CAPITOLO 4

Lezione del giorno giovedì 10 ottobre 2013 (1 ora)
Limiti delle funzioni in più variabili

Definizione 4.1. Se (X, τ) è spazio topologico e $D \subseteq X$ è un sottinsieme di X, esso riceve una naturale struttura di spazio topologico nel modo seguente: posto $\tau_{|D} = \{A \cap D : A \in \tau\}$, la coppia $(D, \tau_{|D})$ è spazio topologico. Si dirà che $\tau_{|D}$ è la topologia *indotta* da X su D. Gli aperti di $\tau_{|D}$ sono intersezioni di aperti di X con D, e se $\mathcal{B}$ è base per la topologia di X, l'insieme $\mathcal{B}_{|D} = \{B \cap D : B \in \mathcal{B}\}$ è base per la topologia indotta.

Definizione 4.2. Lo spazio topologico (X, τ) è detto:
(1) T_0 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un intorno di x non contenente y oppure un intorno di y non contenente x (la topologia distingue i punti);
(2) T_1 se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono due aperti U e V tali che $x \in U$ e $y \notin U$ e $y \in V$ e $x \notin V$ (i punti sono chiusi);
(3) T_2 o *di Hausdorff* o *separato* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono U e V aperti disgiunti con $x \in U$ e $y \in V$ (punti distinti possiedono intorni disgiunti).

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la topologia usuale è di Hausdorff.

Esempio 4.3. Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui gli aperti sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x > d\}$ al variare di $d \in \mathbb{R}$ è uno spazio T_0 ma non T_1.

Si provi che $\mathbb{R}$ dotato della topologia per cui i chiusi sono $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e tutti i sottinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ è uno spazio T_1 ma non T_2.

Definizione 4.4. Diremo che V è *intorno aperto di* ∞ in $\mathbb{R}^n$ se $\mathbb{R}^n \setminus V$ è compatto.

Definizione 4.5. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ di accumulazione per D. Consideriamo una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$ e $\ell \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Diremo che il *limite per x che tende a x_0 di f è ℓ* se per ogni intorno V di ℓ si ha che la controimmagine $f^{-1}(V) := \{x \in D : f(x) \in V\}$ è intorno di x_0 in D dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^n$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell.$$

Passando ad una base di intorni, e suppondendo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ e $x \in D$, si ha $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell,$$

intendendo

$$\lim_{\substack{\|x - x_0\| \to 0^+ \\ x \in D}} \|f(x) - \ell\| = 0.$$

Ricordando l'equivalenza delle topologie indotte da d_{ℓ^∞} e da d, si ha che se $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ e $f = (f_1, \ldots, f_m)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = \ell \text{ se e solo se } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f_j(x) = \ell_j \qquad \forall j = 1 \ldots m.$$

Se $x_0 = \infty$, $\ell \in \mathbb{R}^m$, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che se $\|x\| > M$ e $x \in D$ allora $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Scriveremo in tal caso

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in D}} f(x) = \ell,$$

intendendo
$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in D}} \|f(x)-\ell\| = 0.$$
Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell = \infty$, si ha che per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$ e $x \in D$ allora $\|f(x)\| > M$. Scriveremo in tal caso
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D}} f(x) = \infty,$$
intendendo
$$\lim_{\substack{\|x-x_0\|\to 0^+ \\ x\in D}} \|f(x)\| = +\infty.$$
Se $x_0 = \infty$, $\ell = \infty$, si ha che per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ tale che se $\|x\| > N$ e $x \in D$ allora $\|f(x)\| > M$. Scriveremo in tal caso
$$\lim_{\substack{x\to \infty \\ x\in D}} f(x) = \infty,$$
intendendo
$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in D}} \|f(x)\| = +\infty.$$
Poiché nella topologia usuale di $\mathbb{R}^n$ si ha che punti *distinti* possiedono intorni *disgiunti*, se il limite esiste esso è *unico*.

OSSERVAZIONE 4.6. Il precedente riconduce il calcolo del limite per $x \to x_0$ di una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$ al calcolo dei limiti delle sue m componenti, ovvero dei limiti delle funzioni $f_j : D \to \mathbb{R}$. Pertanto è possibile restringersi allo studio dei limiti delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ossia al caso $m = 1$.

OSSERVAZIONE 4.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$
equivale, come si è visto, a calcolare
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y).$$
Si potrebbe essere tentati di calcolare il limite nel modo seguente:
$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$
ovvero *prima* calcolare il limite nella variabile y trattando x come una costante, ottenendo quindi una funzione della sola x, e poi calcolare il limite in x. Simmetricamente si potrebbe anche calcolare
$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$
ovvero *prima* calcolare il limite nella variabile x trattando y come una costante, ottenendo quindi una funzione della sola y, e poi calcolare il limite in y. Sfortunatamente in generale si ha
$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \neq \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

ESEMPIO 4.8. Sia $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}}\left(\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} 0 = 0.$$
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}}\left(\lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\neq 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\neq 0}} 1 = 1.$$

Osservazione 4.9. Generalizzando le idee precedenti, supponiamo di avere $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Si potrebbe considerare una *qualunque* funzione continua $\gamma : [a,b] \to D$ con $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tale che uno tra $\gamma(a)$ o $\gamma(b)$ sia uguale a x_0 Si osservi che $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$. A questo punto:

(1) se $\gamma(b) = x_0$ cerchiamo di calcolare $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ calcolando invece il limite $\lim_{t\to b^-} f\circ\gamma(t)$,

(2) se $\gamma(a) = x_0$ cerchiamo di calcolare $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ calcolando invece il limite $\lim_{t\to a^+} f\circ\gamma(t)$,

Affinché il procedimento abbia successo, è necessario che i limiti

$$\lim_{t\to b^-} f\circ\gamma(t), \qquad \lim_{t\to a^+} f\circ\gamma(t),$$

rispettivamente nel primo e nel secondo caso, non dipendano dalla particolare scelta di γ.

Teorema 4.10. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, c di accumulazione per D. Sono equivalenti:*

(1) *esiste il $\lim_{\substack{x\to c\\ x\in D}} f(x,y)$ e vale ℓ;*

(2) *per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tale che $x_n \to c$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$;*

(3) *per ogni curva continua $\gamma : [a,b[\to D$ tale che $\lim_{t\to b^-}\gamma(t) = c$ si ha $\lim_{t\to b^-} f(t) = \ell$.*

Corollario 4.11. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo che (x_0, y_0) sia di accumulazione per D e che esista $\varepsilon > 0$ tale che $]-\varepsilon,\varepsilon[\times\{y_0\} \cup \{x_0\}\times]-\varepsilon,\varepsilon[\subset D$. Allora se $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ esiste, si ha*

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y),$$

nel senso che i primi due limiti esistono e sono uguali al terzo.

Esempio 4.12. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ definita in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per ogni $m \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definiamo $\gamma_m : [0,x] \to D$ come $\gamma_m(t) = (t, mt)$. La funzione γ_m è continua (ciascuna delle sue componenti è continua come funzione da $[0,x]$ in $\mathbb{R}$), e se $t \neq 0$ si ha $\gamma(t) \in D$.

$$\lim_{t\to a^+} f\circ\gamma(t) = \lim_{t\to 0^+} f(t,mt) = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{t^2+m^2t^2} = \frac{1}{1+m^2}.$$

Il valore di questo limite dipende dalla scelta di m e quindi dalla γ_m. Pertanto il limite non esiste.

!! Osservazione 4.13. Si osservi che, ad ogni modo, potrebbe capitare che esista il limite sulle semirette γ_m per ogni m, e sia indipendente dalla scelta di m, tuttavia il limite di f non esista. Ciò avviene perché le rette γ_m sono solo **una tra le molte scelte possibili** di funzioni continue il cui valore ad uno degli estremi sia l'origine.

Esempio 4.14. Sia $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ e sia $D = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Scelta $\gamma_m(t) = (t, mt)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t) = \lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0}\frac{m^2t^3}{t^2+m^4t^4} = \lim_{t\to 0}\frac{m^2t}{1+m^2t^2} = 0,$$

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$ (NON é >1, dobbiamo provare che NON é continua!

indipendentemente dalla scelta di m. Tuttavia se scegliamo $\gamma_+(t) = (t^2, t)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_+(t) = \lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2},$$

mentre se scegliamo $\gamma_-(t) = (-t^2, t)$, si ha:

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_-(t) = \lim_{t\to 0} f(-t^2,t) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^4}{t^4+t^4} = -\frac{1}{2},$$

Questi ultimi due limiti sono diversi tra loro e diversi da quello trovato in precedenza, quindi f non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Proposizione 4.15. *Sia $f : D \to \mathbb{R}^m$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, c di accumulazione per D. Si ha che f è continua in c se*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} \|f(x) - f(c)\| = 0,$$

o equivalentemente se per ogni $j = 1, ..., m$ si ha

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} f_j(x) = f_j(c),$$

essendo $f = (f_1, ..., f_m)$.

Osservazione 4.16. Nello studio dei limiti in $\mathbb{R}^2$ alcuni cambiamenti di coordinate oppure delle maggiorazioni possono semplificare il problema.

Definizione 4.17. Sia $(x, y) \in \mathbb{R}$. Poniamo $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$. Tale trasformazione è invertibile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si ha che $|(x, y)| = \rho$, pertanto se $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è una funzione e $(0, 0)$ è di accumulazione per D, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in D}} f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in D}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

se l'ultimo limite non dipende da θ. Con ciò si intende che se esiste il primo limite, allora esiste il secondo, che non dipende da θ, e i due sono uguali. Viceversa, se esiste il secondo limite ed è indipendente da θ, allora esiste il primo e i due sono uguali.

COORD. RADIALI

CAPITOLO 5

Lezione del giorno venerdì 11 ottobre 2013 (1 ora)
Calcolo di limiti.

ESERCIZIO 5.1. Si studi il limite per $(x,y)\to(0,0)$ di $f(x,y)=x^4\arctan y$.

SVOLGIMENTO. Utilizziamo le coordinate polari: $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^4\cos\theta\arctan(\rho\sin\theta)$. Si ha che $|\cos\theta\arctan(\rho\sin\theta)|\le\pi/2$, pertanto

$$0\le|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|\le\frac{\pi}{2}\rho^4,$$

Applicando il teorema dei carabinieri, il limite per $\rho\to0^+$ è 0 (e non dipende da θ), quindi il limite richiesto è 0.

ESERCIZIO 5.2. Si studi la continuità della funzione definita in $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right), & \text{se } x\neq0;\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

SVOLGIMENTO. Nei punti (x,y) con $x\neq0$ la funzione è continua. Studiamo la continuità in $(0,0)$. Passando in coordinate polari si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq0}}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\lim_{\rho\to0^+}\sin(\arctan\tan\theta)=\sin\theta$$

Tale limite dipende da θ, quindi f non è continua in $(0,0)$. Consideriamo ora $(0,\bar{y})$ con $\bar{y}>0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\ x=0}}f(x,y)=0$$

però

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\ x>0,y=\bar{y}}}f(x,y)=\lim_{x\to0^+}f(x,\bar{y})=1,$$

quindi il limite non esiste nei punti $(0,\bar{y})$ con $\bar{y}>0$. D'altra parte se consideriamo $(0,\bar{y})$ con $\bar{y}<0$ si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,\bar{y})\\ x>0,y=\bar{y}}}f(x,y)=\lim_{x\to0^+}f(x,\bar{y})=-1,$$

e quindi come prima si conclude che il limite non esiste nemmeno nei punti $(0,\bar{y})$ con $\bar{y}<0$. In definitiva, f non è continua nei punti (x,y) con $x=0$.

ESERCIZIO 5.3. Sia $A=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Definiamo $f:A\to\mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2+2xy}{y^2+3xy+x}.$$

Dire se esiste il limite:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}}f(x,y).$$

SVOLGIMENTO. Se poniamo $x = y$, otteniamo l'espressione:

$$f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3x^2 + x} = \frac{2x}{4x+1}.$$

che tende a 0 per $x \to 0$. Pertanto se il limite esiste, esso è 0. Un calcolo fatto ponendo $y = mx$ o $x = my$ ci porta ad un'espressione infinitesima, confermando l'impressione iniziale. Tuttavia ciò **non basta** per poter concludere che il limite esiste e vale 0.

Dato che le posizioni $y = mx$ e $x = my$ non ci danno informazioni (primo ordine), poniamo pertanto $x = my^2$, $m > 0$ (secondo ordine).

$$\begin{aligned} f(my^2, y) &= \frac{m^2y^4 - y^2 + 2my^3}{y^2 + 3my^3 + my^2} \\ &= \frac{m^2y^2 - 1 + 2my}{1 + 3my + m} \end{aligned}$$

Perciò:

$$\lim_{y \to 0^+} f(my^2, y) = -\frac{1}{1+m}$$

Tale limite dipende da $m > 0$, pertanto il limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x,y \in A}} f(x,y)$$

non esiste. L'esercizio è concluso.

ESERCIZIO 5.4. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare i valori di α per cui f è continua in $(0,0)$.

SVOLGIMENTO. Osserviamo preliminarmente che i valori $\alpha \leq 0$ non risolvono il problema, infatti se $\alpha \leq 0$ si ha per $(x,y) \to 0$

$$\frac{|\sin(xy) - xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^3} \geq \frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

e l'ultimo termine diverge.

Determiniamo ora l'ordine di infinitesimo di $\sin(xy) - xy$ nel modo seguente: cerchiamo $\beta > 0$ che renda finito e non nullo il limite

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^\beta}$$

Applicando due volte la regola de l'Hopital si ha

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^\beta} = \lim_{s \to 0} \frac{\cos(s) - 1}{\beta s^{\beta - 1}} = \lim_{s \to 0} \frac{-\sin(s)}{\beta(\beta-1)s^{\beta-2}},$$

e tale limite è finito e non nullo solo se $\beta - 2 = 1$, ovvero $\beta = 3$. In tal caso si ha:

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sin(s) - s}{s^3} = -\frac{1}{6}.$$

Sia ora $\alpha > 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \left(\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|^3} \right)^\alpha \frac{|xy|^{3\alpha}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{6^\alpha} \left(\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \right)^3$$

Studiamo il limite tra parentesi tonde. Si ha $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, pertanto

$$0 \leq \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2^\alpha}(x^2+y^2)^{\alpha-1}.$$

Se $\alpha > 1$, il termine di destra è infinitesimo e si ha:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = 0, \qquad \text{da cui} \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

e dunque se $\alpha > 1$ si ha che f è continua. Supponiamo ora $\alpha \leq 1$ e poniamo $y = mx$. Si ha

$$\frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{|m|^\alpha}{m^2+1}\frac{|x|^{2\alpha}}{x^2},$$

se $\alpha < 1$ il limite per $x \to 0$ è $+\infty$, altrimenti se $\alpha = 1$ è $|m|/(m^2+1)$ quindi dipendente da m. In ambo i casi si ottiene che f non è continua. Quindi f è continua se e solo se $\alpha > 1$.

Per studiare il limite è possibile anche passare in coordinate polari:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{|\rho^2 \sin\theta\cos\theta|^\alpha}{\rho^2} = \lim_{\substack{\rho\to0^+\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta}} \frac{1}{2^\alpha}\rho^{2\alpha-2}|\sin 2\theta|^\alpha.$$

e il limite è nullo solo se $\alpha > 1$, non esiste (dipende da θ) per $\alpha = 1$, e vale addirittura $+\infty$ per $0 < \alpha < 1$ e $\theta \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

CAPITOLO 6

Lezione del giorno lunedì 14 ottobre 2013 (1 ora) Calcolo di limiti - continuazione.

Esercizio 6.1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$$

Svolgimento. Ricordando i limiti fondamentali del coseno e del logaritmo, si ha:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}\,\frac{(x^2+y^2)}{\log(1+x^2+y^2)}\,\frac{(xy)^2}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{(xy)^2}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2} = 0.$$

Esercizio 6.2. Si calcoli il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^6}.$$

Svolgimento. Poniamo $z=x^2$ e $v=y^3$. Si ha allora $|x|=z^{1/2}$ e $y=v^{1/3}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^6}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{|x|^3y^2}{x^4+y^6}\right| = \lim_{\substack{z\to0^+\\v\to0}} \frac{|z|^{3/2}v^{2/3}}{z^2+v^2} = \lim_{(z,v)\to(0,0)} \frac{|z|^{3/2}v^{2/3}}{z^2+v^2}.$$

In coordinate polari $z=\rho\cos\theta$, $v=\rho\sin\theta$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^6}\right| = \lim_{\rho\to0^+} \rho^{3/2+2/3}\frac{|\cos\theta|^{3/2}\sin^{2/3}\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to0^+} \rho^{1/6}|\cos\theta|^{3/2}\sin^{2/3}\theta \le \lim_{\rho\to0^+}\rho^{1/6} = 0.$$

Quindi il limite è nullo.

Esercizio 6.3. Si studi l'esistenza dei seguenti limiti, e in caso affermativo li si calcoli: !!

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\log x}{(x-1)^2+y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y\neq0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2y^2+y^4}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x\sin^2(y)}{x^2+y^2}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\arctan(y/x)$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$
8. $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{xyz}{x^2+y^2}$
9. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+z^2}$
10. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} \frac{1}{xz}$
11. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x+3y-z$
12. $\displaystyle\lim_{|(x,y,z)|\to+\infty} x^4+y^2+z^2-x^3+xyz-x+4$

Svolgimento.

(1) Si trasli il problema in $(0,0)$ e si usi il limite fondamentale del logaritmo. Il limite è 0.

(2) Si passi in coordinate polari, il limite è 1.

(3) Si raccolga y^2 al denominatore e si passi in coordinate polari osservando che il dominio esclude l'asse $y = 0$. Il limite è $+\infty$.

(4) Si ricordi il limite fondamentale del seno al numeratore, e poi si passi in coordinate polari. Il limite è 0.

(5) Si usi la maggiorazione $\arctan \alpha \leq \pi/2$. Il limite è 0.

(6) Si passi in coordinate polari, il limite è 0.

(7) Si passi in coordinate polari. Si osservi che per nessun valore di θ il denominatore si annulla. Il limite è 0.

(8) Si consideri il modulo della funzione. Ricordando che $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ si conclude che esso è maggiorato da $|z|/2$. Il limite è 0.

(9) Si verifichi il limite sulle curve $(t, 0, 0)$ e $(0, 0, t)$. Il limite non esiste.

(10) Si verifichi il limite sulla curva (t, t, t) e (t^{-1}, t, t^{-1}). Il limite non esiste.

(11) Si scriva la funzione come somma di tre funzioni di una sola variabile. Tali funzioni sono tutte inferiormente limitate e tendono a $+\infty$ se la loro variabile tende a $\pm\infty$. Se $|(x, y, z)| \to +\infty$, almeno una delle variabili in modulo tende a $+\infty$, la somma tende a $+\infty$.

(12) Si verifichi il limite sui percorsi $(t, 0, 0)$ e (t, t^2, t^2), per $t \to \pm\infty$. Il limite non esiste.

Esercizio 6.4. Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^{1/n}}{x^2 + y^2 + |y|} = 0$$

Svolgimento. Il denominatore è sempre maggiore di $|y|$ per cui in modulo la funzione è maggiorata da $|x||y|^{1/n-1}$. Se $n = 1$, il limite è nullo, altrimenti per $n \geq 2$ verificando sui cammini $\gamma(t) = (t, t^2)$ si ottengono limiti diversi da 0, ossia $1/2$ per $n = 2$ e $+\infty$ per $n > 2$.

Esercizio 6.5. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha}{x} e^{-y^2/x^2} = 0.$$

Svolgimento. In coordinate polari, si ha

$$|f(x, y)| = \rho^{\alpha-1} |\sin\theta|^{\alpha-1} |\,|\tan\theta|\, e^{-\tan^2\theta} \leq M\rho^{\alpha-1},$$

dove $M = \max_{t\in\mathbb{R}}\{|t|e^{-t^2}\}$. Tale max esiste perché $t \mapsto |t|e^{-t^2}$ è continua e infinitesima all'infinito. Per $\alpha > 1$ il limite è nullo, altrimenti non lo è (si verifichi sul cammino $\gamma(t) = (t, t)$, il limite è e^{-1} se $\alpha = 1$ e ∞ se $t < 1$.

Esercizio 6.6. Si cacolino interno, chiusura e frontiera dell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ definito da $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \cos(y) > 1\}$.

Svolgimento. Posto $f(x, y) = x^2 + \cos(y)$, si ha $E = f^{-1}(]1, +\infty[)$, pertanto per la continuità di f si ha che E è aperto, perché controimmagine di un aperto mediante una funzione continua, quindi coincide con il suo interno.

L'insieme $f^{-1}([1,+\infty[)$ è un chiuso (controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua) che contiene E, ma allora $f^{-1}([1,+\infty[) \supseteq \overline{E}$, in quanto la chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E, quindi ogni chiuso contenente E contiene anche $\overline{E}$. Proviamo che vale anche $f^{-1}([1,+\infty[) \subseteq \overline{E}$. Dobbiamo provare quindi che dato un punto $(\bar{x},\bar{y}) \in f^{-1}([1,+\infty[)$ esiste una successione $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di E tale che $(x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y})$. Per ipotesi $f(\bar{x},\bar{y}) \geq 1$, ovvero si ha $\bar{x}^2+\cos(\bar{y}) \geq 1$. Distinguiamo due casi:

(1) sia $\bar{x} \geq 0$ e poniamo $x_n = \bar{x}+1/n$, $y_n = \bar{y}$. È ovvio che $(x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y})$. Si ha $x_n^2 > \bar{x}^2$, quindi $f(x_n,y_n) > f(\bar{x},\bar{y}) \geq 1$. Essendo $f(x_n,y_n) > 1$, si ha che $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$. Quindi abbiamo una successione di punti di E che converge a $(\bar{x},\bar{y})$ e pertanto $(\bar{x},\bar{y}) \in \overline{E}$.
(2) sia $\bar{x} < 0$ e poniamo $x_n = \bar{x}-1/n$, $y_n = \bar{y}$. È ovvio che $(x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y})$. Si ha $x_n^2 > \bar{x}^2$, quindi $f(x_n,y_n) > f(\bar{x},\bar{y}) \geq 1$, e si conclude come nel caso precedente.

In definitiva,
$$\overline{E} = f^{-1}([1,+\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+\cos(y) \geq 1\}.$$
Il complementare di E è dato da
$$\mathbb{R}^2 \setminus E = \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(]1,+\infty[) = f^{-1}(]-\infty,1]),$$
ed è un chiuso, perché E è aperto.

La frontiera di E è l'intersezione delle chiusure di E e del suo complementare, ovvero:
$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus E} = \overline{E} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E) = f^{-1}(]-\infty,1]) \cap f^{-1}([1,+\infty[) = f^{-1}(1),$$
cioè $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$.

ESERCIZIO 6.7. Sia (X,d) spazio metrico e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione in X convergente a $x \in X$. Si provi che $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ è chiuso.

SVOLGIMENTO. E ha un solo punto di accumulazione, cioé x, e lo contiene. Dunque è chiuso.

ESERCIZIO 6.8. Sia (X,d) spazio metrico e sia $E \subseteq X$. Allora $\bar{E} = \{x \in X : \inf\{d(x,y) : y \in E\} = 0\}$.

SVOLGIMENTO. Posto $d_E(x) = \inf\{d(x,y) : y \in E\}$, supponiamo per assurdo che $x \in \bar{E}$ e $d_E(x) > 0$. Ma allora esiste un intorno di x interamente contenuto in $X \setminus E$ pertanto $x \notin \bar{E}$. Supponiamo ora per assurdo che $d_E(x) = 0$ e $x \notin \bar{E}$. Ma allora esiste un intorno di x interamente contenuto in $X \setminus E$. In particolare esiste una palla di raggio $\delta > 0$ centrata in x non contenuta in E pertanto $d_E(x) \geq \delta > 0$, assurdo contro l'ipotesi $d_E(x) = 0$.

OSSERVAZIONE 6.9. (intermezzo leggero) Per mostrare efficacia e potenza della topologia, riportiamo il seguente aneddoto tratto da *Lion Hunting and Other Mathematical Pursuits*, di Ralph P. Boas Jr.

Il problema che ci si pone è il seguente:

"Nel deserto del Sahara ci sono leoni. Descrivere un metodo per catturarne almeno uno."

Una delle soluzioni proposte è:

Poniamo sul deserto la topologia *leonina* secondo cui un insieme è chiuso se e solo se è tutto il deserto, il vuoto oppure se non contiene leoni. L'insieme dei punti dove ci sono i leoni è denso in tutto il deserto per questa topologia. Per densità, se mettiamo una gabbia aperta, essa contiene almeno un leone. Pertanto basta chiuderla rapidamente.

Invito i lettori a verificare la correttezza del ragionamento. Osservando che, con minime variazioni riguardanti la natura della gabbia, potete utilizzare questo metodo per catturare anche soggetti più interessanti di un leone, in ambienti più attraenti di un deserto, ritengo di aver fornito un buon incentivo allo studio della topologia.

CAPITOLO 7

Lezione del giorno giovedì 17 ottobre 2013 (1 ora) Successioni di funzioni e convergenza uniforme.

Definizione 7.1. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Data una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n : D \to \mathbb{R}^M$, e una funzione $f : D \to \mathbb{R}^M$. Diremo che:

(1) la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* a f o che f è *limite puntuale* di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni $x \in D$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, o equivalentemente $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

(2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a f o che f è *limite uniforme* di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ o equivalentemente $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$.

Osservazione 7.2. Ricordiamo i seguenti fatti:

(1) La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale, il viceversa non è vero.
(2) Il limite uniforme di funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione continua, mentre se il limite è solo puntuale questo in generale non è vero.
(3) La definizione di convergenza uniforme può essere scritta anche in questo modo: esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali tale che $a_n \to 0$ e $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ per ogni $x \in D$.
(4) L'insieme D gioca un ruolo fondamentale nella definizione di convergenza uniforme, nel senso che possono esistere successioni di funzioni convergenti puntualmente ma non uniformemente in D e convergenti puntualmente e uniformemente in un insieme $D' \subset D$.
(5) Se le funzioni f_n, f sono sufficientemente regolari (almeno C^1), si può cercare di determinare il sup che compare nella definizione di convergenza uniforme mediante lo studio delle derivate della funzione $|f_n - f|$ (se essa è regolare).

Esercizio 7.3. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$. Si provi che le f_n sono tutte continue e si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione.

Svolgimento. Proviamo che le funzioni f_n sono continue. A tal proposito dobbiamo verificare che per x, n fissati si ha $\lim_{y\to x} |f_n(y) - f_n(x)| = 0$. Scriviamo $y = x + h$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}|f_n(y) - f_n(x)| = |f_n(x+h) - f_n(x)| &= \left|\int_1^n \frac{e^{-(x+h)t}}{1+t^2}\, dt - \int_1^n \frac{e^{xt}}{1+t^2}\, dt\right| \\ &= \left|\int_1^n \frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^2}\, dt\right| \le \int_1^n \left|\frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^2}\right| dt \\ &= \int_1^n \frac{e^{-xt}|e^{-ht}-1|}{1+t^2}\, dt = \int_1^n \frac{e^{-xt}|1-e^{-ht}|}{1+t^2}\, dt.\end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

(1) supponiamo $h > 0$. Si ha che $|1 - e^{-ht}| = 1 - e^{-ht}$ perché $t > 0$ e $h > 0$ quindi $e^{-ht} \le 1$. Si ha allora:

$$|f_n(y) - f_n(x)| \le \int_1^n \frac{e^{-xt}(1-e^{-ht})}{1+t^2}\, dt$$

Consideriamo a questo punto la funzione $s \mapsto 1 - e^{-s}$ per $s \geq 0$. Si ha che $1 - e^{-s} \leq s$ per $s \geq 0$. Infatti consideriamo $w(s) = (1 - e^{-s}) - s$. Si ha $w(0) = 0$ e $w'(s) = e^{-s} - 1 < 0$ se $s > 0$, quindi la funzione w è strettamente decrescente e pertanto $w(s) < w(0)$ se $s > 0$. Ciò vuol dire $1 - e^{-s} \leq s$ per $s \geq 0$. A questo punto, poniamo $s = ht$ e utilizziamo questo fatto per ottenere

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}(1 - e^{-ht})}{1+t^2}\, dt \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}ht}{1+t^2}\, dt = h \int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\, dt$$

Dato che x, n sono fissati, la funzione integranda è una funzione continua come funzione di t nell'intervallo limitato $[1, n]$, pertanto assume il suo massimo $M = M(x)$ nell'intervallo $[1, n]$, quindi

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq h \int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\, dt \leq h \int_1^n M\, dt = hM(n-1)$$

Il termine di destra tende a zero per $h \to 0^+$.

(2) Supponiamo ora che $h < 0$. Si ha che $|e^{-ht} - 1| = e^{-ht} - 1 = e^{|h|t} - 1$ perché $h < 0$ e $t > 0$ quindi $e^{-ht} > 1$ Si ha che

$$\lim_{|h|t \to 0} \frac{e^{|h|t} - 1}{|h|t} = 1 < 2,$$

e quindi per $|h|t$ sufficientemente piccolo si ha $e^{|h|t} - 1 < 2|h|t$, utilizziamo questo fatto per ottenere

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}|e^{-ht} - 1|}{1+t^2}\, dt \leq \int_1^n \frac{e^{-xt}2|h|t}{1+t^2}\, dt = 2|h| \int_1^n \frac{e^{-xt}t}{1+t^2}\, dt$$

ed esattamente come prima si ottiene che il termine di destra tende a zero per $h \to 0^-$.

Quindi si ha in entrambi i casi $\lim_{h \to 0} |f_n(x+h) - f_n(x)| = 0$, e quindi le funzioni f_n sono tutte continue.

Studiamo ora la convergenza puntuale. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. La funzione integranda che compare nella definizione delle f_n è positiva, pertanto il suo integrale su $[1, n]$ è minore del suo integrale su $[1, n+1]$, quindi la successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente per ogni x fissato. Andiamo a distinguere due casi:

(1) Se $x < 0$ la funzione $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ tende a $+\infty$ se $t \to \infty$, in particolare esiste $\bar{t} > 1$ tale che $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} > 1$. Ma allora si ha per $n > \bar{t}$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)| = f_n(x) &= \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt + \int_{\bar{t}}^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \\ &\geq \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt + \int_{\bar{t}}^n 1\, dt = \int_1^{\bar{t}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt + (n - \bar{t}).\end{aligned}$$

L'ultimo termine diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$, quindi $f_n(x)$ non converge puntualmente se $x < 0$.

(2) Se $x \geq 0$, osserviamo che $e^{-xt} \leq 1$, pertanto

$$f_n(x) \leq \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan n - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

quindi la successione $f_n(x)$ è monotona crescente e superiormente limitata, pertanto essa ammette limite.

Si ha dunque convergenza puntuale solo per $x \in [0,+\infty[$. Indichiamo con

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$$

è il limite puntuale delle funzioni f_n.

E' ovvio che in nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che non sia contenuto in $[0,+\infty[$ può esservi convergenza uniforme: infatti nei sottoinsiemi dove vi fosse convergenza uniforme necessariamente deve esserci convergenza puntuale. Studiamo la convergenza uniforme in tutto $[0,+\infty[$:

$$|f(x,y) - f_n(x,y)| = \left|\int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt - \int_1^{n} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_n^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n,$$

dove si è levato il modulo perché $f_n(x) \leq f(x)$ per ogni x, in quanto la successione è monotona e si è sfruttato il fatto che $e^{\alpha} < 1$ se $\alpha < 0$. Si ha allora:

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arctan n,$$

il termine di destra tende a zero, quindi la convergenza è uniforme su tutto $[0,+\infty[$.

Esercizio 7.4. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}$.

Svolgimento. Si ha convergenza puntuale di f_n alla funzione $f(x,y) = 0$ identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}^2$, infatti $f_n(0,0) = 0$, quindi $\lim_{n\to\infty} f_n(0,0) = 0$ e se $(x,y) \neq (0,0)$ si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\frac{|x+y|}{(x^2+y^2)}$$

e il termine di destra tende a zero se $n \to \infty$. Nella maggiorazione si è sfruttato il fatto che $1 + n2^n(x^2+y^2) > n2^n(x^2+y^2)$, pertanto

$$\frac{1}{1+n2^n(x^2+y^2)} < \frac{1}{n2^n(x^2+y^2)}.$$

Se la successione f_n convergesse uniformemente, il suo limite uniforme dovrebbe coincidere con il limite puntuale, e quindi essere la funzione f identicamente nulla. La forma delle funzioni f_n ci suggerisce un passaggio in coordinate polari. Calcoliamo pertanto:

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f_n(x,y)| = \sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|$$

$$= \sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} \frac{2^n\rho}{1+n2^n\rho^2}|\cos\theta + \sin\theta|$$

D'altra parte è noto o dovrebbe esserlo[1] che $|\cos\theta + \sin\theta| \leq \sqrt{2}$ e i $\theta \in [0,2\pi]$ che realizzano l'uguaglianza sono $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 5\pi/4$. Perciò

$$\sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \sup_{\rho\geq 0} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1+n2^n\rho^2} = \sqrt{2}\sup_{\rho\geq 0} \frac{2^n\rho}{1+n2^n\rho^2}$$

[1] Per provarlo, consideriamo la funzione $g(\theta) := \cos\theta + \sin\theta$ su $[0,2\pi]$, deriviamo e annulliamo la derivata, si ottiene $0 = -\sin\theta + \cos\theta$ da cui, posto $\theta \neq \pi/2, 3/2\pi$, si ottiene $\tan\theta = 1$, le cui soluzioni sono $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 5\pi/4$; si ha

$$|g(\theta_1)| = |g(\theta_2)| = \sqrt{2} > 1 = |g(\pi/2)| = |g(3\pi/2)| = |g(0)| = |g(2\pi)|.$$

Studiamo ora la funzione $F_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $F_n(\rho) = \frac{2^n \rho}{1+n2^n\rho^2}$. Si ha $F_n(0) = 0$, $\lim_{\rho\to+\infty} F_n(\rho) = 0$ e

$$F_n'(\rho) = \frac{2^n - 4^n n\rho^2}{(2^n n\rho^2 + 1)^2},$$

che si annulla in un unico punto $\rho_n = 1/\sqrt{n2^n}$. Tale punto è un punto di massimo assoluto per la funzione F_n, quindi:

$$\sup_{\substack{\rho\geq 0\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \sqrt{2}F_n(\rho_n) = \sqrt{2}\frac{2^n}{2\sqrt{n2^n}}.$$

L'ultimo termine tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, quindi non si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$.

Per determinare gli insiemi dove si ha convergenza uniforme, osserviamo che l'insieme dei punti di massimo:

$$\{(\rho_n\cos\theta_1, \rho_n\sin\theta_1), (\rho_n\cos\theta_2, \rho_n\sin\theta_2)\}$$

ammette $(0, 0)$ come unico punto di accumulazione.

Cerchiamo quindi di provare che vi è convergenza uniforme nei complementari degli intorni di $(0, 0)$. Possiamo limitarci ai complementari delle palle centrate in $(0, 0)$ di raggio $\bar\rho > 0$. Con calcoli analoghi ai precedenti, si ha

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar\rho)} |f_n(x, y) - f(x, y)| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar\rho)} |f_n(x, y)| = \sup_{\substack{\rho\geq\bar\rho\\ \theta\in[0,2\pi]}} |f_n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|$$

$$= \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar\rho} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1 + n2^n\rho^2} = \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar\rho} F(\rho)$$

La funzione F_n è decrescente su $[\rho_n, +\infty[$ perché ρ_n è il suo unico punto di massimo assoluto e relativo. Per n sufficientemente grande, si ha $\rho_n < \bar\rho$, quindi la funzione F_n è decrescente in particolare su $[\bar\rho, +\infty[$, e quindi $F_n(\bar\rho) \geq F_n(\rho)$ per $\rho \geq \bar\rho$. Ma allora:

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}\setminus B((0,0),\bar\rho)} |f_n(x, y) - f(x, y)| = \sqrt{2}\sup_{\rho\geq\bar\rho} \frac{2^n\sqrt{2}\rho}{1 + n2^n\rho^2}$$

$$= \sqrt{2}F(\bar\rho) = \sqrt{2}\frac{2^n\bar\rho}{1 + n2^n\bar\rho^2}$$

e il termine di destra tende a zero (si vede direttamente oppure ricordando che esso è

$$|f_n(\bar\rho\cos\theta_1, \bar\rho\sin\theta_1)|,$$

e tende a zero per la convergenza puntuale. Quindi si ha convergenza uniforme su ogni chiuso di $\mathbb{R}$ non contenente l'origine.

