec{e}(t)} . \quad (4.49)$$

Nell'appendice alla fine del capitolo si dimostra che la matrice  $A = M^{-1}K$  (l'unica matrice che appare nel sistema (4.49) con le ipotesi fatte) ammette sempre  $N$  autovalori reali e positivi, non necessariamente distinti, ai quali corrispondono  $N$  autovettori reali linearmente indipendenti (ma non mutuamente ortogonali, in generale). Questo teorema spettrale per  $A$  si riduce a quello standard per matrici simmetriche nel caso semplice di masse tutte uguali, per il quale  $M = m\mathbb{I}_N$  e quindi  $A = \frac{1}{m}K$  (in tale caso gli autovettori di  $A$  sono anche mutuamente ortogonali).

Il sistema (4.49) si risolve proiettandolo sulla base degli autovettori di  $A$ . Indichiamo con  $\vec{u}^{(j)}$  il  $j$ -esimo autovettore di  $A$  corrispondente al  $j$ -esimo autovalore  $\omega_j^2 > 0$ :

$$A\vec{u}^{(j)} = \omega_j^2\vec{u}^{(j)} \quad (j = 1, \dots, N) . \quad (4.50)$$

Poiché  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(N)}$  costituiscono una base dello spazio euclideo  $\mathbb{E}^N$ , i vettori  $\vec{\xi}(t)$  ed  $\vec{e}(t)$  si scrivono in modo unico come combinazione lineare di questi, cioè esistono unici i coefficienti

reali  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  e  $f_1(t), \dots, f_N(t)$  tali che

$$\vec{\xi}(t) = x_1(t)\vec{u}^{(1)} + \dots + x_N(t)\vec{u}^{(N)} = \sum_{j=1}^N x_j(t)\vec{u}^{(j)} ; \quad (4.51)$$

$$\vec{\epsilon}(t) = f_1(t)\vec{u}^{(1)} + \dots + f_N(t)\vec{u}^{(N)} = \sum_{j=1}^N f_j(t)\vec{u}^{(j)} . \quad (4.52)$$

Si faccia attenzione:  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  e  $f_1(t), \dots, f_N(t)$  sono le componenti di  $\vec{\xi}(t)$  ed  $\vec{\epsilon}(t)$  nella base degli autovettori  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(N)}$  di  $A$ , mentre  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)$  ed  $\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_N(t)$  sono le componenti degli stessi vettori nella base canonica di  $\mathbb{E}^N$ .

Sostituendo (4.51) e (4.52) in (4.49), e tenendo conto della (4.50) si ottiene

$$\sum_{j=1}^N \ddot{x}_j(t)\vec{u}^{(j)} = - \sum_{j=1}^N \omega_j^2 x_j(t)\vec{u}^{(j)} - \sum_{j=1}^N 2\mu \dot{x}_j(t)\vec{u}^{(j)} + \sum_{j=1}^N f_j(t)\vec{u}^{(j)} ,$$

che si può riscrivere come

$$\sum_{j=1}^N [\ddot{x}_j + 2\mu \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j - f_j] \vec{u}^{(j)} = \vec{0} .$$

Poiché gli autovettori di  $A$  sono linearmente indipendenti, i coefficienti di quest'ultima combinazione lineare devono essere tutti nulli, devono cioè valere le  $N$  equazioni

$$\boxed{\ddot{x}_j = -\omega_j^2 x_j - 2\mu \dot{x}_j + f_j(t)} \quad (j = 1, \dots, N) . \quad (4.53)$$

Troviamo quindi che il moto del sistema è descritto da  $N$  equazioni indipendenti di oscillatore armonico smorzato e forzato. Ogni oscillazione indipendente ha luogo lungo uno degli  $N$  auto-spazi di  $A$ . Si osservi che per risolvere le  $N$  EDO (4.53) si deve conoscere il  $j$ -esimo autovalore di  $A$ , cioè  $\omega_j^2$  e la  $j$ -esima componente di  $\vec{\epsilon}$  nella base degli autovettori di  $A$ , cioè  $f_j$ . Una volta note le  $N$  soluzioni  $x_j(t)$  delle  $N$  equazioni (4.53) (ognuna della forma soluzione generale dell'omogenea più soluzione particolare), è noto il vettore  $\vec{\xi}(t)$  e quindi è nota la soluzione  $\vec{X}(t) = \vec{X}^{(eq)} + \vec{\xi}(t)$  del problema di partenza.

Il procedimento appena illustrato si chiama *decomposizione in modi normali di oscillazione* della dinamica del sistema; le coordinate  $x_1, \dots, x_N$  si chiamano *coordinate normali* del sistema. Le frequenze  $\omega_1, \dots, \omega_N$ , cioè le radici degli autovalori della matrice  $A$ , si chiamano *frequenze proprie* (o caratteristiche o normali) di oscillazione del sistema. Si osservi che, solo nel caso di oscillazioni libere, cioè in assenza di sollecitazioni esterne ( $\vec{\epsilon} = \vec{0}$ ), si possono sempre scegliere i dati iniziali in modo che uno solo dei modi normali di oscillazione del sistema sia "acceso", ad esempio l' $s$ -esimo:  $x_j(t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$  e ogni  $j \neq s$ ;  $x_s(t) \neq 0$ . In tale caso  $\vec{\xi}(t) = x_s(t)\vec{u}^{(s)}$ .

Per dati iniziali generici il moto libero consiste in una sovrapposizione di tutti i modi normali e, in presenza di attrito ( $\mu > 0$ ) si ha  $\vec{\xi}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . In presenza di sollecitazioni esterne ( $\vec{\epsilon} \neq \vec{0}$ ) si ha invece una asintotica di  $\vec{\xi}(t)$  non banale, dipendente dalla forma specifica delle diverse componenti della sollecitazione:  $x_j(t) \sim x_p[f_j]$  per  $t \rightarrow +\infty$ , essendo  $x_p[f_j]$  la soluzione particolare della (4.53) corrispondente a  $f_j$ .

## Appendice: teorema spettrale per $A = M^{-1}K$

Sia  $K$  simmetrica e definita positiva. Consideriamo la matrice  $A = M^{-1}K$  e il relativo problema agli autovalori  $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ , ovvero

$$(M^{-1}K)\vec{u} = \lambda\vec{u}. \quad (4.54)$$

Vale il seguente

**TEOREMA:** *Gli autovalori di  $A = M^{-1}K$  sono reali positivi e ad essi corrispondono  $N$  autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Spezziamo la dimostrazione del teorema in tre parti.

1. Gli autovalori di  $A$  sono reali.

Osserviamo preliminarmente che, data la matrice diagonale  $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$ , i cui elementi  $M_i$  sulla diagonale principale sono tutti positivi, è ben definita qualsiasi potenza reale  $M^s$  dalla formula

$$M^s \equiv \text{diag}(M_1^s, \dots, M_N^s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Ponendo  $\vec{u} = M^{-1/2}\vec{v}$  nella (4.54) e moltiplicandola per  $M^{1/2}$  si ottiene

$$(M^{-1/2}KM^{-1/2})\vec{v} = \lambda\vec{v}. \quad (4.55)$$

Notiamo che, essendo  $K = K^T$ , si ha

$$(M^{-1/2}KM^{-1/2})^T = M^{-1/2}K^T M^{-1/2} = (M^{-1/2}KM^{-1/2}),$$

cioè la matrice  $M^{-1/2}KM^{-1/2}$  è simmetrica e quindi (per il teorema spettrale valido per matrici simmetriche e reali) il problema agli autovalori (4.55) ha per soluzione  $N$  autovalori reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  ai quali corrispondono  $N$  autovettori reali  $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}$  mutuamente ortogonali tra loro:  $\vec{v}^{(i)} \cdot \vec{v}^{(j)} = 0$  se  $i \neq j$ . Ma gli autovalori  $\lambda_j$  della matrice  $M^{-1/2}KM^{-1/2}$  sono esattamente gli autovalori di  $A = M^{-1}K$ .

2. Gli autovalori di  $A$  sono positivi.

Moltiplicando scalarmente da sinistra la (4.55) per  $\vec{v}$ , risolvendo per  $\lambda$  e tenendo conto del fatto che  $\vec{u} = M^{-1/2}\vec{v}$ , si ottiene

$$\lambda = \frac{\vec{v} \cdot (M^{-1/2}KM^{-1/2})\vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \frac{(M^{-1/2}\vec{v}) \cdot K(M^{-1/2}\vec{v})}{|\vec{v}|^2} = \frac{\vec{u} \cdot K\vec{u}}{|\vec{v}|^2} > 0,$$

la disuguaglianza essendo implicata dal fatto che  $K$  è definita positiva.

3. Gli autovettori di  $A$  sono linearmente indipendenti.

Gli autovettori  $\vec{u}^{(1)}, \dots, \vec{u}^{(N)}$  di  $A$  sono legati agli autovettori  $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(N)}$  di  $M^{-1/2}KM^{-1/2}$  dalla relazione  $\vec{u}^{(i)} = M^{-1/2}\vec{v}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Poiché i vettori  $\vec{v}^{(i)}$  sono linearmente indipendenti (sono mutuamente ortogonali) e  $M^{-1/2}$  è invertibile (non singolare), allora i vettori  $\vec{u}^{(i)}$  sono linearmente indipendenti. Infatti, dalla relazione

$$c_1\vec{u}^{(1)} + \dots + c_N\vec{u}^{(N)} = M^{-1/2}(c_1\vec{v}^{(1)} + \dots + c_N\vec{v}^{(N)})$$

e dall'invertibilità di  $M^{-1/2}$ , segue che

$$c_1\vec{u}^{(1)} + \dots + c_N\vec{u}^{(N)} = \vec{0} \Leftrightarrow c_1\vec{v}^{(1)} + \dots + c_N\vec{v}^{(N)} = \vec{0} \Leftrightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

## 4.4 Esercizi

**Esercizio 4.1.** *Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è connesso ad un punto  $Q$  da una molla ideale di costante  $k$  e il punto  $P$  si muove lungo la verticale per  $Q$ , sotto l'azione della gravità. Il punto  $Q$  si muove di moto assegnato: se l'asse verticale diretto verso il basso è l'asse  $x$ , allora  $x_Q = A \cos(\Omega t)$ . Si chiede di determinare il moto di  $P$  e di discutere in dettaglio cosa succede al variare di  $\Omega$ .*

**Esercizio 4.2.** *Si consideri il sistema costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di uguale massa  $m$ , che si muovono lungo l'asse  $x$ . Tre molle ideali di costante  $k$  connettono un punto all'origine, i due punti tra loro, e l'altro punto ad un punto fissato a destra dell'origine a distanza  $L$ . Determinare il moto del sistema, ovvero le ascisse  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  dei due punti materiali al tempo  $t$ . In particolare, si descriva come appaiono le singole oscillazioni normali nello spazio fisico.*

**Esercizio 4.3.** *Considerare il sistema del precedente esercizio ma con le masse dei due punti  $m_1$  e  $m_2$  diverse. Calcolare le frequenze proprie di oscillazione del sistema.*

**Esercizio 4.4.** *Considerare il sistema dell'esercizio 4.2 con l'aggiunta di una forza esterna  $E_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t)$  che agisce su  $P_1$  e di una forza esterna  $E_2(t) = A_2 \cos(\Omega_2 t)$  che agisce su  $P_2$ . Determinare il moto del sistema.*

**Esercizio 4.5.** *Considerare il sistema dell'esercizio 4.2 ma con la parete di destra che si muove di moto assegnato:  $L(t) = L_0 + B \sin(\Omega t)$ . Determinare il moto dei due punti materiali.*

**Esercizio 4.6.** *Si consideri il sistema costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di uguale massa  $m$  e due molle ideali di costante  $k$ , tale che  $P_1$  è connesso tramite una delle molle ad un punto  $O$  fissato sul "soffitto", mentre  $P_2$  è connesso a  $P_1$  tramite l'altra molla (la sequenza dall'alto verso il basso è  $O$ -molla- $P_1$ -molla- $P_2$ ). I due punti sono liberi di oscillare solo lungo l'asse verticale (asse  $x$  orientato verso il basso, con origine in  $O$ ), sotto l'azione della gravità. Si determini la posizione di equilibrio del sistema e il moto di oscillazione che questo compie attorno ad essa.*

**Esercizio 4.7.** *Si consideri il sistema dell'esercizio precedente con le masse dei due punti  $m_1$  e  $m_2$  diverse. Si calcolino le frequenze proprie di oscillazione del sistema.*

**Esercizio 4.8.** *Si consideri un sistema costituito da tre punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  di uguale massa  $m$ , vincolati a muoversi nel piano  $x, y$  lungo le rette di equazione  $x = L/4$ ,  $x = L/2$  e  $x = 3L/4$ , rispettivamente. I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono connessi da una molla ideale di costante  $k$ , e lo stesso vale per i punti  $P_2$  e  $P_3$ . Inoltre, una molla ideale di costante  $k$  connette  $P_1$  all'origine  $O$  del piano e una molla identica connette  $P_3$  al punto di coordinate  $(L, 0)$ . Sul sistema NON agisce la gravità. Determinare la dinamica del sistema, descrivendo in dettaglio come appaiono le oscillazioni normali nello spazio fisico.*

**Esercizio 4.9.** *Si consideri il sistema descritto nell'esercizio precedente sotto l'azione della gravità. Determinare la configurazione di equilibrio e mostrare che le equazioni che descrivono gli spostamenti del sistema attorno ad essa sono identiche a quelle del sistema in assenza di gravità.*

**Esercizio 4.10.** *Si consideri il sistema costituito da tre punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  di uguale massa  $m$ , vincolati a muoversi lungo l'asse  $x$ . I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono connessi da una molla ideale di costante  $k$ , e lo stesso vale per i punti  $P_2$  e  $P_3$ . Inoltre, una molla ideale di costante  $k$  connette  $P_1$  all'origine  $O$  dell'asse e una molla identica connette  $P_3$  al punto di ascissa  $L$ . Determinare la dinamica del sistema descrivendo in dettaglio come appaiono le oscillazioni normali nello spazio fisico. Suggestione: confrontare le equazioni del moto di deviazione dall'equilibrio con quelle dei due esercizi precedenti.*

**Esercizio 4.11.** *Considerare il seguente sistema piano di tre punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  di uguale massa  $m$ .  $P_1$  si muove a ordinata fissata  $y_1 = 0$  ed è soggetto a una forza  $E_1(t) = B \cos(\Omega t)$ .  $P_2$  e  $P_3$  si muovono a ordinata fissata  $y_2 = h$  e  $y_3 = 2h$ , rispettivamente. Due molle ideali di costante  $k$  collegano  $P_1$  con  $P_2$  e  $P_2$  con  $P_3$ . I tre punti sono soggetti a una forza di attrito di coefficiente  $-2m\mu$ . Sul sistema NON agisce la gravità. Determinare la dinamica asintotica del sistema (per tempi lunghi) nel limite di bassa frequenza  $\Omega$  della forzante esterna.*

**Esercizio 4.12.** *Si consideri un dinamometro ideale costituito da un punto di massa  $m$  attaccato a due molle di costanti elastiche  $k_1$  e  $k_2$  disposte in parallelo o in serie. Si mostri che il sistema è equivalente al dinamometro ideale con una singola molla di costante  $k$  pari a  $k_1 + k_2$  nel primo caso e  $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$  nel secondo.*



# Capitolo 5

## Introduzione ai vincoli

Un *vincolo* è una restrizione di carattere geometrico sul moto, realizzata da un sistema di forze, dette appunto *reazioni vincolari*. L'esempio da tenere a mente è quello di un qualsiasi sistema che si muova lungo un piano orizzontale sotto l'azione della gravità. In questo caso la restrizione di carattere geometrico consiste nel richiedere che il moto abbia luogo lungo il piano, mentre le reazioni vincolari sono date dal sistema di forze che il piano deve esercitare sul sistema per impedirgli di cadere verso il basso. L'esempio più semplice è quello di un punto materiale fermo su un piano orizzontale: sul punto agisce la forza peso  $\vec{F} = -mg\hat{z}$  e, affinché resti fermo, è necessaria una forza  $\vec{\phi} = -\vec{F}$ ; diversamente il punto sarebbe soggetto ad una forza totale non nulla lungo la verticale e accelererebbe di conseguenza, scendendo rispetto al piano. La cosa importante da tenere a mente, quando si ha a che fare con problemi in presenza di vincoli, è che **le reazioni vincolari sono incognite del problema**, alla pari delle variabili di posizione del sistema.

Nel seguito ci concentriamo sul caso di un singolo punto materiale, estendendo successivamente l'analisi ai casi semplici di sistemi di punti. L'esempio classico è quello di un singolo punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva o su di una superficie.

