PS. VEDERE ANCHE ES. SVOLTI SUL SITO DI MONTI:
www.math.unipd.it/~monti/A2-2013.htm

**Lezione del 1/4/2004 (1 ora):**

In questa lezione conclusiva del corso vogliamo vedere alcuni esempi di *studio qualitativo delle soluzioni* di equazioni differenziali del primo ordine: grazie al teorema di esistenza e unicità, è spesso possibile dedurre l'andamento qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale del tipo $y'(t) = f(t, y(t))$ senza bisogno di risolverla esplicitamente.

- Cominciamo con lo studio delle soluzioni di $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$. Questo è un caso particolare dell' *equazione logistica* (si veda anche la dispensina su questo argomento che ho scritto per una conferenza destinata agli alunni delle scuole superiori, dove viene discusso il significato di questa equazione in biomatematica).

  Evidentemente, si tratta di un'equazione a variabili separabili che potrebbe anche essere risolta esplicitamente: precisamente, si trova che la soluzione del problema di Cauchy

  $$\begin{cases} y'(t) = y(t)(1 - y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

  è $y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-t}}$. Ma vediamo cosa è possibile dedurre senza risolvere l'equazione.

  Intanto, il secondo membro dell'equazione è dato dalla funzione regolare $f(t, y) = y(1 - y)$, che non dipende da $t$ (equazione *autonoma*[2]), ed è evidentemente possibile applicare il teorema di esistenza e unicità locale per qualunque punto iniziale. Inoltre, $f(t, y) = 0$ se $y = 0$ o se $y = 1$: si hanno dunque le *due soluzioni costanti* $y(t) = 0$ e $y(t) = 1$. Per il teorema di esistenza e unicità, una qualunque altra soluzione non potrà dunque intersecare le rette orizzontali $y = 0$ e $y = 1$.

  Inoltre, la funzione $f(t, y) = y(1 - y)$ è positiva per $y \in (0, 1)$, mentre è negativa se $y > 1$ oppure se $y < 0$. Ne segue che le soluzioni contenute nella striscia $0 < y < 1$ sono crescenti, mentre le soluzioni contenute nei semipiani $y < 0$ o $y > 1$ sono decrescenti. Inoltre, per la ragione detta sopra (l'invalicabilità delle rette $y = 0$ e $y = 1$), se una soluzione è contenuta in uno di questi tre insiemi nell'istante iniziale, è costretta a rimanervi per tutto il suo tempo di vita.

  Vediamo cosa succede ad una soluzione $y(t)$ con dato iniziale $y(0) = y_0$, con $0 < y_0 < 1$: una tale soluzione rimarrà sempre nella striscia $0 < y < 1$, e sarà quindi sempre crescente. Inoltre, avremo esistenza globale (la soluzione non può divergere a $\pm\infty$ in quanto è confinata nella striscia) ed esisteranno i limiti $\ell_1 = \lim_{t \to -\infty} y(t)$ e $\ell_2 = \lim_{t \to +\infty} y(t)$ grazie alla monotonia: la soluzione avrà due asintoti orizzontali. In realtà deve essere $\ell_1 = 0$ e $\ell_2 = 1$: euristicamente, questo succede perché ci si immagina che quando una funzione $y(t)$ si avvicina ad un asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$, la derivata deve tendere a $0$ (almeno per una successione divergente di tempi: possiamo mostrarlo grazie al teorema di Lagrange), e d'altra parte il secondo membro dell'equazione si annulla solo per $y = 0$ e per $y = 1$. In effetti, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione si ottiene

  $$\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t)(1 - y(t)) = \ell_2(1 - \ell_2),$$

e l'ultimo valore sarà strettamente positivo a meno che non sia $t_2 = 1$.

Se vogliamo anche studiare la convessità della nostra soluzione, possiamo derivare l'equazione: $y''(t) = (y(t) - y^2(t))' = y'(t) - 2y(t)y'(t) = y(t)(1 - y(t))(1 - 2y(t))$. Evidentemente, nella striscia in esame la derivata seconda si annulla e cambia di segno per $y = 1/2$: le soluzioni hanno un flesso esattamente a metà altezza.