Esercizio 7.5. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

(1) $f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

(4) $f_n(x) = (x^2 - x)^n$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Svolgimento.

(1) fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha che $|f_n(x)|$ tende a zero per $n \to \infty$, quindi si ha convergenza puntuale alla funzione nulla $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}$. Se f_n convergesse uniformemente, il suo limite uniforme dovrebbe coincidere con il limite puntuale e pertanto essere la funzione identicamente

nulla. Calcoliamo $f_n'(x) = ne^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2)$, tale derivata si annulla per $x_n^+ = 1/n\sqrt{2}$ e $x_n^- = -1/n\sqrt{2}$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f(x_n^{\pm})| = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2}.$$

Il membro di destra non tende a zero per $n \to +\infty$, quindi non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$. L'insieme dei punti stazionari di $f_n(x)$ ammette 0 come punto di accumulazione. Cerchiamo di vedere se si ha convergenza uniforme nel complementare di una palla centrata in 0, ovvero su un insieme $\{x : |x| \geq \varepsilon\}$ per $\varepsilon > 0$. Osservando che $|f_n(x)| = |f_n(-x)|$, si ha:

$$\sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x)|.$$

Per n sufficientemente grande, si ha $x_n^+, x_n^- \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, e quindi $|f(\varepsilon)| > |f(x)|$ per ogni $|x| \geq \varepsilon$ (il lettore è caldamente invitato a fare un disegno per chiarirsi le idee: la funzione $|F|$ assume i suoi massimi in x_n^+, x_n^-, quindi è crescente in $]-\infty, x_n^-[$ e decrescente in $]x_n^+, +\infty[$. Si ha allora:

$$\sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\varepsilon)|,$$

e l'ultimo termine tende a 0 per convergenza puntuale, quindi si ha convergenza uniforme in ogni chiuso di $\mathbb{R}$ non contenente l'origine.

(2) Si ha che $f_n(0) = 0$ e che se $x \neq 0$ allora $|f_n(x)|$ tende a zero per $n \to \infty$, quindi si ha convergenza puntuale alla funzione nulla $f(x) = 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Derivando le f_n, e ponendo tali derivate uguali a zero si ottengono due punti stazionari $x_n^+ = 1/n$ e $x_n^- = -1/2$. Si ha che $|f_n(x_n^{\pm}) - f(x)| = 1/2$, in particolare è non nullo, quindi non c'è convergenza uniforme. Le successioni di punti stazionari hanno 0 come punto di accumulazione. Si ha con i medesimi ragionamenti dell'esercizio precedente che vi è convergenza puntuale in ogni chiuso non contenente 0.

(3) Si ha $f_n(0) = 0$ e per $x \neq 0$, $f_n(x)$ tende a 1 per $n \to +\infty$. Quindi le funzioni continue f_n sul compatto $[0,1]$ convergono puntualmente alla funzione discontinua f definita da $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x \in]0,1]$. Ciò esclude che vi possa essere convergenza uniforme su $[0,1]$: in tal caso f dovrebbe essere continua. Proviamo che si ha convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $[\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$. Infatti si ha:

$$\sup_{[\varepsilon,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[\varepsilon,1]} |f_n(x) - 1| = \sup_{[\varepsilon,1]} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+n\varepsilon}$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

(4) Si ha $x^2 - x \leq 1/2$ per ogni $x \in [0,1]$, quindi $|f_n(x)| \leq 1/2^n \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$ e quindi si ha convergenza puntuale ed uniforme alla funzione nulla.

CAPITOLO 8

Lezione del giorno giovedì 24 ottobre 2013 (1 ora)
Serie di funzioni

DEFINIZIONE 8.1. Sia $I =]a, b[$ intervallo di $\mathbb{R}$. Data una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$, consideriamo la nuova successione di funzioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x).$$

Le funzioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono dette *somme parziali* della *serie di funzioni* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$. Sia $s : I \to \mathbb{R}$ una funzione, diremo che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$:

(1) *converge puntualmente* a s o che s è *limite puntuale* della serie se per ogni $x \in I$ si ha $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, o equivalentemente $\lim_{n\to\infty} \|s_n(x) - s(x)\| = 0$. In altre parole, se per ogni $x \in I$ *fissato* si ha $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f_j(x) = s(x)$

(2) *converge uniformemente* a s o che s è *limite uniforme* della serie se $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_\infty = 0$.

(3) *converge totalmente* a s se vi converge puntualmente ed esiste una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

OSSERVAZIONE 8.2. Ricordiamo i seguenti fatti:

(1) La convergenza totale implica quella uniforme, la convergenza uniforme implica quella puntuale. Nessuna delle due implicazioni opposte è vera.

(2) Data una serie di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continue definite su un intervallo I chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, se tale serie converge totalmente ad una funzione s, allora la funzione s è continua in I.

(3) Data una serie di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continue definite su un intervallo I chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, se tale serie converge totalmente ad una funzione s, allora

$$\int_I s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\,dx,$$

ovvero la serie si dice *integrabile termine a termine*.

ESERCIZIO 8.3. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n+x}$ e si provi che converge puntualmente in $]0, +\infty[$ e che la convergenza è totale in $]c, +\infty[$ per ogni $c > 0$. Si provi che la convergenza non è uniforme in $]0, +\infty[$.

SVOLGIMENTO. Per $x < 0$ fissato si ha che il termine generale diverge, infatti se $n > |x|$

$$\frac{e^{-nx}}{n+x} \geq \frac{e^{n^2}}{2n} \to +\infty.$$

Se $x = 0$, il termine generale diviene $1/n$, quindi la serie diverge.

Sia $x > 0$, applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\frac{\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1+x}}{\dfrac{e^{-nx}}{n+x}} = e^{-x}\frac{n+x}{n+x+1} = e^{-x}\frac{1}{1+\frac{1}{n+x}} < 1,$$

pertanto la serie converge puntualmente per ogni $x > 0$. Possiamo quindi definire il limite puntuale $s(\cdot)$ della successione delle somme parziali $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$.

Sia ora $c > 0$ fissato e calcoliamo il sup del termine generale

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+x}, \qquad f_n'(x) = -e^{-nx}\frac{1+n^2+nx}{(n+x)^2}.$$

Quindi $f_n'(x) = 0$ per $x = -(1+n^2)/n < 0$, e la funzione $f_n(x)$ è decrescente su $[c, +\infty[$. Si ha allora che

$$\sup_{x\in]c,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(c),$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in]c,+\infty[} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(c),$$

e l'ultimo termine converge per la convergenza puntuale. Quindi si ha convergenza totale su $]c, +\infty[$.

Verifichiamo che la convergenza non è uniforme su $]0, +\infty[$. Per ogni $M > N+1$ si ha:

$$\sup_{x>0} |s(x) - s_N(x)| = \sup_{x>0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| = \sup_{x>0}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| \geq \sup_{x>0}\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right|$$

Valutiamo l'espressione lungo una successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \to 0^+$:

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| \geq \lim_{j\to\infty}\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{e^{-nx_j}}{n+x_j}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n}\right|.$$

può essere utile questo passaggio!

Poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, esiste $M > 0$ tale per cui $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n} > N$, da cui

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=0}^{N}\frac{e^{-nx}}{n+x}\right| > N$$

Pertanto al limite per $N \to \infty$ si ha $+\infty$, che prova come non vi sia convergenza uniforme in $]0, +\infty[$.

CAPITOLO 9

Lezione del giorno venerdì 25 ottobre 2013 (1 ora)
Serie di funzioni e serie di potenze

ESERCIZIO 9.1. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+x}$, dimostrare che converge puntualmente e totalmente in $[0,+\infty[$.

SVOLGIMENTO. Il termine generale è maggiorato dalla funzione $1/n^2$ su $[0,+\infty[$, pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\geq 0}\left|\frac{n}{n^3+x}\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

da cui la convergenza totale.

ESERCIZIO 9.2. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+x}{n^3+x}$, dimostrare che converge puntualmente in $[0,+\infty[$ e totalmente sui compatti di $[0,+\infty[$. Provare che la convergenza non è uniforme su $[0,+\infty[$.

SVOLGIMENTO. Sia K compatto di $[0,+\infty[$, esiste $R>0$ tale che $B(0,R)\supseteq K$. Si ha allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in K}\left|\frac{n+x}{n^3+x}\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+R}{n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}<+\infty,$$

ciò prova la convergenza totale sui compatti di $[0,+\infty[$ e quindi la convergenza puntuale su $[0,+\infty[$. Proviamo che la convergenza non è uniforme su $[0,+\infty[$:

$$\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+x}{n^3+x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{n+x}{n^3+x}\right|\geq\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{n+x}{n^3+x}\right|$$

Valutando il sup su una successione x_j che tenda all'infinito, si ha:

$$\sup_{x\geq 0}\left|\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{n+x}{n^3+x}\right|\geq\sum_{n=N+1}^{2N}1=N-1,$$

e l'ultimo termine diverge per $N\to+\infty$.

ESERCIZIO 9.3. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\sqrt{x}}}{n^2+1}$, dimostrare che converge totalmente in $[0,+\infty[$.

SVOLGIMENTO. Si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\geq 0}\left|\frac{e^{-n\sqrt{x}}}{n^2+1}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

da cui la tesi.

ESERCIZIO 9.4. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$ dimostrare che converge puntualmente in $[0,+\infty[$ e totalmente sui compatti di $[0,+\infty[$. Si provi che

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1+n^2)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-1\right].$$

SVOLGIMENTO. Osserviamo che per ogni $s > 0$ si ha $\log(1+s) < s$, infatti considerata $g(s) = \log(1+s) - s$ si ha $g(0) = 0$ e $g'(s) = \frac{1}{1+s} - 1 < 0$ se $s > 0$. quindi $g(s) < g(0) \leq 0$ per ogni $s > 0$. Si ha quindi se K è compatto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in K} \left|\log\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\right| \leq \sup_{x\in K}|x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

perché K è limitato. Ciò porge la convergenza totale sui compatti. Pertanto la serie risulta integrabile termine a termine sul compatto $[0,1]$ e si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\left(1+\frac{x}{n^2}\right) dx &= n^2 \int_1^{1+1/n^2} \log y\, dy = n^2[y\log y - y]_{y=1}^{y=1+1/n^2} \\ &= n^2\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{1}{n^2} + 1\right),\end{aligned}$$

che prova l'uguaglianza richiesta.

ESERCIZIO 9.5. Sia $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Determinare la somma e il raggio di convergenza delle serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} anz^{an-a}.$$

SVOLGIMENTO. Consideriamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}z^n}{n!} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n z^n}{n!} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} = \frac{e^{az}}{a}$$

e il suo raggio di convergenza è $r = \infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} anz^{an-a} = a\sum_{n=0}^{\infty} n(z^a)^{n-1}$$

Posto $w = z^a$, si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} anz^{an-a} &= a\sum_{n=0}^{\infty} nw^{n-1} = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dw}w^n = a\frac{d}{dw}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right) \\ &= a\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{1-w}\right) = \frac{a}{(1-w)^2} = \frac{a}{(1-z^a)^2}\end{aligned}$$

e il suo raggio di convergenza è quello della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}(z^a)^n$, quindi si deve avere $|z^a| < 1$ e quindi $r = 1$.

ESERCIZIO 9.6. Si consideri la funzione:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Si scriva il suo sviluppo in serie di potenze e si calcoli $\mathrm{Si}(1)$ con un errore minore di 10^{-3}.

SVOLGIMENTO. Si consideri il noto sviluppo in serie della funzione seno:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sappiamo che il raggio di convergenza di questa serie è $+\infty$. Pertanto possiamo dividere per t e integrare termine a termine:

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left((-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,dt\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.\end{aligned}$$

Tale sviluppo ha raggio di convergenza $+\infty$ (per confronto). Valutiamo la serie per $x = 1$. Si ha:

$$\mathrm{Si}(1) = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \dots,$$

dove il primo termine trascurato è $\dfrac{1}{7\cdot 7!} < 10^{-3}$.