### 5.1 Meccanica del punto vincolato

L'equazione di Newton per un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie o lungo una curva nello spazio tridimensionale è

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\phi}, \quad (5.1)$$

avendo indicato con  $\vec{\phi}$  la reazione vincolare, ovvero la forza necessaria a tenere il punto attaccato al vincolo, che nella pratica viene esercitata dal meccanismo con il quale il vincolo viene realizzato (ad esempio il sistema soffitto-tassello-gancio a vite per un oggetto appeso al soffitto, oppure il sistema terreno-binario per un treno, ecc..). La forza  $\vec{F}$  in (5.1) indica invece la *forza attiva*, ovvero la forza dovuta all'interazione del punto con altri punti o sistemi, e che sarebbe presente anche in assenza del vincolo (ad esempio la forza peso, la resistenza dell'aria, l'eventuale interazione con altri punti realizzata da molle, ecc..).

Consideriamo quindi il caso di un punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva o su di una superficie assegnate e ferme. In questo caso la componente della forza totale ortogonale

alla superficie o alla curva deve essere nulla, in modo che il punto materiale non possa accelerare ortogonalmente alla superficie o alla curva stessa:

$$\vec{a}_n = \vec{F}_n + \vec{\phi}_n = 0, \quad (5.2)$$

dove il pedice  $n$  indica la componente *normale* al vincolo. In pratica, nel caso di una superficie si considera il piano tangente ad essa nel punto geometrico occupato al tempo  $t$  dal punto materiale e si sceglie un versore  $\hat{n}$  ortogonale a tale piano nel detto punto; allora  $\vec{F}_n = (\vec{F} \cdot \hat{n})\hat{n}$  e  $\vec{\phi}_n = (\vec{\phi} \cdot \hat{n})\hat{n}$ . D'altra parte, nel caso di una curva si considera il piano ortogonale ad essa nel punto geometrico occupato al tempo  $t$  dal punto materiale; in questo caso  $\vec{F}_n$  e  $\vec{\phi}_n$  sono le componenti della forza attiva e della reazione vincolare lungo tale piano (ad esempio, se  $\hat{\tau}$  è il versore tangente alla curva nel punto in questione, allora  $\vec{F}_n = \vec{F} - (\vec{F} \cdot \hat{\tau})\hat{\tau}$ , una formula identica essendo valida per  $\vec{\phi}_n$ ). Si osservi che l'equazione (5.2) non determina a priori la componente della reazione vincolare ortogonale alla superficie o alla curva. Infatti, la forza attiva  $\vec{F}$  è una funzione vettoriale assegnata della posizione e della velocità del punto materiale (ed eventualmente del tempo) e tali quantità sono incognite del problema. Per determinare queste ultime bisogna risolvere l'equazione di Newton (5.1) proiettata parallelamente al vincolo, cioè

$$m\vec{a}_\tau = \vec{F}_\tau + \vec{\phi}_\tau, \quad (5.3)$$

dove il pedice  $\tau$  denota proiezione sul piano tangente alla superficie o lungo la retta tangente alla curva nel punto geometrico occupato dal punto materiale ad ogni istante. Nell'equazione (5.3) compare la componente tangente alla superficie della reazione vincolare,  $\vec{\phi}_\tau$ . Questa in generale è una manifestazione dell'attrito da contatto tra punto materiale e superficie vincolare e in generale la legge per la sua determinazione è diversa a seconda che si consideri il punto fermo oppure in movimento rispetto alla superficie stessa. Il caso più semplice da trattare è quello di *vincolo ideale*, caratterizzato da assenza totale di attrito da contatto, per cui  $\vec{\phi}_\tau = \vec{0}$ . In tale caso l'equazione (5.3) diviene  $m\vec{a}_\tau = \vec{F}_\tau$ , che si può risolvere per determinare la posizione del punto al variare del tempo. Successivamente si determina il valore della componente normale  $\vec{F}_n$  della forza attiva e, dalla (5.2) si ottiene  $\vec{\phi}_n = -\vec{F}_n$ , risolvendo completamente il problema.

**Osservazione 5.1.** *Se la curva o la superficie vincolare sono in movimento, l'equazione (5.2) diventa  $\vec{\phi}_n = -\vec{F}_n + m\vec{a}_n$ , essendo  $\vec{a}_n$  l'accelerazione normale della curva o della superficie nel punto occupato dal punto materiale a ogni dato istante.*

**Esempio 5.1.** *Si consideri un punto materiale pesante di massa  $m$  vincolato a muoversi su un piano parallelo al piano  $x, y$  che si muove di moto uniformemente accelerato:  $z(t) = h + v_0t + a_0t^2/2$ . Sul punto non agiscono altre forze lungo l'asse  $z$ . L'equazione (5.2) in questo caso diventa:  $\phi_z = m(a_0 + g)$ . Notare che la reazione normale è nulla se il piano è in caduta libera, mentre vale  $+mg$  se il piano si muove di moto rettilineo uniforme.*

## 5.2 Attrito statico

Nel caso di vincolo non ideale, in presenza di attrito dovuto al contatto tra punto materiale e vincolo materiale, si deve distinguere il caso statico, in cui il punto materiale è fermo rispetto al

vincolo (superficie o curva), da quello dinamico, nel quale il punto si muove rispetto al vincolo. Nel caso statico, per un punto materiale vincolato a muoversi su di una superficie o lungo una curva e fermo rispetto ad esse, vale la seguente *legge di Coulomb-Morin dell'attrito statico*:

$$|\vec{\phi}_\tau| \leq f_s |\vec{\phi}_n|, \quad (5.4)$$

dove  $f_s$  è un parametro adimensionale che assume valori compresi tra zero e uno, detto *coefficiente di attrito statico*. Tale coefficiente dipende ovviamente dai materiali coinvolti, dalla temperatura, dalla forma dettagliata delle superfici a contatto ecc..

Il tipico problema di statica del punto in presenza di attrito si risolve nel modo seguente. Se la forza attiva che compare nella legge di Newton (5.1) dipende dalla posizione e dalla velocità del punto, cioè  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v})$ , si pone in essa  $\vec{v} = \vec{0}$  (il punto è fermo) e si cercano le posizioni di equilibrio, cioè si risolve il sistema di equazioni

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{0}) + \vec{\phi} = \vec{0}, \quad (5.5)$$

assieme alla condizione di vincolo, che si esprime nella forma di una o due equazioni scalari della forma  $S(\vec{x}) = 0$ , rispettivamente per una superficie o una curva (una curva si può sempre considerare come intersezione di due superfici). Ora, in dimensione spaziale  $D = 3$ , si hanno in totale quattro (per una superficie) o cinque (per una curva) equazioni scalari, mentre le incognite sono sei: le tre componenti del vettore posizione  $\vec{x}$  e le tre componenti della reazione vincolare. Dunque il sistema (5.5) contiene più incognite che equazioni in entrambi i casi. Si noti che il numero di incognite in eccesso, rispetto al numero di equazioni, è due per una superficie e uno per una curva (nel caso di curve piane tale numero è sempre uno). Tale numero è uguale al numero di componenti della reazione vincolare  $\vec{\phi}_\tau$  tangente al vincolo. In sostanza, per risolvere completamente il problema di statica del punto vincolato, o si fa l'ipotesi di vincolo ideale, cioè  $\vec{\phi}_\tau = \vec{0}$ , oppure si devono fornire relazioni in più.

La legge di Coulomb-Morin (5.4) aggiunge una disuguaglianza al sistema di equazioni, con l'effetto di non determinare un solo valore (o un insieme discreto di valori) per le posizioni di equilibrio del punto materiale e per le reazioni vincolari ad esse associate, ma un insieme continuo di valori possibili per entrambe le quantità.

**Esempio 5.2.** *Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  connesso all'origine  $O$  di una terna cartesiana da una molla ideale di costante  $k$ , soggetto alla forza di gravità e vincolato a muoversi sul piano  $z = 0$  (quest'ultima è l'equazione di vincolo di superficie  $S(\vec{x}) = 0$  a cui si fa riferimento sopra). Il problema di statica vincolata (5.5) in questo caso si scrive*

$$\begin{cases} -k\vec{x} - mg\hat{z} + \vec{\phi} = \vec{0} \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -kx + \phi_x = 0 \\ -ky + \phi_y = 0 \\ -kz - mg + \phi_z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Si notino le quattro equazioni del sistema e le sei incognite:  $x, y, z$  e  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ . Nel caso di vincolo ideale, cioè in assenza di attrito da contatto punto-piano, si ha  $\vec{\phi}_\tau = \phi_x\hat{x} + \phi_y\hat{y} = \vec{0}$ , ovvero  $\phi_x = \phi_y = 0$ . In tale caso la soluzione del problema (5.6) è data da  $x^{(eq)} = y^{(eq)} =$

$z^{(eq)} = 0$  e  $\phi_z = +mg$ . D'altra parte, nel caso di vincolo non ideale, la legge di Coulomb-Morin (5.4), assieme al sistema (5.6) implica  $z^{(eq)} = 0$ ,  $\phi_z = +mg$ ,  $\vec{\phi}_\tau = -k(x\hat{x} + y\hat{y})$  e

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq f_s \frac{mg}{k} .$$

Quest'ultima disuguaglianza significa che, nel caso non ideale, grazie alla presenza dell'attrito statico, si apre intorno alla posizione di equilibrio ideale (l'origine) un intorno circolare di posizioni di equilibrio, il cui raggio è proporzionale al coefficiente di attrito statico  $f_s$ .

Osserviamo che vincolando ulteriormente il punto materiale a muoversi lungo l'asse  $x$ , ovvero aggiungendo la condizione di vincolo  $y = 0$  al sistema (5.6), si ottiene un sistema con cinque equazioni e sempre sei incognite. Nel caso ideale non cambia nulla: la soluzione è la stessa trovata sopra (verificarlo). Nel caso non ideale si trova  $\phi_y = 0$  e il continuo di equilibri dato dalla legge di Coulomb-Morin diviene l'intervallo  $|x| \leq (f_s mg)/k$  (verificarlo).

Quanto appena visto è un fatto generale: sotto opportune ipotesi, l'effetto dell'attrito statico è quello di aprire continui di equilibri attorno alle posizioni isolate di equilibrio ideale. Tale effetto è di estrema importanza: nella pratica esso consente di riuscire a porre un oggetto o una struttura in equilibrio, commettendo errori di posizionamento tollerabili senza doversi preoccupare di avere la non realistica precisione infinita che sarebbe invece richiesta in assenza di attrito. Dimostriamo ora tale effetto generale dell'attrito statico nel caso semplice di un punto vincolato a muoversi lungo una curva piana.

**Proposizione 5.1.** *Si consideri un punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva piana sotto l'azione di una forza posizionale  $\vec{F}(s)$ , essendo  $s$  l'ascissa curvilinea che determina la posizione del punto lungo la curva. Sia  $s_0$  una posizione di equilibrio ideale, cioè tale che  $F_\tau(s_0) = 0$ . Sia inoltre soddisfatta la condizione  $F_n(s_0) \neq 0$ . Allora, in presenza di un piccolo coefficiente di attrito statico ( $0 < f_s \ll 1$ ), si apre attorno ad  $s_0$  un piccolo intervallo di posizioni di equilibrio non ideale.*

*Dimostrazione.* L'equazione vettoriale di equilibrio (5.5), nel caso di un punto vincolato a muoversi lungo una curva piana, ha due componenti:

$$\begin{cases} F_\tau(s) + \phi_\tau = 0 \\ F_n(s) + \phi_n = 0 \end{cases} , \quad (5.7)$$

dove  $s$  denota l'ascissa curvilinea del punto materiale (cioè la lunghezza dell'arco di curva che ha inizio da una origine fissata e termina nella posizione occupata dal punto). Nel caso ideale, senza attrito ( $f_s = 0$ ), si ha  $\phi_\tau = 0$  e le ascisse di equilibrio sono determinate dalla prima delle equazioni (5.7), cioè  $F_\tau(s) = 0$ , mentre la seconda equazione determina  $\phi_n$ . Sia dunque  $s_0$  una ascissa di equilibrio ideale, cioè tale che  $F_\tau(s_0) = 0$  e  $\phi_n = -F_n(s_0) \neq 0$  (per ipotesi). Passando al caso non ideale, sostituendo dalle (5.7) nella legge di Coulomb-Morin  $|\phi_\tau| \leq f_s |\phi_n|$ , si ottiene

$$|F_\tau(s)| \leq f_s |F_n(s)| . \quad (5.8)$$

Si consideri ora un intorno di  $s_0$  sull'asse  $s$ . Nella (5.8) si afferma che i valori di  $s$  compatibili con l'equilibrio sono quelli per i quali il grafico di  $|F_\tau(s)|$  giace sotto al grafico di  $f_s |F_n(s)|$ .

Poiché  $F_\tau(s_0) = 0$ , il grafico di  $|F_\tau(s)|$  presenta un minimo in  $s_0$ , di tipo punto angoloso nel caso di zero semplice, o di tipo “liscio” nel caso di zero di molteplicità maggiore di uno. D'altra parte, per ipotesi  $F_n(s_0) \neq 0$  e quindi  $F_n(s) \neq 0$  in un intorno opportuno di  $s_0$  (si suppone qui che  $F_n(s)$  sia continua in  $s$ ); dunque  $|F_n(s)| > 0$  in tale intorno. Ora, l'effetto di un piccolo coefficiente di attrito a moltiplicare è quello di portare il grafico locale di  $f_s|F_n(s)|$  a intersecare quello di  $|F_\tau(s)|$  in due punti di ascissa rispettivamente  $s_1 < s_0$  e  $s_2 > s_0$ . Allora tutti i valori di  $s$  nell'intervallo  $[s_1, s_2]$  soddisfano la condizione (5.8) e sono quindi valori di equilibrio non ideale dell'ascissa curvilinea del punto materiale.  $\square$

**Osservazione 5.2.** *L'ipotesi  $F_n(s_0) \neq 0$  nella Proposizione 5.1 assicura l'esistenza generica di un intervallo di equilibrio per  $f_s$  sufficientemente piccolo. Se  $F_n(s_0) = 0$  si possono presentare i casi: non esistenza di un intervallo, esistenza di un semi-intervallo destro o sinistro o esistenza di un intervallo, dipendentemente dalla forma di  $F_\tau$ ,  $F_n$  e dal valore di  $f_s$ .*

**Osservazione 5.3.** *Quanto dimostrato nella Proposizione 5.1 vale anche nel caso di punto vincolato a muoversi lungo una curva non piana o su una superficie, con dimostrazione concettualmente identica.*

### 5.3 Attrito dinamico

Consideriamo ora il caso di punto materiale vincolato a muoversi su una superficie o su una curva, essendo il punto in moto ed essendo il vincolo non ideale. Allora per la reazione vincolare  $\vec{\phi}$  vale la legge dell'attrito dinamico:

$$\vec{\phi}_\tau = -f_d|\vec{\phi}_n|\hat{v}, \quad (5.9)$$

dove  $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$  denota il versore della velocità del punto materiale e  $f_d$  è un parametro adimensionale detto coefficiente di attrito dinamico.

**Esempio 5.3.** *Si consideri un punto materiale di massa  $m$  che scende lungo un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale, sotto l'azione della gravità e in presenza di attrito dinamico di coefficiente  $f_d$ . Le componenti dell'equazione di Newton lungo l'asse  $x$  parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso e lungo l'asse  $y$  ad esso ortogonale e orientato verso l'alto sono*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - f_d|\phi_y|\text{sgn}(\dot{x}) \\ 0 = \phi_y - mg \cos \alpha \end{cases},$$

essendo  $\text{sgn}(\xi) = +1$  se  $\xi > 0$  e  $\text{sgn}(\xi) = -1$  se  $\xi < 0$ . Dalla seconda equazione si ricava  $\phi_y = mg \cos \alpha$ , che inserita nella prima fornisce

$$m\ddot{x} = mg[\sin \alpha - f_d \cos \alpha \text{sgn}(\dot{x})].$$

Possiamo ad esempio trovare la condizione su  $\alpha$  e  $f_d$  per cui il punto si arresta in tempo finito (supponendo il piano lungo quanto serve). Infatti, se il punto scende  $\dot{x} > 0$ ,  $\text{sgn}(\dot{x}) = +1$  e dunque si ha accelerazione negativa (cioè il punto “frena”) se  $\text{tg}\alpha < f_d$ . Nel caso di pendenza eccessiva, se cioè  $\text{tg}\alpha > f_d$ , il punto materiale continua ad accelerare e quindi non si arresta.

## 5.4 Reazioni nei punti di “fissaggio”

Nel realizzare concretamente un dato sistema vincolato può essere utile saper stimare a quale sollecitazione sono sottoposti alcuni punti di fissaggio specifici, realizzati concretamente tramite fermi, chiodi, cerniere ecc.. Tali meccanismi possono spesso (non sempre) essere considerati idealmente come puntiformi e sono caratterizzati dalla condizione di essere in quiete sia quando il sistema è in moto che quando è fermo in equilibrio. Allora la reazione vincolare in uno di tali punti di fissaggio del sistema si calcola trattando tale punto come un punto materiale del sistema, con massa eventualmente specificata, calcolando la forza totale che agisce su tale punto e imponendo che sia nulla. Si faccia attenzione al fatto che tale operazione si esegue sia quando il sistema è in equilibrio che quando si muove: si impone che i punti di fissaggio siano sempre e comunque fermi.