Veniamo alle soluzioni con $y(t)$ $y(0) = y_0 > 1$: sono decrescenti, e con un ragionamento identico a quello visto sopra possiamo mostrare che $\lim_{t \to +\infty} = 1$. Per $t$ negativi, invece, tali soluzioni devono divergere a $+\infty$ (non ci può essere un asintoto orizzontale perché il secondo membro dell'equazione non si annulla per nessun $t > 1$). Il problema è però capire se questo avviene per $t \to -\infty$, o se invece la soluzione diverge in tempo finito (esiste $\bar{t} < 0$ tale che $\lim_{t \to \bar{t}} y(t) = +\infty$). D'altra parte, separando le variabili si ha $\frac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))} = 1$, e integrando tra $0$ e $t$:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u(1-u)} = t.$$

In sostanza, l'integrale di sinistra (negativo) ci dice *quanto tempo ci mette la soluzione ad arrivare all'altezza* $y(t)$... In particolare, per rispondere alla nostra domanda dovremo calcolare

$$\bar{t} = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{du}{u(1-u)} := \lim_{y \to +\infty} \int_{y_0}^{y} \frac{du}{u(1-u)}.$$

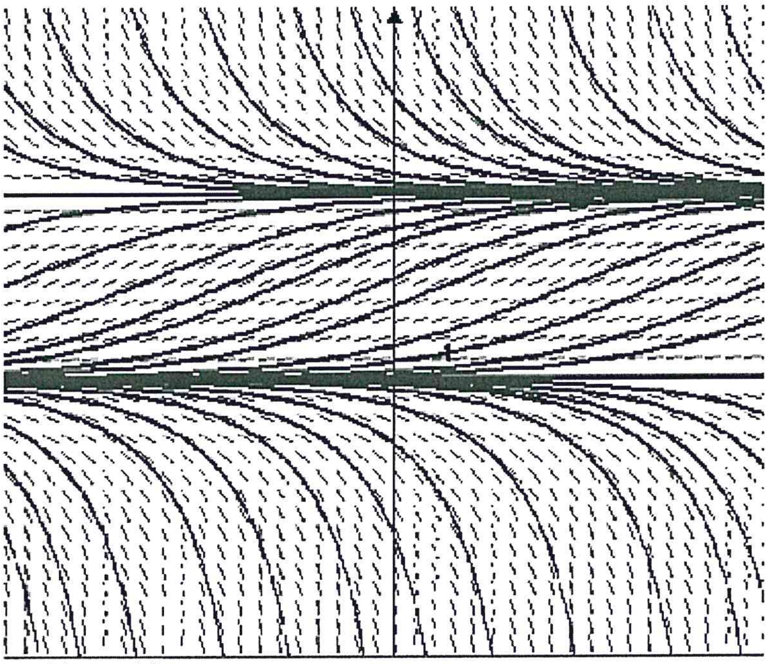
Se questo limite è finito ci darà l'ascissa $\bar{t}$ dell'asintoto verticale, se invece è infinito sapremo che la soluzione esiste globalmente per ogni $t$ negativo. Anche senza calcolare il (peraltro semplice) integrale di funzione razionale, possiamo usare la seguente stima: $\bar{t} \geq -\int_{y_0}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{y_0}$ e concludere che l'asintoto verticale c'è (non si ha esistenza globale).

NO, SBAGLIATO

Alcune soluzioni dell'equazione sono mostrate nella seguente figura:

Comunque $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{du}{u(1-u)} < +\infty$

(altre stime si possono fare, o calcolare l'integrale)



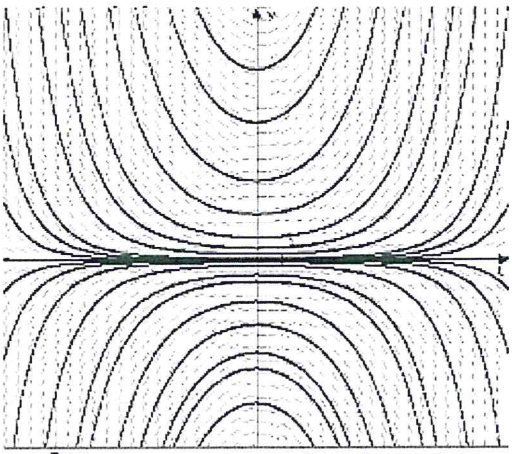
- Studiamo l'equazione $y'(t) = ty(t)$.