**Esempio 5.4.** *Calcoliamo la reazione vincolare nel punto di fissaggio  $O$  di un dinamometro ideale (in pratica stiamo calcolando a quale forza deve resistere il sistema gancio a vite - tassello - soffitto affinché il sistema molla - punto resti attaccato al soffitto e non cada giù). Con asse  $x$  verticale orientato verso il basso e origine in  $O$ , l'equazione di Newton per il punto  $P$  sospeso è  $m\ddot{x}_P = -kx_P + mg$ . Sia  $x_P(t)$  la soluzione di questa equazione. L'equazione di Newton per il punto  $O$ , se dotato di massa  $M$ , è invece  $M\ddot{x}_O = \phi_O + kx_P(t) + Mg$ . Imponendo che il punto  $O$  sia in quiete, si ottiene  $\phi_O = -kx_P(t) - Mg$ . In particolare, se il punto  $P$  è in quiete, ovvero  $x = x^{(ea)} = mg/k$ , allora  $\phi_O = -(m + M)g$ , cioè la reazione in  $O$  si oppone al peso complessivo del sistema. Nel caso  $P$  si muova, a tale reazione statica si somma la soluzione generale del moto armonico a frequenza  $\omega = \sqrt{k/m}$ .*

## 5.5 Reazioni in punti mobili di ancoraggio

Un sistema di punti materiali può interagire (ad esempio tramite molle, fili ecc..) con un punto  $Q$  di massa  $m_Q$  che si muove di moto assegnato:  $\vec{x}_Q(t)$  è una funzione vettoriale nota del tempo  $t$ . Ci si può chiedere quale forza incognita è necessaria, a posteriori, per mantenere tale moto pre-assegnato. Tale forza è la reazione vincolare nel punto mobile di ancoraggio  $Q$ . Per calcolarla si dovrà scrivere l'equazione di Newton per il punto  $Q$  (dotato o meno di massa), cioè  $m_Q\ddot{\vec{x}}_Q = \vec{F}_Q + \vec{\phi}_Q$ , essendo  $\vec{F}_Q$  la forza attiva che viene esercitata su  $Q$  da tutti i punti materiali del sistema e  $\vec{\phi}_Q$  la reazione incognita. Se  $\vec{F}_Q$  è nota, allora  $\vec{\phi}_Q = m_Q\ddot{\vec{x}}_Q - \vec{F}_Q$ ; nel limite di massa  $m_Q$  nulla,  $\vec{\phi}_Q = -\vec{F}_Q$ .

**Esempio 5.5.** *Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  è connesso ad un punto  $Q$  da una molla ideale di costante  $k$  e il punto  $P$  si muove lungo la verticale per  $Q$ , sotto l'azione della gravità. Il punto  $Q$  si muove di moto assegnato:  $x_Q = A \cos(\Omega t)$  essendo l'asse  $x$  verticale diretto verso il basso. L'equazione di Newton per  $P$  è  $m_P\ddot{x}_P = -k(x_P - x_Q) + m_Pg$ , che si risolve esplicitamente e fornisce  $x_P(t)$ . L'equazione di Newton per  $Q$  è  $m_Q\ddot{x}_Q = +k(x_P - x_Q) + m_Qg + \phi_Q$ , che fornisce la reazione  $\phi_Q$  nel punto mobile di ancoraggio  $Q$ :*

$$\phi_Q(t) = m_Q\ddot{x}_Q - k(x_P - x_Q) - m_Qg .$$

*Si osservi che  $\phi_Q$  è necessaria affinché l'equazione di Newton per  $Q$  sia valida.*

## 5.6 Reazioni di appoggio

Il caso di vincolo di appoggio tipico è quello di un punto materiale che non può attraversare una assegnata superficie (ad esempio una persona che non può scendere al di sotto del pavimento ma può saltare sopra di esso). La reazione vincolare necessaria per realizzare tale vincolo deve essere diretta verso la regione dello spazio in cui il punto è confinato a muoversi. Nel caso ideale, in assenza di attrito, la reazione è ortogonale alla superficie. Un modo di affrontare questo problema è quello di trattare il vincolo come se fosse bilatero, cioè come se il punto dovesse restare attaccato alla superficie. Si calcola poi la reazione e se ne valuta il verso: se questo è consistente con il vincolo di appoggio, cioè se la reazione è diretta verso il semispazio voluto, si considera il punto appoggiato alla superficie. Nel momento in cui la reazione diviene diretta verso il semispazio al quale il punto non può accedere si considera il punto stesso staccato dalla superficie e si dice che si perde l'appoggio. Questo tipo di approccio è utilissimo per valutare la condizione di equilibrio dei corpi rigidi appoggiati su un piano orizzontale.

**Esempio 5.6.** *Si riconsideri il problema del punto su piano mobile con moto uniformemente accelerato. Si supponga ora che il punto sia appoggiato sul piano. Come visto sopra, la reazione normale al piano è  $\phi_z = m(a_0 + g)$ . Tale reazione è di appoggio, cioè  $\phi_z > 0$ , se  $a_0 > -g$ . Se  $a_0 \leq -g$  il punto perde appoggio e cade liberamente.*

## 5.7 Esercizi

**Esercizio 5.1.** *Si consideri un punto materiale di massa  $m$  fermo su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto al piano orizzontale, sotto l'azione della gravità, in presenza di attrito statico di coefficiente  $f_s$ . Usando la legge di Coulomb-Morin si faccia vedere che la massima inclinazione del piano che consente al punto di restare fermo è determinata dalla disuguaglianza  $\text{tg}\alpha \leq f_s$ .*

**Esercizio 5.2.** *Nel piano cartesiano  $(x, y)$ , si consideri un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$ . Il punto è connesso tramite una molla ideale di costante  $k_1$  al punto di coordinate  $(0, a)$  e tramite una molla ideale di costante  $k_2$  al punto di coordinate  $(b, c)$ . Sul sistema agisce la gravità. Si determinino le posizioni di equilibrio del punto materiale nel caso ideale e nel caso non ideale con attrito statico di coefficiente  $f_s$ .*

**Esercizio 5.3.** *Scrivere le equazioni di Newton di un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su un anello di raggio  $R$  che giace su un piano verticale, sotto l'azione della gravità e soggetto ad attrito dinamico di coefficiente  $f_d$ . Linearizzarle attorno all'equilibrio inferiore e studiarle (qualitativamente).*

**Esercizio 5.4.** *Considerare gli esercizi riportati alla fine del capitolo precedente e calcolare in ognuno le reazioni nei punti di fissaggio e di ancoraggio mobile, o le eventuali reazioni normali al vincolo (ad esempio nel caso di moti su assi o piani orizzontali supponendo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità).*





# Capitolo 6

## Equazioni cardinali

Consideriamo un sistema di punti materiali descritti dalle equazioni di Newton

$$m_P \vec{a}_P = \vec{F}_P^{(i)} + \vec{F}_P^{(e)} , \quad (6.1)$$

dove l'indice  $P$  corre su tutti i punti del sistema (che possono essere in numero finito o infinito, numerabile o meno), e la forza totale  $\vec{F}_P$  agente sul punto  $P$  è data dalla somma della forza totale *interna*, dovuta all'interazione del punto  $P$  con tutti gli altri punti del sistema, con la forza totale *esterna*, dovuta all'interazione del punto  $P$  con tutto ciò che è considerato esterno al sistema e contenente anche le eventuali reazioni vincolari agenti sul punto  $P$ . Per quanto riguarda la forza interna  $\vec{F}_P^{(i)}$ , su di essa facciamo due ipotesi. La prima è che valga il principio di sovrapposizione, per il quale essa risulta data dalla somma delle forze dovute all'interazione del punto  $P$  con ogni altro punto del sistema stesso. La seconda ipotesi è che per ogni interazione a due punti valga il principio di azione e reazione. In formule, assumiamo che

$$\vec{F}_P^{(i)} = \sum_{Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} ; \quad (6.2)$$

$$\vec{f}_{PQ} = -\vec{f}_{QP} ; \quad \vec{f}_{PQ} \parallel \overrightarrow{QP} = \vec{x}_P - \vec{x}_Q . \quad (6.3)$$

Per quanto riguarda la forza esterna  $\vec{F}_P^{(e)}$  non facciamo alcuna ipotesi particolare.

A partire dalle equazioni di Newton (6.1), e facendo uso delle ipotesi (6.2) e (6.3), deduciamo ora due equazioni generali, le così dette *equazioni cardinali della dinamica dei sistemi* di punti materiali, che descrivono il comportamento del sistema in blocco.

### 6.1 Prima equazione cardinale

Sommando vettorialmente le equazioni di Newton (6.1) si ottiene

$$\sum_P m_P \vec{a}_P = \sum_P \vec{F}_P^{(i)} + \sum_P \vec{F}_P^{(e)} , \quad (6.4)$$

il cui lato destro suggerisce le definizioni di *risultante delle forze interne*

$$\vec{R}^{(i)} \equiv \sum_P \vec{F}_P^{(i)} \quad (6.5)$$

e di *risultante delle forze esterne*

$$\vec{R}^{(e)} \equiv \sum_P \vec{F}_P^{(e)} . \quad (6.6)$$

Per quanto riguarda il lato sinistro della (6.4) osserviamo che

$$\sum_P m_P \vec{a}_P = \frac{d}{dt} \sum_P m_P \vec{v}_P = \frac{d^2}{dt^2} \sum_P m_P \vec{x}_P ,$$

che suggerisce la definizione di un punto geometrico  $G$  avente vettore posizione

$$\vec{X}_G \equiv \frac{\sum_P m_P \vec{x}_P}{\sum_P m_P} = \sum_P \frac{m_P}{M} \vec{x}_P , \quad (6.7)$$

detto *centro di massa* o *baricentro* del sistema di punti considerato; nella seconda uguaglianza a destra della (6.7) si è definita la massa totale del sistema

$$M \equiv \sum_P m_P . \quad (6.8)$$

Si osservi che la posizione del baricentro  $G$  di un sistema di punti materiali risulta data dalla combinazione lineare, o somma pesata, dei vettori posizione dei punti del sistema, con il coefficiente  $P$ -esimo della combinazione, o peso, dato dalla frazione di massa contenuta nel punto  $P$ ; dunque il baricentro tende ad essere più vicino ai punti con massa maggiore. Si osservi che il baricentro è un punto geometrico, non necessariamente coincidente con un punto materiale del sistema. Nel caso di  $N$  punti materiali aventi tutti la stessa massa, dalla (6.7) segue che il baricentro del sistema ha posizione data dalla media aritmetica delle posizioni dei punti del sistema:  $\vec{X}_G = \sum_P \vec{x}_P / N$ .

**Esempio 6.1.** *Il baricentro di un sistema di  $N$  punti materiali di uguale massa, disposti su una circonferenza ed equispaziati tra loro coincide con il centro della circonferenza (ci si convinca di questo fatto facendo esempi concreti e/o usando argomenti di simmetria).*

Con le definizioni (6.5), (6.6) ed (6.7), l'equazione (6.4) si riscrive in forma compatta

$$M \ddot{\vec{X}}_G = \vec{R}^{(i)} + \vec{R}^{(e)} , \quad (6.9)$$

che ha la forma suggestiva di una equazione di Newton. Ora, affermiamo che, sotto le ipotesi (6.2) e (6.3) fatte sopra, cioè supponendo valido il principio di sovrapposizione e il principio di azione e reazione per le forze interne, si ha

$$\vec{R}^{(i)} = \vec{0} . \quad (6.10)$$

Dimostriamo questa affermazione. Dalla definizione (6.5), facendo uso della (6.2) e della (6.3) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \vec{R}^{(i)} &= \sum_P \vec{F}_P^{(i)} = \sum_P \sum_{Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} = \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} + \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} + \frac{1}{2} \sum_{Q,P:P \neq Q} \vec{f}_{QP} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} (\vec{f}_{PQ} + \vec{f}_{QP}) = \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} (\vec{0}) = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Nel calcolo precedente, tra la prima e la seconda riga si è fatto uso dell'identità banale  $x = x/2 + x/2$ ; tra la seconda e la terza riga si sono scambiati gli indici di somma  $P$  e  $Q$  nella seconda somma, notando che  $\sum_{P,Q:Q \neq P} = \sum_{Q,P:P \neq Q}$ ; tra la terza e la quarta riga si sono raccolti il fattore  $1/2$  e il simbolo comune di somma, per fare poi uso della prima delle due ipotesi (6.3) del terzo principio, ottenendo infine il risultato voluto.

**Esempio 6.2.** Il calcolo appena fatto si capisce considerando un sistema formato da tre punti materiali, indicizzati con i numeri 1, 2, 3. In quel caso  $\vec{F}_1^{(i)} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13}$ ,  $\vec{F}_2^{(i)} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23}$  e  $\vec{F}_3^{(i)} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32}$ . Quindi

$$\begin{aligned}
 \vec{R}^{(i)} &= \vec{F}_1^{(i)} + \vec{F}_2^{(i)} + \vec{F}_3^{(i)} = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13}) + (\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23}) + (\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32}) = \\
 &= (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}) + (\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}) + (\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},
 \end{aligned}$$

avendo solo permutato i vari termini in modo da sommare a ogni termine il suo opposto.

**Osservazione 6.1.** Per annullare il risultante delle forze interne si è fatto uso solo della prima delle due ipotesi (6.3) del principio di azione e reazione.

Ponendo  $\vec{R}^{(i)} = \vec{0}$  nella (6.9) si ottiene la **prima equazione cardinale della dinamica** dei sistemi di punti materiali:

$$\boxed{M \ddot{\vec{X}}_G = \vec{R}^{(e)}}, \quad (6.11)$$

secondo la quale la massa totale per l'accelerazione del baricentro è pari al risultante delle forze esterne.

## 6.2 Seconda equazione cardinale

Con lo scopo di dedurre la seconda equazione cardinale della dinamica, moltiplichiamo ora ogni equazione di Newton (6.1) vettorialmente, da sinistra, per  $\vec{x}_P$ , ottenendo

$$\vec{x}_P \times m_P \vec{a}_P = \vec{x}_P \times \vec{F}_P^{(i)} + \vec{x}_P \times \vec{F}_P^{(e)}. \quad (6.12)$$

La parte destra di questa equazione suggerisce le definizioni di *momento della forza interna* del punto  $P$

$$\vec{M}_P^{(i)} \equiv \vec{x}_P \times \vec{F}_P^{(i)} \quad (6.13)$$

e di *momento della forza esterna* del punto  $P$

$$\vec{M}_P^{(e)} \equiv \vec{x}_P \times \vec{F}_P^{(e)} . \quad (6.14)$$

Per quanto riguarda invece il lato sinistro della (6.12), osserviamo che vale l'identità

$$\frac{d}{dt} (\vec{x}_P \times m_P \vec{v}_P) = \vec{x}_P \times m_P \vec{a}_P , \quad (6.15)$$

che si dimostra facilmente applicando la regola di Leibniz e tenendo conto del fatto che  $\vec{v}_P \times m_P \vec{v}_P = \vec{0}$ . La (6.15) suggerisce di definire la quantità

$$\vec{L}_P \equiv \vec{x}_P \times m_P \vec{v}_P , \quad (6.16)$$

detta *momento angolare* o *momento della quantità di moto*<sup>1</sup> del punto  $P$ . Facendo uso delle definizioni (6.13), (6.14), (6.16) e dell'identità (6.15), l'equazione (6.12) si riscrive

$$\dot{\vec{L}}_P = \vec{M}_P^{(i)} + \vec{M}_P^{(e)} . \quad (6.17)$$

A questo punto sommiamo su  $P$  e otteniamo

$$\sum_P \dot{\vec{L}}_P = \sum_P \vec{M}_P^{(i)} + \sum_P \vec{M}_P^{(e)} , \quad (6.18)$$

che chiama in modo naturale le definizioni di *momento risultante delle forze interne*

$$\vec{M}^{(i)} \equiv \sum_P \vec{M}_P^{(i)} , \quad (6.19)$$

*momento risultante delle forze esterne*

$$\vec{M}^{(e)} \equiv \sum_P \vec{M}_P^{(e)} \quad (6.20)$$

e *momento angolare totale*

$$\vec{L} \equiv \sum_P \vec{L}_P . \quad (6.21)$$

Tenendo conto delle tre definizioni appena date, la (6.18) si scrive in forma compatta

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(i)} + \vec{M}^{(e)} . \quad (6.22)$$

---

<sup>1</sup>Il secondo nome deriva dal fatto che il prodotto  $m_P \vec{v}_P$  si chiama quantità di moto del punto  $P$  e che si chiama momento di un vettore riferito al punto  $P$  il prodotto vettoriale della posizione di  $P$  per il vettore stesso.

Affermiamo ora che, supponendo valido il principio di sovrapposizione e il principio di azione e reazione per le forze interne, si ha

$$\vec{M}^{(i)} = \vec{0}. \quad (6.23)$$

Per dimostrarlo scriviamo il risultante dei momenti delle forze interne per esteso, usando in sequenza le (6.19), (6.13), (6.2) e (6.3):

$$\begin{aligned} \vec{M}^{(i)} &= \sum_P \vec{M}_P^{(i)} = \sum_P \vec{x}_P \times \vec{F}_P^{(i)} = \\ &= \sum_P \vec{x}_P \times \left( \sum_{Q:Q \neq P} \vec{f}_{PQ} \right) = \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{x}_P \times \vec{f}_{PQ} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{x}_P \times \vec{f}_{PQ} + \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{x}_P \times \vec{f}_{PQ} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{x}_P \times \vec{f}_{PQ} + \frac{1}{2} \sum_{Q,P:P \neq Q} \vec{x}_Q \times \vec{f}_{QP} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \left( \vec{x}_P \times \vec{f}_{PQ} + \vec{x}_Q \times \vec{f}_{QP} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \left[ (\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \times \vec{f}_{PQ} \right] = \frac{1}{2} \sum_{P,Q:Q \neq P} \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Qui tra la penultima e l'ultima riga si è usata la prima delle ipotesi (6.3) del terzo principio, mentre nel penultimo passaggio dell'ultima riga si è usata la seconda ipotesi.

Ponendo  $\vec{M}^{(i)} = \vec{0}$  nell'equazione (6.22) si ottiene la **seconda equazione cardinale della dinamica** dei sistemi di punti materiali

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(e)}}, \quad (6.25)$$

secondo la quale la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale è uguale al momento risultante delle forze esterne.

### 6.3 Uso delle equazioni cardinali

Le equazioni cardinali della dinamica (6.11) e (6.25) sono identità cinematiche, prive in generale di utilità pratica, a meno che non si restringa l'attenzione a sotto-classi di problemi specifici (come effettivamente faremo). Per capire il motivo di tale affermazione, si cominci con l'osservare che la posizione di un sistema di  $n$  punti materiali in dimensione spaziale  $D = 3$  è determinata da  $3n$  coordinate di posizione. D'altra parte le equazioni cardinali sono solo 6: 3 componenti della prima e 3 componenti della seconda. È quindi insensato a priori, in generale, sperare di usare le equazioni cardinali per ricostruire il moto dell'intero sistema. Si osservi che tale affermazione rimane valida anche per  $n = 2$ . Si consideri infatti il problema dei due corpi, già trattato in dettaglio. In tale caso si hanno due punti materiali con equazioni di Newton  $m_P \vec{a}_P = \vec{f}_{PQ}$  e  $m_Q \vec{a}_Q = \vec{f}_{QP}$ , con  $\vec{f}_{PQ}$  e  $\vec{f}_{QP}$  verificanti le ipotesi del terzo principio. In questo

caso, non essendoci forze esterne,  $\vec{R}^{(e)} = \vec{0}$  e  $\vec{M}^{(e)} = \vec{0}$ . Dunque il baricentro si muove di moto rettilineo e uniforme, mentre il momento angolare totale è costante. Tuttavia tali informazioni non sono sufficienti a determinare la dinamica del sistema, essendo invece necessario considerare, come sappiamo, il moto relativo dei due punti.

D'altra parte, si potrebbe sperare di usare le equazioni cardinali per ricavare informazioni parziali sulla dinamica del sistema. Ad esempio, la prima equazione cardinale ha la forma di una equazione di Newton:  $M\vec{a}_G = \vec{R}^{(e)}$ . Se  $\vec{R}^{(e)}$  fosse una funzione nota della posizione e della velocità del baricentro, ed eventualmente del tempo, cioè se fosse  $\vec{R}^{(e)}(\vec{X}_G, \dot{\vec{X}}_G, t)$ , allora la prima equazione cardinale sarebbe effettivamente una equazione differenziale (vettoriale) che potrebbe essere risolta con metodi noti per descrivere il moto del baricentro del sistema. In generale però il risultante delle forze esterne non è una funzione nota della posizione e della velocità del baricentro ed è determinato solo quando siano note le posizioni al tempo  $t$  di tutti i punti del sistema, nel qual caso la posizione del baricentro viene determinata semplicemente dalla sua definizione (6.7). Per la seconda equazione cardinale si fanno considerazioni analoghe: in generale il momento risultante delle forze esterne  $\vec{M}^{(e)}$  non risulta essere una funzione nota del momento angolare totale  $\vec{L}$  e del tempo e il suo valore al tempo  $t$  è determinato solo quando siano note le posizioni di tutti i punti del sistema allo stesso istante. Il caso di risolubilità (chiusura) più generale è quello in cui  $\vec{R}^{(e)} = \vec{R}^{(e)}(\vec{X}_G, \dot{\vec{X}}_G, \vec{L}, t)$ , e  $\vec{M}^{(e)} = \vec{M}^{(e)}(\vec{X}_G, \dot{\vec{X}}_G, \vec{L}, t)$ , perché allora il sistema di equazioni cardinali si scrive come sistema in forma normale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\vec{X}}_G = \vec{V}_G \\ \dot{\vec{V}}_G = \frac{1}{M}\vec{R}^{(e)}(\vec{X}_G, \vec{V}_G, \vec{L}, t) \\ \dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(e)}(\vec{X}_G, \vec{V}_G, \vec{L}, t) \end{cases} \quad (6.26)$$

Di nuovo, in generale, questo non avviene.

**Esempio 6.3.** *Un caso importante in cui le equazioni cardinali della dinamica forniscono una informazione rilevante sul moto è quello dei sistemi isolati, per i quali si ha, per definizione,  $\vec{F}_P^{(e)} = \vec{0}$  per ogni  $P$ , che a sua volta implica  $\vec{R}^{(e)} = \vec{0}$  e  $\vec{M}^{(e)} = \vec{0}$ , che è un caso particolare di (6.26). Allora dalla prima equazione cardinale (6.11) segue  $\ddot{\vec{x}}_G = \vec{0}$ , cioè il baricentro del sistema si muove di moto rettilineo e uniforme:  $\vec{X}_G(t) = \vec{X}_G(0) + \dot{\vec{X}}_G(0)t$ . Dalla seconda equazione cardinale (6.25) segue invece  $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$ , ovvero  $\vec{L}(t) = \vec{L}(0)$ : il momento angolare totale è costante, il suo valore essendo determinato dal dato iniziale. Il problema dei due corpi è l'esempio più semplice di sistema isolato.*

**Esempio 6.4.** *Un'altro caso in cui le equazioni cardinali sono risolvibili (e quindi rilevanti ai fini della dinamica) è quello dei sistemi di punti soggetti al proprio peso, per i quali l'unica forza esterna è  $\vec{F}_P^{(e)} = -m_P g \hat{z}$ . In tale caso si verifica facilmente che la prima equazione cardinale è  $M\ddot{\vec{X}}_G = -Mg\hat{z}$ , dove  $M = \sum_P m_P$  è la massa totale del sistema. Il baricentro  $G$  del sistema si muove dunque di moto uniformemente accelerato con traiettoria parabolica (in generale):*

$$\vec{X}_G(t) = \vec{X}_G(0) + \dot{\vec{X}}_G(0)t - \hat{z}\frac{gt^2}{2} \quad .$$

Si verifica inoltre che la seconda equazione cardinale è  $\dot{\vec{L}} = -\vec{X}_G \times Mg\hat{z}$ . Sostituendo l'espressione di  $\vec{X}_G(t)$  scritta sopra, svolgendo il prodotto vettoriale e integrando si trova

$$\vec{L}(t) = \vec{L}(0) - [\vec{X}_G(0) \times Mg\hat{z}]t - [\dot{\vec{X}}_G(0) \times Mg\hat{z}] \frac{t^2}{2} .$$

Anche questo è un caso particolare di (6.26).

**Esercizio 6.1.** Considerare il caso dell'esempio precedente e aggiungere a  $-m_P g\hat{z}$  in  $\vec{F}_P^{(e)}$  la forza di attrito dovuto al mezzo, ovvero  $-2\mu m_P \vec{v}_P$ . Dimostrare che le equazioni cardinali si modificano come segue:

$$\ddot{\vec{X}}_G = -g\hat{z} - 2\mu\dot{\vec{X}}_G \quad ; \quad \dot{\vec{L}} = -\vec{X}_G \times Mg\hat{z} - 2\mu\vec{L} .$$

Provare a risolverle e a trarre conclusioni di carattere fisico (si noti che di nuovo si ha un caso particolare di (6.26)).

Il caso in cui le equazioni cardinali risultano necessarie e sufficienti per la descrizione della dinamica del sistema è quello del *corpo rigido*, definito come un sistema (finito o infinito) di punti materiali le cui mutue distanze restano costanti durante il moto:  $|\vec{x}_P - \vec{x}_Q| = \text{cost.}$  per ogni coppia di punti  $(P, Q)$  del sistema. Si osservi che la posizione di un corpo rigido nello spazio tridimensionale è determinata da 6 parametri di posizione. Infatti, ad esempio, servono 3 coordinate cartesiane per fissare la posizione di un qualsiasi punto  $P$  del corpo. Poi servono altre due coordinate per fissare la posizione di un secondo punto  $Q$ , che si può muovere sulla sfera di centro  $P$  e raggio  $|\vec{x}_P - \vec{x}_Q|$ ; tali coordinate sono ad esempio un angolo di longitudine e uno di latitudine. Infine, serve un angolo per determinare la rotazione del corpo attorno alla retta per  $P$  e  $Q$ . Quindi si devono determinare 6 parametri di posizione avendo a disposizione, come osservato sopra, 6 equazioni. Questo è naturalmente solo un argomento di plausibilità, che funziona per il corpo rigido ma non funziona per un sistema di due punti materiali.

**Esempio 6.5.** Come esempio illustrativo, confrontiamo due sistemi isolati: un manubrio rigido, costituito da due punti materiali vincolati a muoversi a distanza  $d$  costante, e un manubrio elastico, costituito da due punti materiali connessi da una molla ideale. Per semplicità si considerino i due punti di uguale massa  $m$ . Il secondo sistema è stato studiato come problema dei due corpi e sappiamo già che le due equazioni cardinali non sono sufficienti a determinare la dinamica relativa dei due punti. Per quanto riguarda il manubrio rigido, la prima equazione cardinale determina il moto del baricentro, che è rettilineo e uniforme. La seconda equazione cardinale implica invece la conservazione del momento angolare. Di conseguenza il moto relativo dei due punti è piano e nel sistema inerziale con origine nel baricentro (punto medio del manubrio) i due punti ruotano su un cerchio di raggio  $d$  con velocità costante  $v$  data da  $v = L/(2md)$ , essendo  $L$  il modulo del momento angolare.

Si può dimostrare che le due equazioni cardinali della dinamica (6.11) e (6.25) costituiscono un sistema di equazioni differenziali che descrive completamente la dinamica del corpo rigido, anche in presenza di eventuali vincoli. La stessa affermazione vale, con le dovute modifiche del caso, per sistemi di corpi rigidi.

## 6.4 Equazioni cardinali della statica

Per un sistema di punti materiali in equilibrio, per il quale vale  $\vec{F}_P^{(i)} + \vec{F}_P^{(e)} = \vec{0}$  per ogni  $P$ , valgono ovviamente le due *equazioni cardinali della statica*:

$$\boxed{\vec{R}^{(e)} = \vec{0}}; \quad (6.27)$$

$$\boxed{\vec{M}^{(e)} = \vec{0}}. \quad (6.28)$$

Queste si deducono immediatamente dalle equazioni cardinali della dinamica, ponendo  $\ddot{\vec{x}}_G = \vec{0}$  nella (6.11) e  $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$  nella (6.25) (all'equilibrio qualsiasi quantità dipendente da posizioni e velocità dei punti materiali è costante, cioè indipendente dal tempo). Naturalmente, come nel caso della dinamica, e per le stesse ragioni esposte sopra, le equazioni cardinali della statica sono del tutto inutili ai fini della determinazione della posizione di equilibrio e delle eventuali reazioni vincolari per un sistema qualsiasi. Per contro, se ci si restringe al caso dei sistemi di corpi rigidi, le equazioni (6.27) e (6.28) diventano lo strumento standard con il quale si determinano le configurazioni di equilibrio e le relative reazioni vincolari. In particolare, risulta che *un sistema di corpi rigidi è in equilibrio se e solo se per ogni corpo valgono le equazioni cardinali della statica*. Nel risolvere problemi concreti può essere utile sostituire alcuni corpi reali con corpi ideali che ne costituiscono una buona approssimazione (quando e come dipenderà dal problema specifico studiato).

**Esempio 6.6.** *Asta ideale. L'asta ideale è un'asta rigida di massa e sezione trascurabili sollecitata da forze applicate esclusivamente ai suoi estremi. L'asta è dunque rappresentata da un segmento di estremi  $A$  e  $B$  di assegnata lunghezza. All'equilibrio, se  $\vec{F}_A$  e  $\vec{F}_B$  sono le due forze applicate agli estremi dell'asta  $AB$  si ha*

$$\vec{R}^{(e)} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad (6.29)$$

e, ponendo ad esempio l'origine in  $A$

$$\vec{M}_A^{(e)} = \overrightarrow{AA} \times \vec{F}_A + \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_B = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_B = \vec{0}. \quad (6.30)$$

Dunque  $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$  e  $\vec{F}_B \parallel \overrightarrow{AB}$ , cioè le due forze applicate agli estremi soddisfano le due condizioni del principio di azione e reazione: sono uguali in modulo, di verso opposto e con direzione comune la retta per i due rispettivi punti di applicazione. Si dice anche che le due forze applicate ( $A, \vec{F}_A$ ) e ( $B, \vec{F}_B$ ) costituiscono una coppia di braccio nullo: una "coppia" soddisfa per definizione la (6.29); il braccio della coppia è la quantità  $b \equiv |\overrightarrow{AB}| \sin \alpha$ , essendo  $\alpha (\leq \pi)$  l'angolo tra  $\overrightarrow{AB}$  e  $\vec{F}_B$  (se vale la (6.30) ovviamente  $b = 0$ ). Per un'asta rigida sono possibili quindi solo due tipi di configurazioni di forze all'equilibrio. Una è quella in cui  $\vec{F}_A$  punta verso  $B$  (ha il verso di  $\overrightarrow{AB}$ ) e  $\vec{F}_B$  punta verso  $A$  (ha il verso di  $\overrightarrow{BA}$ ), nella quale si dice che l'asta lavora come "puntone". Nell'altra configurazione, con forze girate, si dice che l'asta lavora come "tirante".

Il *filo ideale* è invece un filo di massa e sezione trascurabili, inestensibile e perfettamente flessibile, che resiste solo a trazione, cioè lavora solo come tirante. Ai fini pratici, quando si ha a che fare con un tirante di massa trascurabile e assegnata lunghezza, l'asta ideale e il filo ideale sono del tutto equivalenti.



## 6.5 Sistemi di forze applicate

Motivati dalle equazioni cardinali della statica, discutiamo in dettaglio alcune proprietà generali dei sistemi di punti materiali sotto l'azione di certe assegnate forze esterne. In particolare, vogliamo vedere sotto quali condizioni due sistemi di questo tipo possono essere considerati equivalenti dal punto di vista delle equazioni cardinali, in modo che si possa sostituire un sistema complicato di punti e forze con uno più semplice ai fini del calcolo.

Si definisce *sistema di forze applicate* un insieme della forma  $\{(P, \vec{f}_P)\}_P$ , dove  $P$  indica un punto nello spazio e  $\vec{f}_P$  indica la forza in esso applicata. La notazione  $\{ \}_P$  è volutamente aspecifica:  $P$  varia in un assegnato insieme di punti nello spazio. Più precisamente, assegnato un insieme  $\mathcal{B}$  di punti nello spazio, si definisce su di esso una funzione a valori vettoriali  $P \mapsto \vec{f}_P$ , che ad ogni punto  $P \in \mathcal{B}$  associa una forza in esso applicata; il sistema di forze applicate  $\{(P, \vec{f}_P)\}_{P \in \mathcal{B}}$  è il grafico di tale funzione. Si definiscono quindi in modo naturale il *risultante*

$$\vec{R} \equiv \sum_P \vec{f}_P \quad (6.31)$$

e il *momento risultante rispetto al polo*  $O$

$$\vec{M}_O \equiv \sum_P \vec{OP} \times \vec{f}_P \quad (6.32)$$

del dato sistema di forze applicate. Si osservi che il momento risultante, a differenza del risultante, dipende dalla scelta del “polo” di riferimento (cioè dell'origine rispetto alla quale sono definiti i vettori posizione dei punti). Spostando il polo da  $O$  a  $O'$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_P \vec{O'P} \times \vec{f}_P = \sum_P (\vec{O'O} + \vec{OP}) \times \vec{f}_P = \\ &= \vec{O'O} \times \underbrace{\sum_P \vec{f}_P}_\vec{R} + \underbrace{\sum_P \vec{OP} \times \vec{f}_P}_{\vec{M}_O}, \end{aligned}$$

cioè

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}, \quad (6.33)$$

che è la così detta *formula di trasposizione del momento risultante*.

**Osservazione 6.2.** Dalla (6.33) segue che se  $\vec{R} = \vec{0}$  allora  $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$ , per ogni scelta di  $O'$ , cioè il momento risultante non dipende dalla scelta del polo. In particolare, questa è il caso di interesse quando valgono le equazioni cardinali della statica.

**Esempio 6.7.** Il sistema di due forze applicate  $(P, \vec{f}), (Q, -\vec{f})$  si chiama “coppia”. Il risultante della coppia è chiaramente nullo; il momento risultante rispetto ad un polo  $O$  è

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{f} + \vec{OQ} \times (-\vec{f}) = \vec{PQ} \times \vec{f}.$$

In questo esempio si vede chiaramente che il momento di una coppia è indipendente dal polo.

Consideriamo ora due sistemi di forze applicate  $\{(P, \vec{f}_P)\}_P$  e  $\{(Q, \vec{g}_Q)\}_Q$ , con risultanti

$$\vec{R} = \sum_P \vec{f}_P \quad ; \quad \vec{S} = \sum_Q \vec{g}_Q$$

e momenti risultanti (rispetto a uno stesso polo  $O$ )

$$\vec{M}_O = \sum_P \overrightarrow{OP} \times \vec{f}_P \quad ; \quad \vec{N}_O = \sum_Q \overrightarrow{OQ} \times \vec{g}_Q .$$

I due sistemi si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso risultante e lo stesso momento risultante, cioè  $\vec{R} = \vec{S}$  e  $\vec{M}_O = \vec{N}_O$ . Si osservi che se i due sistemi sono equivalenti per una data scelta del polo  $O$ , lo sono per qualsiasi altra scelta  $O'$ . Infatti, dalla formula di trasposizione (6.33), passando da  $O$  a  $O'$  otteniamo

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$$

e

$$\vec{N}_{O'} = \vec{N}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{S} ,$$

dalle quali si vede subito che se  $\vec{R} = \vec{S}$  e  $\vec{M}_O = \vec{N}_O$  allora  $\vec{M}_{O'} = \vec{N}_{O'}$ .

**Esempio 6.8.** *Qualsiasi sistema di forze applicate con risultante  $\vec{R}$  e momento risultante  $\vec{M}_O$  è equivalente al sistema di tre forze applicate*

$$(O, \vec{R}) , (P_1, \vec{F}) , (P_2, -\vec{F}) , \quad (6.34)$$

*cioè: “risultante nel polo più coppia opportuna”. Infatti, il risultante del sistema (6.34) è evidentemente  $\vec{R}$ , mentre il momento risultante rispetto al polo  $O$  è pari al momento risultante della coppia, ovvero  $\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{F}$ , che risulta uguale a  $\vec{M}_O$  scegliendo ad esempio  $P_1, P_2$  e  $\vec{F}$  nel piano ortogonale a  $\vec{M}_O$  stesso, in modo che  $\overrightarrow{P_2P_1}, \vec{F}$  e  $\vec{M}_O$  formino una terna destrorsa, con  $|\overrightarrow{P_2P_1}||\vec{F}| = |\vec{M}_O|$ .*

Tra i sistemi di forze applicate risultano particolarmente interessanti i *sistemi di forze applicate parallele*, della forma  $\{(P, f_P \hat{u})\}_P$ , con le  $f_P$  costanti assegnate e  $\hat{u}$  versore assegnato. Il risultante di tale sistema è

$$\vec{R} = \sum_P f_P \hat{u} = \left( \sum_P f_P \right) \hat{u} \equiv R \hat{u} , \quad (6.35)$$

mentre il momento risultante rispetto ad  $O$  è

$$\vec{M}_O = \sum_P \overrightarrow{OP} \times f_P \hat{u} = \left( \sum_P f_P \overrightarrow{OP} \right) \times \hat{u} . \quad (6.36)$$

Se  $R = \sum_P f_P \neq 0$ , dividendo e moltiplicando il lato destro della precedente uguaglianza per  $R$  stesso si ottiene

$$\vec{M}_O = \left( \frac{\sum_P f_P \overrightarrow{OP}}{\sum_P f_P} \right) \times \vec{R} \equiv \overrightarrow{OC} \times \vec{R} . \quad (6.37)$$

Il punto  $C$ , di vettore posizione definito nella precedente relazione (somma pesata delle posizioni dei punti  $P$  con pesi le  $f_P$ ), si chiama *centro* del sistema di forze applicate parallele. Il sistema di forze applicate parallele con risultante non nulla è equivalente alla singola forza applicata  $(C, \vec{R})$ .

**Esempio 6.9.** *Il classico esempio di forze applicate parallele è quello delle forze peso, ovvero  $\{(P, -m_P g \hat{z})\}_P$ . Questo sistema è equivalente alla forza applicata  $(G, -Mg \hat{z})$ , dove  $M = \sum_P m_P$  è la massa totale e il centro  $G$  del sistema è dato dal baricentro:*

$$\vec{OG} = \frac{\sum_P (-m_P g) \vec{OP}}{\sum_P (-m_P g)} = \frac{\sum_P m_P \vec{OP}}{\sum_P m_P}. \quad (6.38)$$

## 6.6 Solidi in appoggio ideale

Sia  $\mathcal{S}$  un solido (corpo rigido) appoggiato sul piano orizzontale  $\{z = 0\}$  (cioè il piano  $x, y$ ) in assenza di attrito, e sia  $\mathcal{A} \equiv \{A \in \mathcal{S} : z_A = 0\}$  l'insieme dei suoi punti di appoggio. L'insieme  $\mathcal{A}$  dei punti di appoggio può essere finito o infinito (numerabile o meno). L'appoggio in assenza di attrito statico è detto appoggio ideale, ed è caratterizzato dall'assenza di componenti orizzontali delle reazioni vincolari applicate nei punti di appoggio.

Si definisce *poligono di appoggio*  $\mathcal{P}_a$  del solido  $\mathcal{S}$  il poligono convesso dei suoi punti di appoggio, l'involuppo convesso dell'insieme  $\mathcal{A}$ . Quest'ultimo è definito come la regione chiusa e convessa (del piano  $\{z = 0\}$ ) contenente  $\mathcal{A}$  e di area minima o, equivalentemente, come l'intersezione di tutte le possibili regioni chiuse e convesse contenenti  $\mathcal{A}$ . Si ricorda che una regione piana si dice convessa se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti appartenenti ad essa. Si ricorda anche che assegnati due punti  $P_1$  e  $P_2$ , il segmento (orientato) che li unisce ha equazione parametrica

$$\vec{OP}(\lambda) = (1 - \lambda) \vec{OP}_1 + \lambda \vec{OP}_2, \quad (6.39)$$

con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , in modo che  $P(0) = P_1$  e  $P(1) = P_2$ . La convessità del poligono di appoggio richiede che  $P(\lambda) \in \mathcal{P}_a$  per ogni coppia di punti  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_a$  e ogni  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Esempio 6.10.** *Se  $\mathcal{A}$  consiste di due punti,  $\mathcal{P}_a$  è costituito dal segmento che li unisce (estremi inclusi); se i punti sono tre, non allineati,  $\mathcal{P}_a$  è costituito dal triangolo con vertici nei tre punti (incluso il perimetro).*

**Esempio 6.11.** *Per un tavolo con gambe a sezione circolare,  $\mathcal{A}$  è idealmente costituito dall'unione di quattro cerchi (le basi di appoggio delle gambe); il perimetro del poligono di appoggio  $\mathcal{P}_a$  si ottiene passando uno spago attorno alla base delle gambe e compiendo un giro completo.*

Il solido  $\mathcal{S}$  è soggetto a due sistemi di forze applicate. Il primo è il sistema di carichi  $\{(P, -q_P \hat{z})\}_{P \in \mathcal{S}}$ , con  $q_P > 0$  per ogni  $P$ . Nel caso "libero"  $q_P = m_P g$ , cioè il sistema di carichi consiste nelle sole forze peso dei punti materiali del solido; in generale  $q_P \geq m_P g$ . Il sistema di carichi è equivalente alla sola forza applicata  $(C_q, \vec{Q})$ , dove il centro dei carichi  $C_q$  ha posizione

$$\vec{OC}_q = \frac{\sum_{P \in \mathcal{S}} q_P \vec{OP}}{\sum_{P \in \mathcal{S}} q_P}, \quad (6.40)$$

mentre il risultante  $\vec{Q}$  è dato da

$$\vec{Q} = - \left( \sum_{P \in \mathcal{S}} q_P \right) \hat{z} \equiv -Q \hat{z}. \quad (6.41)$$

Si definisce **centro di pressione** del solido appoggiato  $\mathcal{S}$  la proiezione  $C_*$  sul piano di appoggio del centro  $C_q$  del sistema di carichi. In pratica, poiché il piano di appoggio è  $\{z = 0\}$ , se  $C_q = (X, Y, Z)$  allora  $C_* = (X, Y, 0)$ . Il secondo sistema di forze a cui è soggetto  $\mathcal{S}$  è il sistema di reazioni vincolari di appoggio  $\{(A, \phi_A \hat{z})\}_{A \in \mathcal{A}}$ , con  $\phi_A \geq 0$  per ogni  $A$  (e certamente  $\phi_A > 0$  per qualche  $A$ ). Il sistema di reazioni è equivalente alla sola forza applicata  $(C_a, \vec{\Phi})$ , dove il centro  $C_a$  delle reazioni di appoggio ha posizione

$$\vec{OC}_a = \frac{\sum_{A \in \mathcal{A}} \phi_A \vec{OA}}{\sum_{A \in \mathcal{A}} \phi_A}, \quad (6.42)$$

mentre il risultante  $\vec{\Phi}$  delle reazioni è dato

$$\vec{\Phi} = \left( \sum_{A \in \mathcal{A}} \phi_A \right) \hat{z} \equiv \Phi \hat{z}. \quad (6.43)$$

Mostriamo ora che  $C_a \in \mathcal{P}_a$ , cioè il centro del sistema di reazioni appartiene al poligono di appoggio. Si consideri infatti una qualsiasi sequenza di punti  $A, A', A'', \dots \in \mathcal{A}$ , con corrispondenti reazioni  $\phi_A, \phi_{A'}, \phi_{A''}, \dots$ . Il centro  $C'$  del sistema di due reazioni  $\{(A, \phi_A), (A', \phi_{A'})\}$  ha posizione

$$\vec{OC}' = \frac{\phi_A \vec{OA} + \phi_{A'} \vec{OA}'}{\phi_A + \phi_{A'}} = \frac{\phi_A}{\phi_A + \phi_{A'}} \vec{OA} + \frac{\phi_{A'}}{\phi_A + \phi_{A'}} \vec{OA}', \quad (6.44)$$

ed è quindi della forma (6.39) (i coefficienti della combinazione lineare sono non negativi e a somma uno). Allora  $C'$  appartiene al segmento  $AA'$  che a sua volta, per convessità, appartiene tutto al poligono di appoggio  $\mathcal{P}_a$ ; quindi  $C' \in \mathcal{P}_a$ . Si aggiunga ora il terzo punto  $A''$ . Il centro  $C''$  del sistema di tre reazioni  $\{(A, \phi_A), (A', \phi_{A'}), (A'', \phi_{A''})\}$  ha posizione

$$\begin{aligned} \vec{OC}'' &= \frac{\phi_A \vec{OA} + \phi_{A'} \vec{OA}' + \phi_{A''} \vec{OA}''}{\phi_A + \phi_{A'} + \phi_{A''}} = \\ &= \frac{(\phi_A + \phi_{A'}) \vec{OC}' + \phi_{A''} \vec{OA}''}{\phi_A + \phi_{A'} + \phi_{A''}} = \\ &= \frac{\phi_A + \phi_{A'}}{\phi_A + \phi_{A'} + \phi_{A''}} \vec{OC}' + \frac{\phi_{A''}}{\phi_A + \phi_{A'} + \phi_{A''}} \vec{OA}'', \end{aligned} \quad (6.45)$$

dove nel secondo passaggio si è fatto uso della (6.44). Il vettore posizione di  $C''$  è della forma (6.39), quindi  $C''$  appartiene al segmento  $C'A''$ . Essendo  $C'$  e  $A''$  appartenenti a  $\mathcal{P}_a$  tutto il segmento  $C'A''$  appartiene a  $\mathcal{P}_a$  e, di conseguenza,  $C'' \in \mathcal{P}_a$ . Per un numero finito di punti di appoggio questo procedimento fornisce il centro delle reazioni  $C_a$  in un numero finito di passi. Se invece  $\mathcal{A}$  è infinito numerabile il procedimento porta a  $C_a$  al limite. È evidente che  $C_a$ , costruito in questo modo, appartiene a  $\mathcal{P}_a$ , poiché appartiene a  $\mathcal{P}_a$  il centro costruito ad ogni passo. Il caso in cui  $\mathcal{A}$  è infinito non numerabile è più difficile da trattare ma si riconduce al caso numerabile.

**Osservazione 6.3.** *La procedura appena vista suggerisce la seguente definizione di poligono di appoggio  $\mathcal{P}_a(\mathcal{A})$  generato dall'insieme dei punti di appoggio  $\mathcal{A}$ :*

$$\mathcal{P}_a(\mathcal{A}) = \left\{ P \in \{z = 0\} : \vec{OP} = \sum_{A \in \mathcal{A}} \rho_A \vec{OA}, \forall \{\rho_A\}_{A \in \mathcal{A}} : \rho_A \geq 0, \sum_{A \in \mathcal{A}} \rho_A = 1 \right\} .$$

Con tale definizione l'affermazione  $C_a \in \mathcal{P}_a$  diventa ovvia (si rifletta bene sul perché).

Vale il seguente teorema.

**Teorema 6.1** (sul centro di pressione). *Un solido in appoggio ideale è in equilibrio se e solo se il centro di pressione appartiene al poligono di appoggio ( $\mathcal{S}$  è in equilibrio  $\Leftrightarrow C_* \in \mathcal{P}_a$ ).*

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\mathcal{S}$  è in equilibrio se e solo se sono soddisfatte le equazioni cardinali della statica. La prima è

$$\vec{R}^{(e)} = \vec{Q} + \vec{\Phi} = -Q\hat{z} + \Phi\hat{z} = \vec{0} ,$$

soddisfatta se e solo se  $Q = \Phi$  cioè se e solo se

$$\sum_{P \in \mathcal{S}} q_P = \sum_{A \in \mathcal{A}} \phi_A , \quad (6.46)$$

che è sempre vera con una opportuna scelta delle reazioni. La seconda equazione cardinale della statica, scegliendo  $C_*$  come polo, è

$$\vec{M}_{C_*}^{(e)} = \overrightarrow{C_*C_q} \times \vec{Q} + \overrightarrow{C_*C_a} \times \vec{\Phi} = \overrightarrow{C_*C_a} \times \vec{\Phi} = \vec{0} , \quad (6.47)$$

essendo  $\overrightarrow{C_*C_q} \times \vec{Q} = \vec{0}$  poiché  $\overrightarrow{C_*C_q} \parallel \vec{Q}$ . Tenendo conto del fatto che  $\overrightarrow{C_*C_a} \perp \vec{\Phi}$ , e che ovviamente  $\vec{\Phi} \neq \vec{0}$ , l'equazione (6.47) può essere soddisfatta se e solo se  $\overrightarrow{C_*C_a} = \vec{0}$ , cioè se e solo se  $C_* = C_a \in \mathcal{P}_a$ .  $\square$

## 6.7 Vincoli ideali: principio dei lavori virtuali

Consideriamo un sistema di punti materiali soggetto a vincoli, le cui equazioni di Newton sono

$$m_P \vec{a}_P = \vec{F}_P^{(a)} + \vec{\phi}_P , \quad (6.48)$$

avendo separato nella forza agente sul punto  $P$  il contributo della forza attiva  $\vec{F}_P^{(a)}$  da quello della reazione vincolare  $\vec{\phi}_P$ . I vincoli considerati possono essere fermi o in movimento; si considera solo il caso di vincoli bilateri (ed esempio punto vincolato a muoversi su una superficie).

Si definisce *spostamento virtuale infinitesimo*  $\delta \vec{x}_P$  ogni spostamento infinitesimo del punto  $P$  compatibile con i vincoli "bloccati" (tenuti fermi). Nel caso di vincoli in movimento  $\delta \vec{x}_P \neq d\vec{x}_P = \vec{v}_P dt$ , cioè lo spostamento virtuale del punto  $P$  non è uno spostamento "possibile" del punto. Si consideri ad esempio un punto materiale vincolato a muoversi su un pavimento che sale con velocità costante  $v_0$  lungo la verticale (persona in ascensore). In tale caso si ha  $d\vec{x}_P =$

$\vec{v}_{\parallel} dt + v_0 \hat{z} dt$ , essendo  $\vec{v}_{\parallel}$  la “reale” velocità istantanea del punto parallela al pavimento. D'altra parte, per definizione,  $\delta \vec{x}_P = \vec{u}_{\parallel} dt$ , dove  $\vec{u}_{\parallel}$  è una qualsiasi velocità parallela al pavimento. Quindi  $d\vec{x}_P - \delta \vec{x}_P = (\vec{v}_{\parallel} - \vec{u}_{\parallel}) dt + v_0 \hat{z} dt$ , che è sempre diverso da  $\vec{0}$  se  $v_0 \neq 0$ . D'altra parte, se  $v_0 = 0$ , allora  $d\vec{x}_P = \delta \vec{x}_P$  con la scelta  $\vec{u}_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel}$ .

Per un singolo punto vincolato ad una superficie  $\delta \vec{x}_P$  è un qualsiasi vettore (infinitesimo) sul piano tangente alla superficie nel punto  $P$ . In questo caso sappiamo che l'idealità del vincolo, cioè l'assenza di attrito, è espressa dalla ortogonalità di  $\vec{\phi}_P$  alla superficie nel punto  $P$ , ovvero da  $\vec{\phi}_P \cdot \delta \vec{x}_P = 0$ : il lavoro compiuto dalla reazione lungo ogni spostamento virtuale (infinitesimo) è nullo. Per analogia, la caratterizzazione dei vincoli (bilateri) ideali per sistemi generali di punti materiali è data dalla seguente ipotesi:

*Dato un sistema di punti materiali soggetti a vincoli bilateri ideali, il lavoro totale compiuto dalle reazioni vincolari lungo ogni spostamento virtuale (infinitesimo) dell'intero sistema è nullo:*

$$\boxed{\delta L^{(v)} \equiv \sum_P \vec{\phi}_P \cdot \delta \vec{x}_P = 0} . \quad (6.49)$$

Ora, dal sistema di equazioni di Newton (6.48) si ricava  $\vec{\phi}_P = m_P \vec{a}_P - \vec{F}_P^{(a)}$  che, inserita nella (6.49) fornisce il così detto principio di d'Alambert:

$$\sum_P \left( m_P \vec{a}_P - \vec{F}_P^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{x}_P = 0 \quad \forall \{ \delta \vec{x}_P \} . \quad (6.50)$$

Nel caso particolare della statica, il principio di d'Alambert (6.50) diventa

$$\delta L_{eq}^{(a)} \equiv \sum_P \vec{F}_P^{(a)}(\vec{X}^{(eq)}, \vec{0}) \cdot \delta \vec{x}_P = 0 \quad \forall \{ \delta \vec{x}_P \} , \quad (6.51)$$

il così detto principio dei lavori virtuali, che esprime l'annullarsi del lavoro compiuto dalle forze attive lungo ogni spostamento virtuale infinitesimo rispetto all'equilibrio. Si noti che le forze attive comprendono, in generale, sia le forze interne che le forze esterne, e che le forze attive calcolate all'equilibrio in generale sono non nulle:  $\vec{F}_P^{(a)}(\vec{X}^{(eq)}, \vec{0}) = -\vec{\phi}_P$ . Il principio dei lavori virtuali (6.51) viene utilizzato in pratica per calcolare le reazioni vincolari, facendo uso di un trucco. Dato un sistema di punti soggetto a vincoli, si “libera” un vincolo e si promuove a forza attiva la reazione che il vincolo esercitava. Si considerano quindi degli spostamenti virtuali (compatibili con i rimanenti vincoli bloccati) tali che la (6.51) fornisca un sistema di equazioni lineari per la forza attiva (ex reazione vincolare) incognita.

## 6.8 Esercizi

**Esercizio 6.2.** *Si consideri un sistema costituito da due aste ideali identiche  $AB$  e  $BC$ , di lunghezza  $L$ , con un estremo comune in  $B$ . I due estremi  $A$  e  $C$  sono bloccati in modo che sia l'asta  $AB$  che l'asta  $BC$  sono inclinate di un angolo  $\alpha$  rispetto alla retta per  $A$  e  $C$ . In  $B$  è applicata una forza  $\vec{F}$  complanare alle aste. Scrivere la condizione di equilibrio del sistema e determinare le reazioni vincolari in  $A$  e in  $C$ .*

Suggerimento: risolvere prima con le equazioni cardinali della statica e poi scomponendo la forza lungo le direzioni delle due aste.

Osservazione: se si sostituiscono le aste ideali con due fili ideali di lunghezza  $L$  non cambia nulla finché la forza  $\vec{F}$  è tale che entrambi i fili lavorano come tiranti.

**Esercizio 6.3.** In un piano verticale, un'asta rigida  $AB$  di lunghezza  $L$  e massa  $M$  è poggiata a terra in  $A$  e alla parete in  $B$ . L'appoggio in  $B$  è privo di attrito, mentre in  $A$  si ha attrito statico di coefficiente  $f_s$ . Sia  $\alpha (< \pi/2)$  l'angolo di inclinazione dell'asta rispetto al piano orizzontale. Sul sistema agisce la gravità. Determinare le reazioni vincolari in  $A$  e in  $B$ ; determinare il valore minimo dell'angolo di inclinazione affinché l'asta sia in equilibrio.

**Esercizio 6.4.** Una sfera rigida di raggio  $R$  e massa  $M$  è poggiata contro un gradino di altezza  $h < R$ . Siano  $C$  il punto di appoggio della sfera sul pavimento e  $A$  il punto di appoggio della sfera sullo spigolo del gradino. La sfera è spinta contro il gradino con una forza orizzontale  $\vec{F}$  applicata ad altezza  $R + r$  rispetto al punto  $C$  ( $-R + h < r < R$ ). Sul sistema agisce la gravità. Calcolare le reazioni vincolari in  $C$  e  $A$ ; determinare il valore minimo di  $|\vec{F}|$  necessario a far staccare la sfera da terra facendo perno in  $A$ .

**Esercizio 6.5.** Un'asta rigida  $OC$  di massa  $M$  e lunghezza  $L$  è appoggiata sul piano orizzontale nei punti  $A$  e  $B$ , tali che  $0 < x_A < L/2 < x_B < L$ . Un carico  $q > 0$  agisce nell'estremo  $C$  dell'asta, oltre alla gravità. Determinare le reazioni in  $A$  e in  $B$  e le condizioni che devono essere soddisfatte dal carico affinché il sistema sia in equilibrio. Ricavare le condizioni di equilibrio facendo uso del teorema sul centro di pressione.

**Esercizio 6.6.** Una gru è schematizzata da un sistema composto da tre aste rigide (più un contrappeso opportuno). La prima asta,  $OA$ , di lunghezza  $a$ , giace lungo l'asse  $x$  ( $x_O = 0$ ,  $x_A = a$ ), appoggiata negli estremi  $O$  e  $A$ , senza attrito. La seconda asta parte dal centro della prima, parallela all'asse  $y$ . La terza è incernierata sull'estremo superiore della seconda, disposta orizzontalmente nel piano  $x, y$ ; l'avambraccio, cioè la porzione che va dalla cerniera all'estremo più lontano (a destra) ha lunghezza  $L$ . La gru, di massa totale  $M$ , porta un carico  $q = mg$ , di ascissa  $\bar{x}$  ( $a/2 < \bar{x} < L + a/2$ ). Il baricentro della gru scarica ha ascissa  $0 < x_G < a$ . Facendo uso del teorema sul centro di pressione, determinare l'intervallo di variabilità di  $\bar{x}$  affinché la gru sia in equilibrio; determinare poi il valore massimo per la massa del carico  $m$  affinché la gru possa sfruttare tutta la lunghezza dell'avambraccio. Ripetere l'analisi precedente facendo uso delle equazioni cardinali della statica e determinando, in particolare, le reazioni di appoggio in  $O$  e in  $A$ .

**Esercizio 6.7.** Facendo uso del principio dei lavori virtuali calcolare le reazioni di appoggio di una trave  $OC$  di lunghezza  $L$ , massa  $M$ , appoggi in  $A$  e  $B$  tali che  $0 < x_A < L/2 < x_B < L$  e carico  $q$  in  $C$ .

**Esercizio 6.8.** Considerare una leva all'equilibrio, cioè un'asta ideale  $AB$  incernierata nel punto  $O$  (fulcro) tale che il segmento  $OA$  è lungo  $a$  e il segmento  $OB$  è lungo  $b$ . L'asta è soggetta alle forze  $(A, \vec{F}_A)$ ,  $(B, \vec{F}_B)$  e alla reazione  $(O, \vec{\phi}_O)$ . Si determini la condizione di equilibrio della leva facendo uso del principio dei lavori virtuali. Si liberi il fulcro e, sempre facendo uso del principio dei lavori virtuali, si calcoli la reazione in  $O$ . Si analizzi il problema facendo uso delle equazioni cardinali della statica.

**Esercizio 6.9.** *Un modello di arco è costituito da cinque punti materiali di uguale massa  $m$ , disposti nel piano verticale  $x, y$ . Il primo punto al vertice è collegato ai due punti vicini (disposti simmetricamente più in basso, uno a sinistra e uno a destra) tramite due aste ideali uguali di lunghezza  $\ell$  e inclinate ognuna di un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $y$  verticale. Ognuno dei due punti in questione è collegato a sua volta ad un altro punto, poggiato a terra (cioè sull'asse  $x$ ), tramite un'asta ideale di lunghezza fissata inclinata di un angolo  $\beta$  rispetto all'asse  $x$ . Assegnato  $\alpha$ , determinare il valore di  $\beta$  affinché il sistema sia in equilibrio. Determinare il valore delle reazioni vincolari nei punti di appoggio a terra.*



# Capitolo 7

## Cinematica relativa e rigida

### 7.1 Legge di Newton in un sistema non inerziale

Sia  $S$  un sistema di riferimento inerziale in cui è fissata una terna ortonormale  $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ . Si consideri un sistema di riferimento  $S'$  che si muove rispetto a  $S$  di moto qualsiasi. In  $S'$  è fissata una terna ortonormale  $(O', \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$  ( $O$  e  $O'$  sono le rispettive origini delle due terne; si ricorda che un asse nello spazio - cioè una retta orientata - è individuato da una coppia punto-vettore). I versori di base di  $S$  sono fissi, cioè indipendenti dal tempo, mentre i versori di base di  $S'$  sono mobili, cioè dipendono dal tempo. Senza perdita di generalità si può sempre pensare che la base fissa sia quella canonica. Sia  $P$  un punto materiale di massa  $m$  che si muove nello spazio. La dinamica di  $P$  nel sistema  $S$  è descritta dall'equazione di Newton  $m\vec{a} = \vec{f}$ , essendo  $\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$  la risultante delle forze agenti su  $P$ . Vogliamo capire *se e come* si modifica tale legge se il moto del punto  $P$  viene osservato nel sistema mobile (e in generale *non* inerziale)  $S'$ . La motivazione per tale studio nasce dalla necessità di spiegare la natura di certe forze che si manifestano nei sistemi non inerziali: le così dette forze apparenti (cioè forze non riconducibili alla interazione tra corpi). Introduciamo a tale scopo i seguenti tre vettori in  $S$  (espressi cioè come combinazioni lineari dei vettori di base  $\hat{e}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ):

- $\overrightarrow{OP} \equiv \vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$ ;
- $\overrightarrow{O'P} \equiv \vec{x}' = x'_1\hat{e}'_1 + x'_2\hat{e}'_2 + x'_3\hat{e}'_3$ ;
- $\overrightarrow{OO'} \equiv \vec{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$ .

Vale ovviamente  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ , ovvero

$$\vec{x} = \vec{r} + \vec{x}' . \quad (7.1)$$

D'altra parte, il vettore  $\overrightarrow{O'P}$  può essere scritto nella base di  $S'$ , con coordinate  $X_1, X_2$  e  $X_3$ . Allora deve valere l'identità

$$x'_1\hat{e}'_1 + x'_2\hat{e}'_2 + x'_3\hat{e}'_3 = X_1\hat{e}'_1 + X_2\hat{e}'_2 + X_3\hat{e}'_3 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 x'_j\hat{e}'_j = \sum_{j=1}^3 X_j\hat{e}'_j .$$

Moltiplicando scalarmente da sinistra per  $\hat{e}_i$  si ottiene

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j) X_j \equiv \sum_{j=1}^3 R_{ij} X_j ,$$

dove si è introdotta la matrice  $R(t)$ ,  $3 \times 3$ , il cui elemento  $ij$  (riga  $i$ , colonna  $j$ ) è definito da

$$R_{ij}(t) \equiv \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j(t) . \quad (7.2)$$

Dunque l'identità (7.1) si riscrive (in  $S$ )

$$\vec{x} = \vec{r} + R\vec{X} , \quad (7.3)$$

o per componenti  $x_i = r_i + \sum_{j=1}^3 R_{ij} X_j$  per  $i = 1, 2, 3$ . Si dimostra facilmente che la matrice  $R(t)$  definita in (7.2) è, per ogni  $t$  fissato, una matrice ortogonale o, più precisamente, una matrice di rotazione, cioè soddisfa le condizioni

$$R^T R = \mathbb{I}_3 \quad ; \quad \det R = 1 . \quad (7.4)$$

Infatti vale

$$\begin{aligned} (R^T R)_{ik} &= \sum_{j=1}^3 (R^T)_{ij} R_{jk} = \sum_{j=1}^3 R_{ji} R_{jk} = \sum_{j=1}^3 (\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i) (\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_k) = \\ &= \hat{e}'_i \cdot \left( \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \hat{e}_j \right) \cdot \hat{e}'_k = \hat{e}'_i \cdot \left( \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \hat{e}_j^T \right) \hat{e}'_k = \hat{e}'_i \cdot \mathbb{I}_3 \hat{e}'_k = \\ &= \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k = (\mathbb{I}_3)_{ik} , \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della ortonormalità dei versori di base in  $S'$ . La condizione  $R^T R = \mathbb{I}_3$  (equivalente a  $RR^T = \mathbb{I}_3$ ) definisce le matrici ortogonali  $3 \times 3$ . Queste hanno determinante di modulo unitario:  $\det(R^T R) = (\det R)^2 = \det \mathbb{I}_3 = 1$ . È naturale supporre che a qualche istante di tempo, ad esempio a  $t = 0$ , la base di  $S'$  coincida con quella di  $S$ , e che il moto di ogni asse di  $S'$  sia continuo, in modo che sia continua la dipendenza dal tempo di  $R(t)$ . Allora  $\det R(0) = 1$  e quindi  $\det R(t) = 1$  per ogni  $t$ , essendo  $\det R$  una funzione continua degli elementi di  $R$ :  $\det R(t)$  è una funzione continua che può assumere solo due valori, ovvero  $\pm 1$ ; se a  $t = 0$  vale  $+1$  non può "saltare" al valore  $-1$ . Le matrici di rotazione sono definite appunto come il sotto-gruppo delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  con determinante  $+1$ .

Vogliamo ora ricavare l'equazione di Newton per il vettore  $\vec{X}$ , cosa che si ottiene derivando rispetto al tempo l'identità (7.3) due volte ed esplicitando  $m\ddot{\vec{X}}$  in funzione di tutti gli altri termini. Derivando una prima volta la (7.3) otteniamo

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{r}} + \dot{R}\vec{X} + R\dot{\vec{X}} = \dot{\vec{r}} + R \left( R^T \dot{R}\vec{X} + \dot{\vec{X}} \right) . \quad (7.6)$$

Ora, si vede facilmente che la matrice  $A \equiv R^T \dot{R}$  introdotta nell'ultimo passaggio sopra è antisimmetrica. Infatti, derivando rispetto al tempo l'identità  $R^T R = \mathbb{I}_3$ , si ottiene

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{R}^T R = -R^T \dot{R} ,$$

da cui segue che

$$A^T = (R^T \dot{R})^T = \dot{R}^T R = -R^T \dot{R} = -A .$$

Una matrice antisimmetrica  $3 \times 3$  è univocamente determinata da tre parametri, cioè dagli elementi di matrice che non giacciono sulla diagonale principale (quelli su tale diagonale sono nulli); pertanto  $A$  è necessariamente della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.7)$$

L'azione di  $A$  su un qualsiasi vettore  $\vec{u} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2 + u_3 \hat{e}_3$  è data da

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 u_3 - \Omega_3 u_2 \\ \Omega_3 u_1 - \Omega_1 u_3 \\ \Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1 \end{pmatrix} = \vec{\Omega} \times \vec{u} ,$$

essendo  $\vec{\Omega}$  il vettore colonna di componenti  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ . Si osservi che  $A\vec{\Omega} = \vec{0}$ , cioè  $\vec{\Omega}$  è l'autovettore di  $A$  corrispondente all'autovalore nullo. *Il vettore  $\vec{\Omega}(t)$  si chiama velocità angolare di  $S'$  rispetto a  $S$ , misurata in  $S'$* ; esso definisce l'asse istantaneo di rotazione del sistema mobile  $S'$ . L'introduzione di tale vettore permette di riscrivere la (7.6) nel modo seguente:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{r}} + R \left[ \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{X}} \right] . \quad (7.8)$$

Derivando ancora una volta rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{x}} &= \ddot{\vec{r}} + \dot{R} \left[ \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{X}} \right] + R \left[ \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} + \ddot{\vec{X}} \right] = \\ &= \ddot{\vec{r}} + R \left[ R^T \dot{R} \left( \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{X}} \right) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} + \ddot{\vec{X}} \right] = \\ &= \ddot{\vec{r}} + R \left[ \vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{X}} \right) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} + \vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} + \ddot{\vec{X}} \right] = \\ &= \ddot{\vec{r}} + R \left[ \vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{X} \right) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} + \ddot{\vec{X}} \right] . \end{aligned} \quad (7.9)$$

Riscrivendo quest'ultima identità  $\ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{r}} = R[\dots]$  e moltiplicando da sinistra per  $R^T$ , isoliamo la parentesi quadra  $[\dots] = R^T(\ddot{\vec{x}} - \ddot{\vec{r}})$ . Lasciando a sinistra solo  $\ddot{\vec{X}}$  e portando tutti gli altri termini nella parentesi quadra a destra dell'uguale otteniamo

$$\ddot{\vec{X}} = R^T \ddot{\vec{x}} - R^T \ddot{\vec{r}} - \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} - \vec{\Omega} \times \left( \vec{\Omega} \times \vec{X} \right) - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} .$$

A questo punto moltiplichiamo per la massa  $m$  del punto materiale e teniamo conto del fatto che  $m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ , ottenendo la legge di Newton

$$m\ddot{\vec{X}} = \vec{F} + \vec{F}_{it} + \vec{F}_{ir} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_{Cor} , \quad (7.10)$$

dove

$$\vec{F}(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) \equiv R^T \vec{f} \left( \vec{r} + R\vec{X}, \dot{\vec{r}} + R \left[ \vec{\Omega} \times \vec{X} + \dot{\vec{X}} \right], t \right) \quad (7.11)$$

è la forza “reale” (attiva) agente in  $S$  su  $P$  e misurata in  $S'$ ;

$$\vec{F}_{it} \equiv -mR^T \ddot{\vec{r}} \quad (7.12)$$

è la forza di inerzia traslazionale, dovuta all'accelerazione traslazionale di  $S'$  rispetto a  $S$ ;

$$\vec{F}_{ir} \equiv -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{X} \quad (7.13)$$

è la forza di inerzia rotazionale, dovuta all'accelerazione rotazionale di  $S'$  rispetto a  $S$ ;

$$\vec{F}_{cen} \equiv -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}) \quad (7.14)$$

è la forza centrifuga;

$$\vec{F}_{Cor} \equiv -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{X}} \quad (7.15)$$

è la forza di Coriolis.

**Esempio 7.1.** Si consideri il caso in cui  $S'$  si muove di moto traslatorio accelerato rispetto a  $S$ , con  $\vec{r}(t) = r_1(t)\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_1 = \hat{e}'_1$ ,  $\hat{e}_2 = \hat{e}'_2$ ,  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$ . Allora  $R = \mathbb{I}_3$  e  $\vec{F}_{it} = -m\ddot{r}_1\hat{e}_1$ , cioè la forza apparente ha verso opposto a quello dell'accelerazione di  $S'$ . È questo ad esempio il caso in cui ci si trova all'interno di un veicolo (sistema  $S'$ ) che si muove di moto rettilineo non uniforme (cioè accelerato rispetto alla strada  $S$ ). Si spiega così perché si è soggetti ad una spinta “all'indietro” se il veicolo accelera, o a una spinta “in avanti” se il veicolo frena.

**Esempio 7.2.** Supponiamo  $O' = O$  ed  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , cioè  $S'$  ruota rispetto a  $S$  intorno all'asse comune  $(O, \hat{e}_3)$ . La matrice  $R(t)$  in questo caso ha la forma

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo  $\theta(t)$  l'angolo di rotazione in funzione del tempo. Per quanto riguarda la matrice  $A$  e la velocità angolare  $\vec{\Omega}$  si ha:

$$A = R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}.$$

La forza di inerzia traslazionale  $\vec{F}_{it} = -R^T \ddot{\vec{r}}$  in questo caso è nulla, poiché  $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ . Si considerino le altre tre forze (7.13)-(7.15) e se ne disegni direzione e verso assumendo ad esempio  $\dot{\theta} > 0$  e  $\ddot{\theta} > 0$ . Queste sono le tre forze che agiscono ad esempio sulla pedana di una giostra in movimento rotatorio. Si osservi che se la pedana ruota con velocità angolare costante allora  $\vec{F}_{ir} = \vec{0}$ .

## 7.2 Forze apparenti e loro effetti

Le forze di inerzia  $\vec{F}_{it}$  e  $\vec{F}_{ir}$ , la forza centrifuga  $\vec{F}_{cen}$  e la forza di Coriolis  $\vec{F}_{Cor}$ , definite in (7.12)-(7.15), sono dette *forze apparenti* perché sono dovute al solo moto di  $S'$  rispetto a  $S$  e non sono riconducibili alle forze agenti sul punto materiale nel sistema inerziale  $S$ . Si osservi che se  $S'$  si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a  $S$ , cioè  $\ddot{r} = \vec{0}$  e  $\vec{\Omega} = \vec{0}$ , allora tutte le forze apparenti si annullano. Si osservi anche che le forze di inerzia e la forza centrifuga agiscono sul punto materiale anche se questo non si muove rispetto a  $S'$ , ovvero anche se, ad un dato istante di tempo,  $\dot{\vec{X}} = \vec{0}$ ; per tale ragione queste tre forze sono dette di trascinamento (agiscono sui punti trascinati dal sistema mobile e solidali ad esso). La forza di Coriolis agisce invece solo in presenza di moto relativo del punto rispetto al sistema mobile  $S'$ .

Esaminiamo più da vicino le caratteristiche generali della forza centrifuga e della forza di Coriolis. Per quanto riguarda la forza centrifuga (7.14) si ha

$$\vec{F}_{cen} \equiv -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}) = -m \left[ \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{X}) - \vec{X}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}) \right] = m|\vec{\Omega}|^2 \left[ \vec{X} - \hat{\Omega}(\hat{\Omega} \cdot \vec{X}) \right],$$

essendo  $\hat{\Omega} = \vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$  il versore della velocità angolare. Esaminando l'ultima parentesi quadra scritta sopra si capisce che si tratta della componente vettoriale di  $\vec{X}$  ortogonale a  $\vec{\Omega}$ , che possiamo indicare con  $\vec{X}_{\perp}$ . Dunque

$$\vec{F}_{cen} = m|\vec{\Omega}|^2 \vec{X}_{\perp}$$

e quindi la forza centrifuga è diretta perpendicolarmente all'asse di rotazione, con verso “uscende” rispetto a questo. La manifestazione più comune di tale forza è la spinta che si subisce verso l'esterno della curva all'interno di un veicolo che sterza deviando dal moto rettilineo.

La forza di Coriolis (7.15), come detto sopra, si manifesta solo in presenza di moto relativo del punto materiale rispetto al riferimento  $S'$ . Nell'esempio 7.2 della pedana rotante, si vede che la forza di Coriolis “spinge verso destra” rispetto alla direzione del moto quando  $\Omega = \dot{\theta} > 0$ , mentre spinge verso sinistra se  $\Omega < 0$ .

Le due forze appena menzionate sono le uniche forze apparenti rilevanti per la fisica sulla superficie terrestre. La Terra è chiaramente un sistema di riferimento non inerziale. Infatti, essa si muove rispetto alle “stelle fisse” ruotando attorno al proprio asse, girando attorno al Sole e muovendosi solidalmente alla Galassia di cui fa parte. Di tutti i moti considerati, quello più rilevante ai fini della meccanica terrestre è certamente la rotazione attorno all'asse Sud-Nord, in verso antiorario (da Ovest verso Est), con un periodo  $T = 2\pi/\Omega = 24$  ore. Il sistema  $S$  e il sistema  $S'$  in questo caso hanno l'asse terrestre Sud-Nord in comune, con origine nel centro della terra che si trova su tale asse. Dunque  $\vec{r} = \vec{0}$  e di conseguenza  $\vec{F}_{it} = \vec{0}$ . Inoltre la velocità angolare  $\vec{\Omega}$ , che ha direzione Sud-Nord, è con ottima approssimazione costante:  $\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$ . Di conseguenza  $\vec{F}_{ir} = \vec{0}$ .

Per quanto riguarda gli effetti della forza centrifuga, si vede facilmente che in entrambi gli emisferi questa ha una componente radiale che corregge (diminuendola, di poco) la forza di gravità, tale correzione essendo nulla ai poli e massima all'equatore. Inoltre in entrambi gli emisferi si ha una componente centrifuga tangenziale (a terra) che spinge verso Sud nell'emisfero boreale (nord) e verso Nord nell'emisfero australe (sud). L'effetto macroscopico della forza

centrifuga è la deformazione della Terra (e di tutti i pianeti e delle stelle, in generale), che non è di forma sferica e risulta “schiacciata” ai poli.

Per un punto materiale che si muove sulla superficie terrestre, si vede facilmente che la forza di Coriolis spinge verso destra (rispetto alla direzione del moto) nell’emisfero boreale e verso sinistra nell’emisfero australe. Questo fatto si verifica immediatamente considerando moti lungo i meridiani in entrambe le direzioni (Sud-Nord e Nord-Sud), per i quali la Forza di Coriolis risulta tangenziale al parallelo locale passante per il punto materiale in moto. Per un moto con componente longitudinale non nulla della velocità si trova che c’è sempre una componente della forza di Coriolis che spinge verso destra, tangenzialmente alla sfera, nell’emisfero boreale, e verso sinistra nell’emisfero australe. Fenomeni noti legati alla spinta direzionale della forza di Coriolis nell’emisfero boreale sono ad esempio, la formazione di vortici nei fluidi con verso di rotazione tipicamente antiorario, l’erosione maggiore della sponda destra dei fiumi e il consumo maggiore del lato destro dei binari e delle ruote di treni (nell’emisfero australe verso orario e lato sinistro, rispettivamente).

Uno degli effetti macroscopici della forza di Coriolis su scala terrestre è la formazione dei cicloni, ovvero perturbazioni atmosferiche caratterizzate dal moto rotatorio di masse d’aria attorno a zone di bassa pressione, sorgente tipica di maltempo. La forza locale (per unità di volume) agente sulla massa d’aria, trascurando l’attrito, è

$$\vec{f} = -\nabla p - 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (7.16)$$

dove  $\nabla p$  è il gradiente di pressione locale e  $\rho$  è la densità di massa locale dell’aria. La componente di forza  $-\nabla p$  spinge l’aria a muoversi ortogonalmente alle isobare (linee di livello della pressione: curve lungo le quali  $p$  è costante) verso il centro di bassa pressione. Nell’emisfero boreale la forza di Coriolis  $-2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v}$  devia il flusso d’aria verso destra rispetto alla direzione di moto. Si raggiunge una situazione stazionaria quando la forza totale (7.16) si annulla, cioè quando la forza di Coriolis bilancia perfettamente il gradiente di pressione: l’aria circola quindi lungo le isobare in senso antiorario. L’effetto dell’attrito, qui trascurato, genera un moto spiraleggiante verso l’occhio del ciclone. Nell’emisfero australe i cicloni sono caratterizzati da circolazione oraria.

### 7.3 Cinematica del corpo rigido libero

Dato un corpo rigido  $\mathcal{C}$  che si muove rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $S$ , consideriamo un sistema di riferimento  $S'$  solidale con  $\mathcal{C}$ . Allora un qualsiasi punto del corpo rigido è in quiete rispetto a  $S'$ :

$$\dot{\vec{X}}_P = \vec{0}, \quad \forall P \in \mathcal{C}. \quad (7.17)$$

Il moto del corpo rigido, come già detto, è completamente determinato dalle equazioni cardinali della dinamica. In particolare, la prima equazione descrive il moto del baricentro del corpo quando sia noto il risultante delle forze esterne. Il moto rotatorio del corpo è invece descritto dalla seconda equazione cardinale, opportunamente riscritta nel sistema  $S'$  solidale con il corpo. Nel seguito ci occupiamo di tale riscrittura nel caso di moto libero, cioè in assenza di vincoli, guardando come esempio fondamentale il caso di un corpo rigido nel campo di gravità.

Ricordiamo che la seconda equazione cardinale della dinamica, scritta in  $S$ , è

$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{m}_O^{(e)} , \quad (7.18)$$

dove  $\vec{\ell} = \sum_P \vec{x}_P \times m_P \dot{\vec{x}}_P$  è il momento angolare totale, mentre  $\vec{m}_O^{(e)} = \sum_P \vec{x}_P \times \vec{f}_P^{(e)}$  è il momento risultante delle forze esterne applicate al corpo. Si noti che qui usiamo lettere minuscole per indicare il momento angolare totale e il momento risultante delle forze esterne riferiti a  $S$ , mentre si farà uso di lettere maiuscole per indicare le stesse quantità riferite al sistema solidale  $S'$  (come già fatto in cinematica relativa). Per scrivere il momento angolare totale in  $S'$  abbiamo bisogno di riferire a tale sistema la posizione e la velocità di ogni punto del corpo. A tale scopo scriviamo le equazioni (7.3) e (7.8) per ogni punto  $P \in \mathcal{C}$  e teniamo conto della condizione (7.17), ovvero

$$\vec{x}_P = \vec{r} + R\vec{X}_P , \quad (7.19)$$

$$\dot{\vec{x}}_P = \dot{\vec{r}} + R(\vec{\Omega} \times \vec{X}_P) . \quad (7.20)$$

Allora, il momento angolare totale del corpo  $\mathcal{C}$  è dato da

$$\begin{aligned} \vec{\ell} &= \sum_{P \in \mathcal{C}} \vec{x}_P \times m_P \dot{\vec{x}}_P = \sum_{P \in \mathcal{C}} \left[ \vec{r} + R\vec{X}_P \right] \times m_P \left[ \dot{\vec{r}} + R(\vec{\Omega} \times \vec{X}_P) \right] = \\ &= \vec{r} \times M\dot{\vec{r}} + R \left( \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P \right) \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times R \left[ \vec{\Omega} \times \left( \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P \right) \right] + \\ &+ \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P R\vec{X}_P \times R(\vec{\Omega} \times \vec{X}_P) , \end{aligned} \quad (7.21)$$

dove  $M = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P$  è la massa totale del corpo. In due dei quattro termini che costituiscono l'espressione di  $\vec{\ell}$  compare la somma  $\sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P$ . Il legame di tale quantità con  $\vec{r}$  e con il baricentro del corpo si ottiene moltiplicando per  $m_P$  la (7.19), sommando su  $P$  e ricordando che  $\vec{x}_G = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{x}_P / M$ , così che

$$M\vec{x}_G = M\vec{r} + R \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P . \quad (7.22)$$

Le equazioni scritte sopra sono valide per qualsiasi scelta dell'origine  $O'$  solidale con il corpo rigido. Nel caso di moto libero, cioè in assenza di vincoli, è conveniente scegliere l'origine  $O'$  del sistema solidale  $S'$  coincidente con il baricentro  $G$  del corpo. Quindi  $O' = G$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} = \vec{x}_G$  e dalla (7.22) segue che  $\sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P = \vec{0}$ . Dunque il momento angolare totale, dato dalla (7.21), si semplifica perdendo due termini e diventa

$$\vec{\ell} = \vec{x}_G \times M\dot{\vec{x}}_G + R \left[ \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}_P) \right] . \quad (7.23)$$

Osserviamo che nel riscrivere il quarto termine della (7.21), ovvero il secondo della (7.23), si è tenuto conto del fatto che per ogni coppia di vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e ogni matrice di rotazione  $R$  si ha  $R(\vec{u} \times \vec{v}) = R\vec{u} \times R\vec{v}$  (intuitivamente ovvio: il ruotato del prodotto è il prodotto dei ruotati).

Osserviamo inoltre che la somma su  $P$  in parentesi quadre a destra della (7.23) può essere considerata come una funzione lineare di  $\vec{\Omega}$  (perché?), il che ci porta a introdurre la definizione

$$J_G \vec{\Omega} \equiv \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}_P), \quad (7.24)$$

dove  $J_G$  è la *matrice o tensore di inerzia del corpo  $\mathcal{C}$  relativa al baricentro  $G$ , o più brevemente tensore centrale di inerzia*. Si noti che la matrice di inerzia definita in (7.24) è riferita al baricentro del corpo perché, con la scelta fatta,  $O' = G$  e quindi  $R\vec{X}_P = \vec{O}'\vec{P} = \vec{G}\vec{P}$ , ovvero  $\vec{X}_P = R^T \vec{G}\vec{P}$ : le posizioni dei punti del corpo su cui si somma sono riferite al baricentro. Osserviamo che, per la condizione (7.17), la matrice di inerzia  $J_G$  è indipendente dal tempo.

Analizzeremo tra poco le proprietà della matrice di inerzia  $J_G$ . Qui puntiamo a riscrivere la seconda equazione cardinale (7.18) in  $S'$ . Prima di tutto, usando la definizione (7.24), il momento angolare totale assume l'espressione compatta

$$\vec{\ell} = \vec{x}_G \times M\dot{\vec{x}}_G + R J_G \vec{\Omega}. \quad (7.25)$$

Derivando rispetto al tempo tale espressione, uguagliando a  $\vec{m}_O^{(e)}$  e ricordando che  $R^T \dot{R} \vec{\xi} = \vec{\Omega} \times \vec{\xi}$  per ogni vettore  $\vec{\xi}$ , otteniamo

$$\vec{x}_G \times M\ddot{\vec{x}}_G + R \left[ J_G \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times J_G \vec{\Omega} \right] = \vec{m}_O^{(e)}. \quad (7.26)$$

Dalla prima equazione cardinale sappiamo che  $M\ddot{\vec{x}}_G = \vec{R}^{(e)}$ ; inoltre, dalla formula di trasposizione dei momenti si ha

$$\vec{m}_O^{(e)} - \vec{x}_G \times \vec{R}^{(e)} = \vec{m}_G^{(e)},$$

per cui si può riscrivere la (7.26) isolando la parentesi quadra come segue

$$\boxed{J_G \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times J_G \vec{\Omega} = \vec{M}_G^{(e)}}, \quad (7.27)$$

dove  $\vec{M}_G^{(e)} \equiv R^T \vec{m}_O^{(e)}$  è il momento risultante delle forze esterne rispetto al polo nel baricentro  $G$ , con componenti nel sistema  $S'$ . L'equazione vettoriale (7.27), equivalente a un sistema di tre equazioni differenziali non lineari del primo ordine, si chiama *equazione di Eulero per la dinamica libera del corpo rigido*. Una volta calcolata la matrice di inerzia  $J_G$  e noto il momento risultante  $\vec{M}_G^{(e)}$ , l'equazione di Eulero ha per incognita la velocità angolare  $\vec{\Omega}$  del corpo. Nota  $\vec{\Omega}$  è nota la matrice  $R^T \dot{R}$  e da questa si ricostruisce la matrice di rotazione  $R(t)$  che, assieme alla posizione  $\vec{x}_G(t)$  del baricentro del corpo (determinata dalla prima equazione cardinale), fornisce la posizione del corpo rigido nello spazio al tempo  $t$ .

**Esempio 7.3.** *Come esempio di moto rigido libero consideriamo il caso di un corpo rigido soggetto alla propria forza peso: in ogni punto  $P$  del corpo agisce la forza  $-m_P g \hat{z}$ . La prima equazione cardinale della dinamica è  $M\ddot{\vec{x}}_G = -Mg\hat{z}$ , dalla quale si ottiene immediatamente il moto del baricentro. Per quanto riguarda il momento risultante delle forze esterne si ha:*

$$\vec{m}_G^{(e)} = \sum_P \vec{G}\vec{P} \times (-m_P g \hat{z}) = - \left( \sum_P m_P \vec{G}\vec{P} \right) g \hat{z} = -\vec{G}\vec{G} M g \hat{z} = \vec{0}.$$



Quindi  $\vec{M}_G^{(e)} = R^T \vec{m}_G^{(e)} = \vec{0}$  e la rotazione del sistema è descritta dall'equazione di Eulero omogenea

$$J_G \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\Omega} \times J_G \vec{\Omega} = \vec{0}. \quad (7.28)$$

## 7.4 Forma e proprietà della matrice di inerzia

Si è visto che la rotazione libera di un corpo rigido è descritta dall'equazione di Eulero (7.27). In tali equazioni la matrice di inerzia riferita ad uno specifico punto, il baricentro  $G$ , gioca il ruolo di matrice dei coefficienti: essa va calcolata una volta per tutte per poter risolvere le equazioni del moto. Del tutto in generale, la matrice di inerzia  $J_Q$  del corpo rigido  $\mathcal{C}$ , relativa al punto  $Q$ , è definita da

$$J_Q \vec{\Omega} \equiv \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \vec{X}_P \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}_P); \quad (7.29)$$

dove  $R\vec{X}_P = \vec{Q}\vec{P}$  e abbiamo in mente  $Q = G$  (baricentro) nel caso di moto libero. Per eliminare  $\vec{\Omega}$  dalla definizione di  $J_Q$  svolgiamo il doppio prodotto vettoriale in (7.29), ottenendo

$$J_Q \vec{\Omega} = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 \vec{\Omega} - \vec{X}_P (\vec{X}_P \cdot \vec{\Omega}) \right] = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 \mathbb{I}_3 - \vec{X}_P \vec{X}_P^T \right] \vec{\Omega},$$

dove  $\mathbb{I}_3$  è la matrice identità  $3 \times 3$  e si è tenuto conto del fatto che  $\vec{X}_P \cdot \vec{\Omega} = \vec{X}_P^T \vec{\Omega}$  (il prodotto scalare di due vettori è un prodotto righe per colonne tra uno dei due vettori considerato come riga, cioè matrice  $1 \times 3$ , e l'altro considerato come colonna, cioè matrice  $3 \times 1$ ). Dunque, se indichiamo con  $X_P$ ,  $Y_P$  e  $Z_P$  le tre componenti del vettore  $\vec{X}_P$ , si ha

$$J_Q = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 \mathbb{I}_3 - \vec{X}_P \vec{X}_P^T \right] = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \begin{pmatrix} Y_P^2 + Z_P^2 & -X_P Y_P & -X_P Z_P \\ -X_P Y_P & X_P^2 + Z_P^2 & -Y_P Z_P \\ -X_P Z_P & -Y_P Z_P & X_P^2 + Y_P^2 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

In un qualsiasi sistema solidale  $S'$ , con origine in  $Q$ , questa è la forma della matrice di inerzia. Notiamo immediatamente una proprietà importantissima: **La matrice di inerzia  $J_Q$  è simmetrica** ( $J_Q = J_Q^T$ ). Questo si controlla "a vista" nell'espressione esplicita riportata a destra in (7.30), oppure notando che da  $\mathbb{I}_3^T = \mathbb{I}_3$  e  $(\vec{X}_P \vec{X}_P^T)^T = \vec{X}_P \vec{X}_P^T$  segue subito  $J_Q^T = J_Q$ . Ricordiamo ora che la conseguenza fondamentale della simmetria di  $J_Q$  è che esiste un particolare riferimento solidale  $S'$  rispetto al quale  $J_Q$  risulta diagonale. Più precisamente, esiste una matrice ortogonale  $T$  ( $T^T T = T T^T = \mathbb{I}_3$ ) tale che

$$T^T J_Q T = J'_Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(I_1, I_2, I_3) \quad (7.31)$$

(si dice anche che  $J_Q$  è ortogonalmente simile alla matrice diagonale  $J'_Q$ ). Concretamente, risulta che gli elementi sulla diagonale principale di  $J'_Q$  sono gli autovalori di  $J_Q$ , mentre la matrice del

cambio di base  $T$  ha per colonne i tre corrispondenti autoversori mutuamente ortonormali:

$$J_Q \hat{u}^{(j)} = I_j \hat{u}^{(j)} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{(1)} & \hat{u}_1^{(2)} & \hat{u}_1^{(3)} \\ \hat{u}_2^{(1)} & \hat{u}_2^{(2)} & \hat{u}_2^{(3)} \\ \hat{u}_3^{(1)} & \hat{u}_3^{(2)} & \hat{u}_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

le tre rette  $(Q, \hat{u}^{(1)})$ ,  $(Q, \hat{u}^{(2)})$  e  $(Q, \hat{u}^{(3)})$ , ovvero i tre autospazi mutuamente ortogonali di  $J_Q$ , sono dette *assi principali di inerzia del corpo  $\mathcal{C}$  relativi al punto  $Q$* . Nel caso  $Q = G$ , gli assi principali di inerzia relativi al baricentro sono detti *assi centrali di inerzia*.

Gli elementi diagonali di  $J'_Q$ , ovvero gli autovalori di  $J_Q$ , sono calcolabili in linea di principio come gli zeri del polinomio caratteristico di  $J_Q$ :  $\det(J_Q - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$ . Noti i tre autovalori, i tre corrispondenti autoversori si possono calcolare risolvendo il sistema lineare a sinistra della (7.32). Tuttavia tale strada è la più difficile da percorrere dal punto di vista computazionale. Supponiamo invece, per il momento, di conoscere i tre autoversori di  $J_Q$ , ovvero i tre assi principali di inerzia; allora conosciamo la matrice  $T$ . Con tale matrice operiamo la trasformazione (7.31)

$$\begin{aligned} J'_Q &= T^T J_Q T = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 T^T T - T^T \vec{X}_P \vec{X}_P^T T \right] = \\ &= \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 \mathbb{I}_3 - (T \vec{X}_P)(T \vec{X}_P)^T \right] = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}'_P|^2 \mathbb{I}_3 - \vec{X}'_P (\vec{X}'_P)^T \right] = \\ &= \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \begin{pmatrix} (Y'_P)^2 + (Z'_P)^2 & -X'_P Y'_P & -X'_P Z'_P \\ -X'_P Y'_P & (X'_P)^2 + (Z'_P)^2 & -Y'_P Z'_P \\ -X'_P Z'_P & -Y'_P Z'_P & (X'_P)^2 + (Y'_P)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

dove si è tenuto conto dell'ortogonalità di  $T$  e si è introdotto il vettore  $\vec{X}'_P \equiv T^T \vec{X}_P$ , di coordinate  $X'_P$ ,  $Y'_P$ ,  $Z'_P$  e modulo quadrato  $|\vec{X}'_P|^2 = |T^T \vec{X}_P|^2 = |\vec{X}_P|^2$ . La (7.33) mostra che la matrice principale di inerzia  $J'_Q$ , calcolata adoperando le posizioni trasformate dei punti  $\vec{X}'_P = T^T \vec{X}_P$ , è identica in forma a  $J_Q$ . D'altra parte sappiamo che  $J'_Q$  deve essere diagonale, per cui deve essere

$$\sum_{P \in \mathcal{C}} m_P X'_P Y'_P = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P X'_P Z'_P = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P Y'_P Z'_P = 0.$$

Di conseguenza si ha

$$J'_Q = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \begin{pmatrix} (Y'_P)^2 + (Z'_P)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (X'_P)^2 + (Z'_P)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (X'_P)^2 + (Y'_P)^2 \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

Ora, si riconosce subito che  $(Y'_P)^2 + (Z'_P)^2$  è la distanza al quadrato del punto  $P$  del corpo dall'asse  $X'$ , ovvero dall'asse principale di inerzia  $(Q, \hat{u}^{(1)})$ ; analogamente  $(X'_P)^2 + (Z'_P)^2$  e  $(X'_P)^2 + (Y'_P)^2$  sono rispettivamente le distanze al quadrato di  $P$  dagli assi  $Y'$  e  $Z'$ , ovvero dagli assi principali di inerzia  $(Q, \hat{u}^{(2)})$  e  $(Q, \hat{u}^{(3)})$ . Questa caratterizzazione degli elementi di  $J'_Q$  motiva la definizione seguente.

**Definizione 7.1.** Si definisce momento di inerzia del corpo rigido  $\mathcal{C}$  rispetto ad una retta  $r$  la quantità

$$I_{\mathcal{C}}(r) \equiv \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P d^2(P; r) , \quad (7.35)$$

dove  $d(P, r)$  è la distanza del punto  $P$  dalla retta  $r$ .

Dunque gli elementi di  $J'_Q$  (gli autovalori di  $J_Q$ ) sono i momenti di inerzia del corpo rispetto ai tre assi principali di inerzia relativi al punto  $Q$ , o *momenti principali di inerzia*:

$$I_1 = I_{\mathcal{C}}(Q, \hat{u}^{(1)}) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P d^2(P; (Q, \hat{u}^{(1)})) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P [(Y'_P)^2 + (Z'_P)^2] ; \quad (7.36)$$

$$I_2 = I_{\mathcal{C}}(Q, \hat{u}^{(2)}) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P d^2(P; (Q, \hat{u}^{(2)})) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P [(X'_P)^2 + (Z'_P)^2] ; \quad (7.37)$$

$$I_3 = I_{\mathcal{C}}(Q, \hat{u}^{(3)}) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P d^2(P; (Q, \hat{u}^{(3)})) = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P [(X'_P)^2 + (Y'_P)^2] . \quad (7.38)$$

Se sono noti i tre assi principali di inerzia e la distribuzione di massa di un corpo, allora il calcolo dei tre momenti principali di inerzia (7.36)-(7.38) è più semplice del calcolo standard degli zeri del polinomio caratteristico. Nel caso  $Q = G$ , i momenti principali di inerzia si chiamano momenti centrali di inerzia.

Dalla (7.34), ovvero dalle (7.36)-(7.38), vediamo che **la matrice di inerzia  $J_Q$  è definita positiva**, ovvero ha tutti gli autovalori positivi (un momento di inerzia, per come è definito, non può risultare negativo). Equivalentemente, come è noto dall'algebra lineare, la forma quadratica associata a  $J_Q$ , calcolata lungo un qualsiasi versore  $\hat{u}$ , deve risultare positiva:

$$\hat{u} \cdot J_Q \hat{u} > 0 \quad \forall \hat{u} . \quad (7.39)$$

È istruttivo considerare più in dettaglio tale forma quadratica. Si trova

$$\begin{aligned} \hat{u} \cdot J_Q \hat{u} &= \hat{u} \cdot \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 - \vec{X}_P \vec{X}_P^T \right] \hat{u} = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 |\hat{u}|^2 - (\hat{u} \cdot \vec{X}_P) (\vec{X}_P^T \hat{u}) \right] = \\ &= \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P \left[ |\vec{X}_P|^2 - (\hat{u} \cdot \vec{X}_P)^2 \right] = \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P d^2(P; (Q, \hat{u})) = \\ &= I_{\mathcal{C}}(Q, \hat{u}) , \end{aligned} \quad (7.40)$$

ovvero la forma quadratica associata a  $J_Q$  e calcolata lungo  $\hat{u}$  risulta essere pari al momento di inerzia del corpo rispetto all'asse  $(Q, \hat{u})$ . La non negatività di tale quantità è ovvia, mentre esiste un solo caso in cui essa può essere nulla: quello di corpo unidimensionale formato da punti tutti allineati lungo la retta  $((Q, \hat{u}))$ . In tale caso le distanze dei punti del corpo dalla loro retta di appartenenza sono nulle ed è nullo quindi il momento di inerzia rispetto all'asse del corpo (gli altri due momenti principali sono invece positivi). Escluso quindi il caso di corpo lineare, che ha sempre un momento principale di inerzia nullo su tre, qualsiasi corpo rigido ha i tre momenti principali di inerzia positivi.

Per concludere, scriviamo per componenti l'equazione di Eulero omogenea (7.28) con la matrice centrale di inerzia diagonalizzata (cioè con  $J'_G = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  al posto di  $J_G$ ). Si trova

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3) \Omega_1 \Omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 = 0 \end{cases} . \quad (7.41)$$

Tale sistema di tre equazioni differenziali è risolvibile per qualunque dato iniziale in termini di certi integrali particolari e di certe funzioni speciali, ma la deduzione di tale soluzione generale non è affatto semplice. Un caso in cui la soluzione del sistema di Eulero (7.41) è elementare è quello in cui si hanno (data una particolare simmetria del corpo) due momenti principali di inerzia uguali. Ad esempio, se  $I_1 = I_2$ , dalla terza delle equazioni (7.41) segue che  $\dot{\Omega}_3 = 0$ , cioè  $\Omega_3(t) = \Omega_3(0)$ . Inserendo tale condizione nelle prime due equazioni (assieme a  $I_1 = I_2$ ) si trova

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = (1 - \gamma) \Omega_3(0) \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = -(1 - \gamma) \Omega_3(0) \Omega_1 \end{cases} , \quad \gamma \equiv \frac{I_3}{I_1} . \quad (7.42)$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazione e tenendo conto della seconda si trova subito

$$\ddot{\Omega}_1 = -\omega^2 \Omega_1 , \quad \omega \equiv |(1 - \gamma) \Omega_3(0)| ; \quad (7.43)$$

se invece si deriva prima la seconda equazione si trova una equazione identica a quest'ultima per  $\Omega_2$ . L'equazione (7.43) si risolve immediatamente.