  Il secondo membro dell'equazione è positivo nel primo e terzo quadrante (nei quali perciò le soluzioni saranno crescenti), e negativo nel secondo e quarto quadrante (dove le soluzioni saranno decrescenti). La funzione $y(t) = 0$ è una soluzione costante, che le altre soluzioni non possono oltrepassare per il teorema di unicità. Inoltre, $y''(t) = 2y(t)y'(t) = 2y^3(t)$: la derivata seconda ha lo stesso segno di $y(t)$ (per cui le soluzioni sono *convesse* al di sopra dell'asse delle $t$, *concave* al di sotto.

  Inoltre, un ragionamento analogo a quello visto per l'equazione di prima ci conduce a dire che le soluzioni esistono globalmente per ogni $t$ (del resto, l'equazione è lineare...).

  Il secondo membro dell'equazione è positivo nel primo e terzo quadrante (nei quali perciò le soluzioni saranno crescenti), e negativo nel secondo e quarto quadrante (dove le soluzioni saranno decrescenti). La funzione $y(t) = 0$ è una soluzione costante, che le altre soluzioni non possono oltrepassare per il teorema di unicità. Inoltre, $y''(t) = 2y(t)y'(t) = 2y^3(t)$: la derivata seconda ha lo stesso segno di $y(t)$ (per cui le soluzioni sono *convesse* al di sopra dell'asse delle $t$, *concave* al di sotto.

  Le informazioni così riassunte sono sufficienti a dire che le soluzioni avranno l'aspetto in figura:



- Vediao un altro esempio: $y'(t) = ty^2(t)$. In questo caso, le soluzioni sono crescenti per $t > 0$ e decrescenti per $t < 0$, mentre l'unica soluzione costante è$y(t) = 0$.

Le soluzioni con dato iniziale $y(0) = y_0 > 0$ hanno un minimo nel punto iniziale, e devono evidentemente divergere a $+\infty$ sia per tempi positivi che per tempi negativi. Con il trucco usato nelle due equazioni precedenti non è difficile vedere che *non* c'è esistenza globale, e ci devono essere due asintoti verticali.

La derivata seconda è data da $y'' = y^2 + 2tyy' = y^2(1 + 2t^2 y)$, per cui le soluzioni con dato iniziale come sopra sono convesse.

Veniamo alle soluzioni con dato iniziale $y(0) = y_0 < 0$. Il punto iniziale è certamente un punto di minimo, e la soluzione è convessa in un intorno di $t = 0$. Se la soluzione attraversa la curva $y = -\frac{1}{2t^2}$, diventa concava: d'altra parte, essa non può rimanere convessa in eterno (se ciò accadesse, dovrebbe attraversare la retta $y = 0$, il che è vietato).

Dunque, per qualche $t$ positivo (e per qualche $t$ negativo) la soluzione attraversa la curva $y = -\frac{1}{2t^2}$ e diventa concava. A questo punto, è facile vedere che rimane concava e tende asintoticamente a $0$ per $t \to \pm\infty$. Dunque in questo caso si ha esistenza globale. R sugg: $\boxed{\phi(t) = -\frac{1}{2t^2} - y(t)}$

Si noti che, in realtà, ci possono essere soluzioni negative che *non* passano per l'asse delle $y$ e che dunque non si comportano in questo modo (saranno cioè soluzioni corrispondenti a dati iniziali del tipo $y(t_0) = y_0$, per esempio con $t_0 > 0$ e $y_0 < 0$, e che hanno un asintoto verticale di ascissa $\bar{t}$ con $0 < \bar{t} < t_0$: risolvendo esplicitamente l'equazione si vede che tali soluzioni in effetti esistono).

Calcolare $\phi'(t)$ nel punto $\bar{t}$: $\phi(\bar{t}) = 0$ (cioè dove si reincontrano). Studiare il segno di $\phi'(\bar{t})$ e dedurre un assurdo!

Ecco un grafico delle soluzioni di questa equazione: