NOTA (le dispense di P. Guiotto non sono più disponibili online. Ci sono dei misprint. Ho controllato solo gli esempi svolti di studi qualitativi di ODE).

Capitolo 2

Equazioni Differenziali Ordinarie

2.1 Introduzione

In questo capitolo introduciamo allo studio delle *equazioni differenziali ordinarie* (EDO nel seguito). Le equazioni differenziali sono diventate, a seguito dell'invenzione del calcolo infinitesimale, il paradigma attraverso cui descrivere numerosissime situazioni dalle discipline applicate (Fisica, Chimica, Biologia, Ingegneria, Economia, etc.). La Fisica Classica fondata da Newton si basa sulle EDO per esempio: quando nel secondo principio si afferma la legge

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

si sta scrivendo di fatto un'EDO. Infatti, se $t \longmapsto y(t) \in \mathbb{R}^3$ descrive la posizione di una particella nello spazio al variare del tempo t, $\vec{v}(t) = y'(t) \in \mathbb{R}^3$ ne è la velocità e $\vec{a}(t) = y''(t) \in \mathbb{R}^3$ ne è l'accelerazione. In genere poi la forza dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità della particella. Ecco così che il secondo principio si traduce nella forma

$$my''(t) = F(t, y(t), y'(t)).$$

Si tratta di un'equazione (cioè di un'identità nella quale vi è un'incognita) la cui incognita è una funzione, la y. Essenzialmente, una soluzione è una funzione che verifica puntualmente l'identità.

Il problema principale è naturalmente quello di "risolvere" le equazioni, cioè trovare tutte le possibili soluzioni. Nel corso dell'800 si sono studiate ampie classi di EDO cercando formule risolutive, cioè formule che esprimessero la soluzione in termini di quantità note. Man mano ci si è resi conto che in questo senso non si sarebbe trovato un metodo applicabile ad un'equazione generale. Di conseguenza, l'attenzione si è progressivamente spostata su una idea più debole di "risolvere", cioè sul *dimostrare l'esistenza e l'unicità* della soluzione e studiarne proprietà qualitative. Ci si accorge subito con semplici EDO che in generale non si ha l'unicità. Un esempio banale è l'equazione

$$y'(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente ogni funzione costante è soluzione, cioè ci sono infinite soluzioni (tante quante i numeri reali). L'equazione

$$y''(t) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \quad \Longrightarrow \quad y(t) = c_1 t + c_2,$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono arbitrarie. Fisicamente quest'ultima è l'equazione di moto di un corpo su cui non agiscono forze. Naturalmente c_1 e c_2 hanno un significato: sono, rispettivamente, la velocità costante di movimento e la posizione al tempo $t = 0$ del corpo. Se poi scrivessimo le soluzioni nella forma $y(t) = c_1(t - t_0) + c_2$, c_1 avrebbe lo stesso significato di sopra, c_2 sarebbe la posizione al tempo $t = t_0$. In altre parole: *note posizione e velocità ad un certo istante $t = t_0$ è determinata univocamente la soluzione.*

Dunque, la sola equazione di Newton esprime la relazione tra posizione, velocità e accelerazione che deve valere in qualunque istante t e ovunque si trovi la particella. Se siamo pertanto interessati ad una particolare traiettoria di moto dobbiamo cercare una soluzione che in un certo istante t_0 si trovi in un punto $y_0 \in \mathbb{R}^3$ con velocità $v_0 \in \mathbb{R}^3$. Ciò significa risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} my''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Questo tipo di problema è noto come *problema di Cauchy*. Naturalmente il problema di Cauchy non è l'unico di interesse Fisico o applicativo. Sempre rimanendo nell'ambito dell'equazione di Newton un altro problema si pone del tutto naturalmente: determinare una traiettoria di moto che parte ad un certo istante t_0 da un punto y_0 e arriva, ad un istante successivo $t_1 > t_0$ nel punto y_1 (per esempio immaginiamo di dover calcolare la traiettoria di un'astronave che deve partire dalla Terra ed atterrare sulla Luna). Ciò significa risolvere il problema

$$\begin{cases} my''(t) = F(t, y(t), y'(t)), \\ y(t_0) = y_0, \\ y(t_1) = y_1. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Questo problema viene detto *problema ai limiti*. Sebbene il problema ai limiti sembri simile al problema di Cauchy è in realtà un problema profondamente differente e, nonostante l'apparente semplicità del caso del moto rettilineo uniforme, in genere il problema (2.1.2) è molto più complesso da affrontare. Qui non ci occuperemo dei problemi ai limiti che in genere richiedono tecniche molto più raffinate di quelle che verranno presentate.

Lo scopo principale di questo capitolo è quello di mostrare appunto esistenza ed unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy. Dopo alcune definizioni di rito, studieremo il caso generale delle equazioni vettoriali (cioè dove l'incognita è una funzione a valori in $\mathbb{R}^d$, come nel caso dell'equazione di Newton dove $d = 3$) del primo ordine (cioè dove al massimo compare la derivata prima): questo perché, come vedremo, le equazioni di ordine superiore possono essere ricondotte a quelle di primo ordine in modo standard. Di seguito vedremo alcune proprietà qualitative delle soluzioni (come ad esempio il comportamento asintotico in prossimità degli estremi dell'intervallo di definizione). Con l'avvento dei moderni sistemi di calcolo automatico hanno acquisito sempre maggiore importanza i metodi numerici, che consistono nella costruzione di approssimazioni delle soluzioni. Noi non ci occuperemo qui dei metodi di approssimazione ma di una questione di fondo strettamente connessa: il problema della dipendenza continua dal dato iniziale (t_0, x_0): variando di poco la condizione iniziale, la soluzione cambierà di poco?

Infine studieremo i metodi risolutivi espliciti per le equazioni lineari e le equazioni a variabili separabili.

2.2 Fondamentali

Cominciamo con la

Definizione 2.2.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Si dice* **equazione differenziale ordinaria (EDO) vettoriale di ordine n in forma normale** *un'equazione del tipo*

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \tag{2.2.1}$$

dove $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Se $d = 1$ l'equazione si dice **scalare**. *Una funzione $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ si dice* **soluzione su I della (2.2.1)** *se*

i) $\varphi \in C^n(I; \mathbb{R}^d)$;

ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D$ *per ogni* $t \in I$;

iii) φ *verifica la (2.2.1) su* I, *cioè*

$$\varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)), \quad \forall t \in I.$$

Osservazione 2.2.2. *La locuzione* **forma normale** *sta a indicare che la derivata di ordine massimo è espressa in funzione delle derivate di ordine inferiore. Ci sono naturalmente EDO in cui questo non è sempre possibile ma noi non ce ne occuperemo qui.* ■

Esempio 2.2.3 (Equazione di moto di una particella in campo di forze gravitazionali)**.** La forza di attrazione gravitazionale esercitata da un corpo di massa m_1 sito nel punto x su un corpo di massa m_2 sito nel punto y, $(x \neq y)$ è, come noto, definita da

$$F(x,y) = -Gm_1m_2\frac{y-x}{|y-x|^3},$$

dove $|y-x|$ è la distanza euclidea in $\mathbb{R}^3$. Supponiamo per esempio che il primo corpo sia fisso nel punto $x = 0$. Secondo la legge di Newton il secondo corpo si muove lungo una traiettoria y che risolve l'equazione

$$y''(t) = -Gm_1\frac{y(t)}{|y(t)|^3}.$$

In questo caso si ha un'EDO vettoriale di ordine 2 in forma normale. La F della notazione (2.2.1) è data da

$$F(t,y,y') = -Gm_1\frac{y}{|y|^3},$$

cioè non dipende né da t né da y'. Chiaramente $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ in questo caso. ■

Come annunciato nell'introduzione *è equivalente risolvere un'EDO vettoriale di ordine n ed una di ordine* 1. Per non appesantire inutilmente le notazioni ci limitiamo al caso delle equazioni scalari (cioè $d = 1$ nelle notazioni della definizione 2.2.1):

Proposizione 2.2.4. *Sia* $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *Allora*

i) se $\varphi \in C^n(I;\mathbb{R})$ *è soluzione di (2.2.1) allora la funzione*

$$\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t) := (\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)),$$

è di classe $C^1(I;\mathbb{R}^n)$ *e risolve l'equazione*

$$\psi'(t) = \widetilde{F}(t, \psi(t)), \quad \text{dove} \quad \widetilde{F}(t, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ F(t, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

ii) viceversa, se $\psi \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ *risolve l'equazione (2.2.2) allora, posto* $\varphi := \psi_1$ *(prima componente di* ψ*) si ha che* $\psi \in C^n(I;\mathbb{R})$ *e* φ *risolve (2.2.1).*

Dim. — È praticamente "burocrazia matematica" (ma nonostante ciò, o forse proprio per questo, molti non la capiscono!).
i) Sia $\varphi \in C^n(I;\mathbb{R})$ soluzione di (2.2.1) e definiamo $\psi := (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$. Notiamo che le componenti di ψ al crescere dell'indice perdono regolarità:

$$\psi_1 = \varphi \in C^n, \quad \psi_2 = \varphi' \in C^{n-1}, \quad \psi_3 = \varphi'' \in C^{n-2}, \quad \ldots, \quad \psi_n = \varphi^{(n-1)} \in C^1.$$

Dunque sono tutte almeno C^1 e quindi $\psi \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$. Dopodiché basta osservare che se scriviamo di seguito le componenti di ψ otteniamo:

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi, \\ \psi_2 = \varphi' = \psi_1', \\ \psi_3 = \varphi'' = (\varphi')' = \psi_2', \\ \vdots \\ \psi_n = \psi_{n-1}', \end{cases} \iff \begin{cases} \psi_1' = \psi_2, \\ \psi_2' = \psi_3, \\ \vdots \\ \psi_{n-1}' = \psi_n. \end{cases}$$

Inoltre, poiché φ risolve (2.2.1) si ha

$$\psi_n'(t) = \left(\varphi^{(n-1)}(t)\right)' = \varphi^{(n)}(t) = F(t,\varphi(t),\varphi'(t),\dots,\varphi^{(n-1)}(t)) = F(t,\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_n(t)).$$

Mettendo assieme quest'ultima alle precedenti si ricava che

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \psi_2(t), \\ \psi_2'(t) = \psi_3(t), \\ \vdots \\ \psi_n'(t) = F(t,\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_n(t)), \end{cases} \iff \psi'(t) = \widetilde{F}(t,\psi(t)), \tag{2.2.3}$$

dove $\widetilde{F}$ è definita dalla (2.2.2).

ii) Viceversa: sia $\psi \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ soluzione di (2.2.2). Siccome ciò significa che le componenti di ψ risolvono il sistema (2.2.3) leggiamo che

$$\begin{array}{l} \psi_1' = \psi_2 \in C^1, \implies \psi_1 \in C^2, \implies \\ \psi_1'' = \psi_2' = \psi_3 \in C^1, \implies \psi_1 \in C^3, \implies \\ \psi_1''' = \psi_3' = \psi_4 \in C^1, \implies \psi_1 \in C^4 \implies \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} = \psi_{n-1}' = \psi_n \in C^1, \implies \psi_1 \in C^n. \end{array}$$

Se dunque $\varphi := \psi_1$ allora $\varphi \in C^n(I;\mathbb{R})$. Inoltre, sempre dal sistema leggiamo che $\psi_k = \varphi^{(k-1)}$ e

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\varphi^{(n-1)}(t)\right)' = (\psi_n(t))' = F(t,\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_n(t)) = F(t,\varphi(t),\varphi'(t),\dots,\varphi^{(n-1)}(t)),$$

cioè φ risolve (2.2.1). ∎

Osservazione 2.2.5 (per gli amanti dell'orrido). *Non si è dimostrato proprio tutto: cosa manca?*

Esempio 2.2.6. *La riduzione a sistema del primo ordine presentata sopra è tutt'altro che formale, come illustra il caso della Fisica Classica.* Consideriamo infatti l'equazione di Newton

$$my''(t) = -\nabla V(y(t)),$$

dove V è l'energia potenziale per il campo di forze $\vec{F} = -\nabla V$. Al posto di scrivere $\psi_1 := y$, $\psi_2 := y'$ scriviamo, seguendo la notazione classica della Meccanica, $q := y$, $p := y'$. Sempre seguendo le notazioni classiche della Meccanica indichiamo con $\dot{q} \equiv q'$ e similmente $\dot{p} \equiv p'$. L'equazione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{1}{m}\nabla V(q(t)). \end{cases}$$

Dunque $(\psi_1,\psi_2) = (q,p)$ hanno un significato fisico, nel senso che la soluzione del sistema di primo ordine rappresenta la *traiettoria di moto nel cosiddetto spazio delle fasi.* Inoltre si può osservare che se introduciamo l'energia totale (=energia cinetica + energia potenziale)

$$H(q,p) := \frac{1}{2}p^2 + V(q),$$

allora il sistema assume la forma

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q,p), \\ \dot{p} = -\partial_q H(q,p). \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Un sistema del tipo (2.2.4) prende il nome di **sistema hamiltoniano** e come si vedrà in altri corsi la particolarità di questa struttura introduce una geometria nello studio delle traiettorie di moto dei sistemi meccanici (but this is another story). ∎

La proposizione precedente ci autorizza dunque a considerare solo il caso delle equazioni vettoriali di ordine 1. Come detto nelle premesse ci interessa particolarmente un problema, il cosiddetto

Definizione 2.2.7 (Problema di Cauchy, 1^o ordine). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Chiamiamo* **problema di Cauchy** *relativo alla* **condizione iniziale** *$(t_0, y_0) \in D$ il problema di trovare una soluzione del sistema*

$$\mathsf{PC}(t_0, x_0) \quad \begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Una funzione $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ si dice **soluzione su** *I del $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$ se $t_0 \in I$ e*

i) $(t, \varphi(t)) \in D$ *per ogni* $t \in I$;

ii) $\varphi \in C^1(I; \cancel{\mathbb{R}^n})$ *e* $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ *per ogni* $t \in I$.

iii) $\varphi(t_0) = y_0$.

Osservazione 2.2.8 (significato geometrico). Possiamo interpretare il $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$ in questo modo: trovare una funzione φ che "passi" per il punto (t_0, y_0) e la cui tangente al grafico abbia pendenza $F(t, \varphi(t))$, cioè il valore di F nel punto del grafico stesso. Fisicamente, F definisce il "campo delle velocità" delle soluzioni. Notiamo che una volta

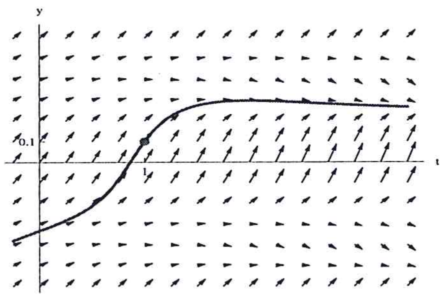


Figura 2.1: Campo $F(t, y) = 1 + t \cos y$ e soluzione di $\mathsf{PC}(1, \frac{1}{10})$.

noto (t_0, y_0) è univocamente determinata la pendenza "iniziale" visto che, se φ è soluzione deve aversi

$$\varphi'(t_0) = F(t_0, \varphi(t_0)) = F(t_0, y_0).$$

Siccome φ è differenziabile in prima approssimazione avremo quindi che

$$\varphi(t) \approx \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0) = y_0 + F(t_0, y_0)(t - t_0).$$

La funzione a destra della precedente relazione ha, come noto, per grafico la retta tangente a φ per (t_0, y_0): ovviamente non sarà in generale una soluzione ma, diciamo, una soluzione "approssimata": su questa idea si basa il teorema di Peano 2.3.3 di esistenza, la cui dimostrazione è riportata in appendice B. ∎

Osservazione 2.2.9. Alla luce di quanto stabilito nella Proposizione 2.2.4, il problema di Cauchy per un'equazione di ordine n significa risolvere

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = F(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I_{t_0}, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_0', \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1}. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

In particolare, nel caso $n = 2$ si ottiene proprio il problema fondamentale della meccanica (2.1.1). ■

Notiamo qui un'osservazione apparentemente poco significante, tuttavia fondamentale nella dimostrazione dell'esistenza delle soluzioni di un problema di Cauchy:

Proposizione 2.2.10 (equivalenza con equazione integrale). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$* **continua**. *Allora $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ è soluzione su I di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$ se e solo se*

i) $(t, \varphi(t)) \in D$*, per ogni* $t \in I$*;*

ii) $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^d)$*;*

iii) φ *risolve l'***equazione integrale**

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.2.6}$$

Dim. — $\Longrightarrow$: Sia $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^d)$ soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$: chiaramente la i) coincide con la i) della definizione 2.2.7 e quindi non c'è nulla da dimostrare. Poi evidentemente la ii) è ovvia. Resta verificare che φ risolve l'equazione integrale: a tal fine basta integrare membro a membro l'equazione differenziale sull'intervallo $[t_0, t]$ con $t \in I$ (essendo I intervallo $[t_0, t] \subset I$ ovviamente):

$$\varphi'(s) = F(s, \varphi(s)), \quad \forall s \in [t_0, t], \quad \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds,$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale (naturalmente $s \longmapsto F(s, \varphi(s))$ è integrabile perché composizione di funzioni continue). Dopodiché è finita osservando che $\varphi(t_0) = y_0$ essendo φ soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$.
$\Longleftarrow$: Supponiamo ora che φ soddisfi i), ii) e iii) dell'enunciato. Nuovamente la i) della definizione 2.2.7 è la i). Proviamo ora che $\varphi \in C^1$. Siccome $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^d)$ per composizione $s \longmapsto F(s, \varphi(s)) \in C(I; \mathbb{R}^d)$. Ma allora per il teorema fondamentale del calcolo la funzione

$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds$$

e continua e derivabile. Ne segue che φ è derivabile e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo,

$$\varphi'(t) = \left(\int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds \right)' = F(t, \varphi(t)),$$

da cui si ha che $\varphi' \in C$ (cioè $\varphi \in C^1$) e φ risolve l'equazione. Infine, ponendo $t = t_0$ nell'equazione integrale si ottiene $\varphi(t_0) = y_0$. ■

2.3 Coefficienti continui: teorema di esistenza di Peano

Come già accennato il problema principale è quello dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy. Precisamente si tratta di trovare ipotesi sulla funzione F di modo tale da garantire ciò. Un'ipotesi abbastanza naturale è la continuità della funzione F. Tuttavia con semplici esempi si può vedere che si ha esistenza ma non unicità per il problema di Cauchy.

Esempio 2.3.1. *Determinare tutte le possibili soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Sol. — In questo caso $F(t,x) = \sqrt[3]{x}$ è chiaramente continua su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. È facile trovare subito una soluzione: $\varphi(t) \equiv 0$ è chiaramente soluzione del problema di Cauchy. Vediamo che ci sono infinite altre soluzioni in realtà utilizzando un argomento che funziona per una classe di EDO, le *equazioni a variabili separabili* (ved. sez. 2.13). Supponiamo di voler trovare una soluzione $\varphi \in C^1(I)$, $0 \in I$ che non sia identicamente nulla su I, cioè che almeno si abbia $\varphi \not\equiv 0$ su $J = [a,b] \subset I$. In particolare, su J l'equazione può essere riscritta come

$$\frac{\varphi'(t)}{\sqrt[3]{\varphi(t)}} = 1, \quad t \in J.$$

Ora si noterà che

$$\frac{\varphi'(t)}{\sqrt[3]{\varphi(t)}} = \varphi(t)^{-\frac{1}{3}}\varphi'(t) = \frac{3}{2}\left(\varphi(t)^{\frac{2}{3}}\right)', \quad \Longrightarrow \quad \left(\varphi(t)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}.$$

Questo significa che

$$\varphi(t)^{\frac{2}{3}} = \frac{t}{3} + C, \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t + C\right)^{\frac{3}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il segno $\pm$ dipende se $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$. Se cambiamo C con $-\frac{2}{3}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ possiamo allora scrivere

$$\varphi(t) = \pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(t-\alpha)^{\frac{3}{2}}. \quad (\star)$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ tale funzione è di classe $C^1([\alpha, +\infty[)$ e si annulla in $t = \alpha$. Inoltre è soluzione (basta fare la verifica diretta). Questo significa che se consideriamo le famiglie di funzioni

$$\varphi_\alpha(t) := \begin{cases} 0, & t \leqslant \alpha, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(t-\alpha)^{\frac{3}{2}}, & t \geqslant \alpha, \end{cases} \qquad \psi_\alpha(t) := \begin{cases} 0, & t \leqslant \alpha, \\ -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(t-\alpha)^{\frac{3}{2}}, & t \geqslant \alpha, \end{cases}$$

con $\alpha \geqslant 0$, abbiamo infinite soluzioni possibili definite su tutto $\mathbb{R}$ e non nulle del $\mathsf{PC}(0,0)$ (l'unica cosa non immediata è che siano funzioni di classe C^1 visto che c'è la doppia definizione in $t = \alpha$; d'altra parte è facile verificare che $\varphi'_\alpha(\alpha) = \psi'_\alpha(\alpha) = 0$).

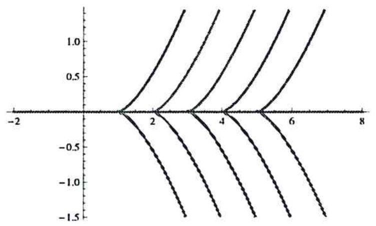


Figura 2.2: Grafico di alcune soluzioni.

Ci sono altre soluzioni? No. Infatti se φ è soluzione non nulla allora, come visto sopra, fintanto che non è nulla si ha che deve valere la $(\star)$. Necessariamente $\alpha \geqslant 0$ altrimenti, se $\alpha < 0$ si avrebbe $\varphi(0) = \pm \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (-\alpha)^{\frac{3}{2}} \neq 0$. Allora $\alpha \geqslant 0$ e quindi $\varphi \equiv 0$ su $]-\infty, \alpha]$. ∎

Osservazione 2.3.2. *Nell'esempio precedente è interessante osservare un fenomeno apparentemente incidentale. Fissiamo un "tempo" $T > 0$ ed un arbitrario $y \in \mathbb{R}$ è possibile trovare una soluzione φ di* $\mathsf{PC}(0,0)$ *tale che $\varphi(T) = y$ (questo è un caso particolare del cosiddetto* fenomeno di Peano, *ved. app. B).* ∎

Tuttavia la continuità è sufficiente a garantire sempre l'esistenza locale di almeno una soluzione, come mostra il celebre

Teorema 2.3.3 (Peano). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua. Allora per ogni $(t_0, x_0) \in D$ esiste una* **soluzione locale** *(o* **in piccolo***) del* $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$*, cioè:*

$$\exists I_{t_0} \subset \mathbb{R}, \text{ intorno di } t_0,\ \varphi \in C^1(I_{t_0}; \mathbb{R}^d), \text{ soluzione di } \mathsf{PC}(t_0, y_0) \text{ su } I_{t_0}.$$

Dim. — ved. Appendice B. ∎

2.4 Coefficienti globalmente lipschitziani: esistenza e unicità globale

Nella sezione precedente si è visto che la continuità della funzione F che definisce il secondo membro dell'equazione $y' = F(t, y)$ è sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione locale del problema di Cauchy (teorema di Peano) ma non l'unicità. In questa sezione vedremo che sotto un'ipotesi più restrittiva per F (ma abbastanza generale) si ha esistenza ed unicità.

Il tutto si basa su un'idea profonda che ora introduciamo. Abbiamo visto nella proposizione 2.2.10 che risolvere un $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$ equivale essenzialmente a trovare una funzione $\varphi \in C(I)$ con $t_0 \in \mathrm{Int}(I)$ tale che

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds, \quad t \in I. \tag{2.4.1}$$

La (2.4.1) può essere ripensata come un'*equazione di punto fisso*. Infatti, senza preoccuparci per ora degli aspetti formali, se introduciamo l'operatore

$$\Gamma : C(I) \longrightarrow C(I), \quad \Gamma(\varphi)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s))\, ds,\ t \in I,$$

la (2.4.1) si può scrivere come:

$$\exists \varphi \in C(I),\ :\ \Gamma(\varphi) = \varphi.$$

Il problema di trovare punti fissi di trasformazioni su spazi infinito dimensionali (com'è lo spazio $\mathfrak{X} := C(I)$) è un problema di natura *topologica* ed ha avuto numerosi sviluppi nel corso del ventesimo secolo ad iniziare dai lavori di Banach. Uno dei risultati più belli ed importanti è senza dubbio il

Teorema 2.4.1 (di Banach delle contrazioni). *Sia $(\mathfrak{X}, d)$ spazio metrico completo, $\Gamma : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ un'applicazione tale che*

$$\exists 0 \leqslant \lambda < 1,\ :\ d(\Gamma(\varphi), \Gamma(\psi)) \leqslant \lambda d(\varphi, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{X}$$

(si dice che Γ è una **contrazione***). Allora*

$$\exists\, !\, \varphi \in \mathfrak{X}\ :\ \Gamma(\varphi) = \varphi.$$

Dim. — L'idea è semplice: sia $\varphi_0 \in X$ e definiamo per ricorrenza $\varphi_{n+1} = \Gamma(\varphi_n)$ con $n \geqslant 0$. Si tratta di mostrare che $\exists \lim_n \varphi_n =: \varphi$. Se così è, essendo Γ ovviamente continua,

$$\varphi \longleftarrow \varphi_{n+1} = \Gamma(\varphi_n) \longrightarrow \Gamma(\varphi), \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \Gamma(\varphi).$$

i) (φ_n) è di Cauchy: Osserviamo anzitutto che, per $n \geqslant 1$,

$$d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) = d(\Gamma(\varphi_n), \Gamma(\varphi_{n-1})) \leqslant \lambda d(\varphi_n, \varphi_{n-1}), \quad \Longrightarrow \quad d(\varphi_{n+1}, \varphi_n) \leqslant \lambda^n d(\varphi_1, \varphi_0),$$

da cui, se $m > n$, $\sum_{k=m}^{m-1} \lambda^k d(\varphi_0 \varphi_1) = \lambda^m \sum_{j=0}^{m-m-1} \lambda^j d(\varphi_0 \varphi_1) \leqslant \lambda^m d(\varphi_0 \varphi_1) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(\varphi_0 \varphi_1) \to 0$

$$d(\varphi_m, \varphi_n) \leqslant \sum_{j=0}^{m-n-1} d(\varphi_{n+j+1}, \varphi_{n+j}) \leqslant \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^{n+j} d(\varphi_1, \varphi_0) = \lambda^n d(\varphi_1, \varphi_0) \frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda} \leqslant \lambda^n \frac{d(\varphi_1, \varphi_0)}{1-\lambda}.$$

Siccome $\lambda < 1$ si ha che

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_0)}{1-\lambda} \lambda^n \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty,$$

per cui troviamo $N_0(\varepsilon)$ tale che $\frac{d(\varphi_1,\varphi_0)}{1-\lambda} \lambda^n \leqslant \varepsilon$ per ogni $n \geqslant N_0(\varepsilon)$. Ma allora $d(\varphi_m, \varphi_n) \leqslant \varepsilon$ per ogni $m > n \geqslant N_0(\varepsilon)$, che è la proprietà di Cauchy.
ii) Esistenza del punto fisso : La conclusione è ora semplice: sia $\varphi = \lim_n \varphi_n$ (il limite esiste essendo $\mathfrak{X}$ completo). Siccome $\varphi_{n+1} = \Gamma(\varphi_n)$ e Γ, essendo lipschitziana, è continua, si ha che $\Gamma(\varphi_n) \longrightarrow \Gamma(\varphi)$ da cui $\varphi = \Gamma(\varphi)$.
iii) Unicità: se $\varphi, \psi \in \mathfrak{X}$ sono punti fissi allora

$$d(\varphi, \psi) = d(\Gamma(\varphi), \Gamma(\psi)) \leqslant \lambda d(\varphi, \psi) < d(\varphi, \psi),$$

che è assurdo, a meno che $d(\varphi, \psi) = 0$, cioè $\varphi = \psi$. ■

Un'utile conseguenza del teorema di Banach è il

Corollario 2.4.2. *Sia $\mathfrak{X}$ spazio metrico completo, $\Gamma : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ tale che un'opportuna potenza (rispetto alla composizione) Γ^n di Γ sia una contrazione (senza necessariamente che Γ stessa lo sia). Allora*

$$\exists\, !\, \varphi \in \mathfrak{X} \;:\; \Gamma(\varphi) = \varphi.$$

Dim. — Infatti: se $\Gamma^n = \Gamma \circ \cdots \circ \Gamma$ è una contrazione, allora

$$\exists\, !\, \varphi \in \mathfrak{X} \;:\; \Gamma^n(\varphi) = \varphi.$$

Mostriamo che in realtà anche $\Gamma(\varphi) = \varphi$. Infatti, osservato che

$$\Gamma(\Gamma^n(\varphi)) = \Gamma(\varphi), \quad \Gamma(\Gamma^n(\varphi)) = \Gamma^n(\Gamma(\varphi)),$$

da cui, posto $\psi = \Gamma(\varphi)$ risulta che $\Gamma^n(\psi) = \psi$. Ma per l'unicità deve essere $\psi = \varphi$, cioè $\Gamma(\varphi) = \varphi$.
Quanto all'unicità basta osservare che se $\Gamma(\psi) = \psi$ allora banalmente $\Gamma^n(\psi) = \psi$, ma allora $\psi = \varphi$. ■

Applicheremo ora il corollario precedente al caso dell'equazione (2.4.1):

Teorema 2.4.3 (esistenza ed unicità globale). *Sia $F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tale che,*

i) $F \in C([a, b] \times \mathbb{R}^d)$;

ii) F *sia* **globalmente lipschitziana nella variabile y uniformemente nella variabile t**, *ovvero:*

$$\exists L \geqslant 0, \;:\; |F(t, \xi) - F(t, \eta)| \leqslant L|\xi - \eta|, \; \forall (t, \xi), (t, \eta) \in [a, b] \times \mathbb{R}^d. \tag{2.4.2}$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d$ *esiste una ed una sola soluzione* φ *soluzione su* $[a,b]$ *di* $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$.

Dim. — È un'applicazione diretta del lemma delle contrazioni. Sia

$$\mathfrak{X} := C([a,b];\mathbb{R}^d), \quad \text{munito della norma usuale } \|\varphi\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|_{\mathbb{R}^d}$$

(d'ora in poi brevemente scriveremo $|\varphi(t)|$ in luogo di $|\varphi(t)|_{\mathbb{R}^d}$ essendo chiaro il contesto). Abbiamo visto che, teorema 1.5.7, $\mathfrak{X}$ è uno spazio di Banach. Sia poi

$$\Gamma : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}, \quad [\Gamma(\varphi)](t) := y_0 + \int_{t_0}^t F(s,\varphi(s))\, ds, \quad t \in [a,b].$$

È facile controllare che effettivamente Γ è ben definito su $\mathfrak{X}$ e $\Gamma(\varphi) \in \mathfrak{X}$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{X}$ [1]. Proveremo che un'opportuna potenza di Γ è effettivamente una contrazione. Il primo passo è osservare che se $\varphi, \psi \in \mathfrak{X}$ e $t \in [a,b]$ allora,

$$[\Gamma(\varphi)](t) - [\Gamma(\psi)](t) = \int_{t_0}^t (F(s,\varphi(s)) - F(s,\psi(s)))\, ds.$$

Se per esempio $t > t_0$ abbiamo allora che

$$|[\Gamma(\varphi)](t) - [\Gamma(\psi)](t)| \leqslant \int_{t_0}^t |F(s,\varphi(s)) - F(s,\psi(s))|\, ds \overset{(2.4.2)}{\leqslant} L\int_{t_0}^t |\varphi(t) - \psi(s)|\, ds.$$

Di conseguenza, essendo $\Gamma^n(\varphi) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(\varphi))$,

$$\begin{aligned}
|[\Gamma^n(\varphi)](t) - [\Gamma^n(\psi)](t)| &\leqslant L\int_{t_0}^t \left|[\Gamma^{n-1}(\varphi)](t_1) - [\Gamma^{n-1}(\psi)](t_1)\right| dt_1 \\
&\leqslant L^2 \int_{t_0}^t\int_{t_0}^{t_1} \left|[\Gamma^{n-2}(\varphi)](t_2) - [\Gamma^{n-2}(\psi)](t_2)\right| dt_2\, dt_1 \\
&\;\vdots \\
&\leqslant L^n \int_{t_0}^t\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} |\varphi(t_n) - \psi(t_n)|\, dt_n \cdots dt_1 \\
&\leqslant L^n\|\varphi-\psi\|_\infty \int_{t_0}^t\int_{t_0}^{t_1}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \cdots dt_1 = \frac{L^n(t-t_0)^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

È facile mostrare che la stessa stima vale, opportunamente adattata, anche per $t < t_0$, da cui

$$|[\Gamma^n(\varphi)](t) - [\Gamma^n(\psi)](t)| \leqslant \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty, \implies \|\Gamma^n(\varphi) - \Gamma^n(\psi)\|_\infty \leqslant \frac{L^n(b-a)^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty.$$

Essendo la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{L^n(b-a)^n}{n!}$ convergente si ha che $\frac{L^n(b-a)^n}{n!} < 1$ definitivamente, e quindi per n sufficientemente grande questo prova che Γ^n è una contrazione. ■

Osservazione 2.4.4. *La dimostrazione precedente costituisce, di fatto, un metodo di approssimazione numerica per la soluzione.* Infatti, essendo la soluzione punto fisso dell'equazione (2.4.1) come noto dal teorema di Banach il punto fisso $\varphi = \lim_n \varphi_n = \lim_n \Gamma^n(\varphi_0)$ (rispetto alla convergenza uniforme) dove φ_0 è arbitraria. Osserviamo che, per esempio, nel caso del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), \; t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

[1]Infatti: essendo F continua, se $\varphi \in C([a,b])$ allora $s \longmapsto F(s,\varphi(s)) \in C([a,b])$; dunque la funzione integrale $t \longrightarrow \int_{t_0}^t F(s,\varphi(s))\, ds$ è continua per il teorema fondamentale del calcolo. Ma questo significa che $\Gamma(\varphi) \in C([a,b])$ per ogni $\varphi \in C([a,b])$.

il metodo produce, posto $\varphi_0 \equiv 1$,

$$\varphi_{n+1}(t) = [\Gamma\varphi_n](t) = 1 + \int_0^t \varphi_n(s)\, ds,$$

da cui $\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t$, $\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)\, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$ e, in generale, $\varphi_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$. ■

Possiamo ora estendere il teorema 2.4.3 al caso in cui l'intervallo temporale $[a,b]$ sia sostituito da un intervallo arbitrario I (eventualmente illimitato): l'idea, che tornerà quando parleremo di *soluzioni massimali*, è quella di "incollare" i grafici delle soluzioni sugli intervalli $[a,b] \subset I$ per ottenere una soluzione su tutto I:

Corollario 2.4.5. *Sia $F : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo qualsiasi (anche illimitato), tale che,*

i) $F \in C(I \times \mathbb{R}^d)$*;*

↗ in ogni striscia

ii) F *è lipschitziana nella variabile y uniformemente nella variabile $t \in [a,b]$ per ogni $[a,b] \subset I$, ovvero:*

$$\forall [a,b] \subset I,\ \exists L(a,b) \geqslant 0, \quad : \quad |F(t,\xi) - F(t,\eta)| \leqslant L(a,b)|\xi - \eta|,\ \forall (t,\xi), (t,\eta) \in [a,b] \times \mathbb{R}^d. \tag{2.4.3}$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ esiste una ed una sola soluzione φ soluzione su I di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$.

Dim. — **Esistenza :** Sia $[a,b]$ un abitrario intervallo chiuso e limitato contenente t_0: applicando il teorema 2.4.3 su $[a,b] \times \mathbb{R}^d$ troviamo una soluzione φ (unica su $[a,b]$). Notiamo che per ogni $[a,b]$ c'è una soluzione e quindi ce ne sono infinite. In realtà, essendo che se

$$\varphi \text{ sol. su } [a,b] \ni t_0, \quad \psi \text{ sol. su } [c,d] \ni t_0, \quad \Longrightarrow \quad \varphi, \psi \text{ sol. su } [a,b] \cap [c,d],$$

per l'unicità si ha anche che

$$\varphi = \psi \text{ su } [a,b] \cap [c,d].$$

Questo fatto permette di vedere le infinite soluzioni come "tracce" di un'unica soluzione. Per vedere ciò chiamiamo $\varphi_{[a,b]}$ la soluzione su $[a,b] \ni t_0$ e definiamo:

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \varphi(t) := \varphi_{[a,b]}(t), \text{ se } t \in [a,b].$$

L'osservazione fatta sopra permette di affermare che φ è effettivamente ben definita (cioè ad ogni t è associato un unico valore). Inoltre, per definizione, φ è soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$ su ogni $[a,b] \subset I$ e quindi su tutto I.

Unicità : Sia ψ un'altra soluzione su I. Allora ψ è soluzione su $[a,b] \ni t_0$, dunque coincide (per il teorema 2.4.3 con $\varphi_{[a,b]}$ che a sua volta coincide con φ per definizione di quest'ultima: dunque $\psi \equiv \varphi$ su ogni $[a,b] \subset I$ contenente t_0: ne segue che $\psi \equiv \varphi$ su I. ■

Finiamo questa sezione andando a vedere come testare le condizioni (2.4.2) e (2.4.3). A tal fine ricordiamo la

Proposizione 2.4.6 (teorema dell'incremento finito, caso vettoriale). *Sia $G : D \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ differenziabile su D aperto, $\xi, \eta \in D$ tali che $[\xi, \eta]$ ($\equiv$ segmento congiungente ξ con η) sia contenuto in D. Allora vale la stima*

$$|G(\xi) - G(\eta)| \leqslant \left(\sup_{y \in [\xi,\eta]} \|G'(y)\| \right) |\xi - \eta|. \tag{2.4.4}$$

$\Rightarrow F(t)\ F(\eta + t(\xi - \eta))$

$\|F(1) - F(0)\| \leq \sup \|g'(t)\|$

Dim. — ved. De Marco [2], teorema 4.10.1. ■

$\Downarrow$

Pertanto, supponendo che $F(t,\cdot)$ sia differenziabile su $\mathbb{R}^d$ possiamo scrivere

$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(t+\lambda) - g(t)}{\lambda} =$

$$|F(t,\xi) - F(t,\eta)| \leqslant \left(\sup_{y \in [\xi,\eta]} \|\partial_y F(t,y)\| \right) |\xi - \eta|.$$

$\frac{F(\eta + t(\xi-\eta) + \lambda(\xi - \eta)) - F(\eta + t(\xi - \eta))}{\lambda}$

Naturalmente $\partial_y F(t,y)$ è il differenziale di F rispetto ad y. Da questa segue subito la

$\partial_{\xi - \eta} F(\eta + t(\xi - \eta))$

$= \|(\xi - \eta)\partial_u F(\eta + t(\xi - \eta))\| \leq df =$

dG'

Proposizione 2.4.7. *Se $F : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è continua e $F(t,\cdot)$ è differenziabile per ogni $t \in I$ ed inoltre vale la stima*

$$\sup_{(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d} \|\partial_y F(t,y)\| < +\infty, \quad \forall [a,b] \subset I, \tag{2.4.5}$$

chiamo questo sup L e ho la Lipschitzianità

allora vale il teorema di esistenza e unicità in grande.

Osservazione 2.4.8. *Nel caso delle equazioni scalari (cioè $d = 1$) bisogna verificare che $\partial_y F(t,y)$ (qui ∂_y è la classica derivata parziale) sia uniformemente limitata. Nel caso delle equazioni vettoriali allora, se $F = (F_1, F_2, \dots, F_d)$ bisogna verificare che*

$$\sup_{(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d} |\partial_{y_i} F_j(t,y)| < +\infty, \quad \forall i,j = 1,\dots,d, \ \forall [a,b] \subset I. \ \blacksquare \tag{2.4.6}$$

Esempio 2.4.9. *Verificare che il sistema* 2×2

$$\begin{cases} x' = t^2 e^{-y^2} \sin x + x, \\ y' = -t \log(1+y^2) + e^t \cos y \end{cases}$$

verifica le ipotesi di esistenza ed unicità globale su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Sol. — Abbiamo che $F = F(t,x,y)$ è definita da

$$F(t,x,y) = \begin{pmatrix} t^2 e^{-y^2} \sin x + x \\ -t \log(1+y^2) + e^t \cos x \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(t,x,y) \\ F_2(t,x,y) \end{pmatrix}.$$

Chiaramente $F_{1,2} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ quindi $F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\partial_x F_1 &= t^2 e^{-y^2} \cos x + 1, &&\Longrightarrow |\partial_x F_1(t,x,y)| \leqslant t^2 + 1, \\
\partial_y F_1 &= -2t^2 y e^{-y^2} \sin x, &&\Longrightarrow |\partial_y F_1(t,x,y)| \leqslant 2t^2 \max_{y\in\mathbb{R}}(ye^{-y^2}) \leqslant 2Ct^2, \\
\partial_x F_2 &= -e^t \sin x, &&\Longrightarrow |\partial_x F_2(t,x,y)| \leqslant e^t, \\
\partial_y F_2 &= -t \tfrac{2y}{1+y^2}, &&\Longrightarrow |\partial_y F_2(t,x,y)| \leqslant 2|t| \max_{y\in\mathbb{R}} \tfrac{|y|}{1+y^2} \leqslant 2D|t|.
\end{aligned}$$

È chiaro ora che le condizioni (2.4.6) sono soddisfatte. $\blacksquare$

Un esempio notevole ed elementare è quello delle *equazioni lineari*, cioè delle equazioni vettoriali del tipo

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_{d\times d}(\mathbb{R}), \ b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

In questo caso

$$F(t,y) := A(t)y + b(t).$$

Siccome $F(t,\cdot)$ è sempre differenziabile (funzione affine) con

$$\partial_y F(t,y) = A(t),$$

ne deduciamo che

Corollario 2.4.10. *Se $A \in C(I; M_{d\times d}(\mathbb{R}))$ (cioè, di fatto, $A_{ij} \in C(I;\mathbb{R})$ per ogni $1 \leqslant i,j \leqslant d$) e $b \in C(I;\mathbb{R}^d)$ allora $F(t,y) := A(t)y + b(t)$ soddisfa la condizione (2.4.5). In particolare* **i problemi di Cauchy per le equazioni lineari a coefficienti continui $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ ammettono esistenza e unicità globale.**

Dim. — Chiaramente nelle ipotesi F è continua. Basta poi osservare che

$$\|\partial_y F(t,y)\| = \|A(t)\|, \implies \sup_{(t,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d} \|\partial_y F(t,y)\| = \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\| < +\infty$$

per il teorema di Weierstrass essendo $A(\cdot)$ è continua (e quindi lo è anche $t \longmapsto \|A(t)\|$). $\blacksquare$

2.5 Coefficienti localmente lipschitziani: esistenza ed unicità locale

Il teorema di esistenza ed unicità globale 2.4.3 ha due pesanti limitazioni. Da un lato è richiesto che la funzione F sia globalmente definita nelle y (cioè su tutto $\mathbb{R}^d$). Ciò non accade, per esempio, con l'equazione

$$y' = \log y,$$

dove $F(t,y) = \log y$ è definita per $(t,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Dall'altro, le ipotesi viste nella sezione precedente non sono verificate in molti casi di equazioni non lineari. Per esempio se consideriamo la semplice equazione scalare

$$y' = y^2 + 1,$$

in questo caso $F(t,y) = y^2$ è ancora continua su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma $\partial_y F = 2y$ non è limitata per $y \in \mathbb{R}$. Questa equazione è anche abbastanza istruttiva per illustrare il fatto che, a differenza del caso di esistenza ed unicità globale nel quale le soluzioni sono definite *a priori* su un certo intervallo I qualunque sia la condizione iniziale, nei casi di esistenza ed unicità locale l'intervallo può dipendere dal dato iniziale:

Esempio 2.5.1. *Studiare, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione*

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 + 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Sol. — Sia $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sia una soluzione di (2.5.1). Allora

$$\varphi'(t) = \varphi(t)^2 + 1, \iff \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2 + 1} = 1,$$

integrando tra 0 e t abbiamo

$$t = \int_0^t 1\, ds = \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^2 + 1}\, ds \overset{\xi=\varphi(s)}{=} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{\xi^2 + 1}\, d\xi = \arctan \xi \Big|_{\xi=\varphi(0)}^{\xi=\varphi(t)} = \arctan(\varphi(t)) - \arctan y_0.$$

Da ció si deduce che

$$\arctan(\varphi(t)) = t + \arctan y_0.$$

Poiché $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, segue che

$$-\frac{\pi}{2} < t + \arctan y_0 < \frac{\pi}{2}, \iff -\frac{\pi}{2} - \arctan y_0 < t < \frac{\pi}{2} - \arctan y_0.$$

Dunque, riassumendo: **se** φ è soluzione di (2.5.1), allora φ è definita al massimo nell'intervallo

$$I_{y_0} := \left]-\frac{\pi}{2} - \arctan y_0, \frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right[,$$

e, su detto intervallo,

$$\varphi(t) = \tan(t + \arctan y_0), \quad t \in I_{y_0}. \tag{2.5.2}$$

Cioé: I_{y_0} è il massimo intervallo sul quale una soluzione può essere definita; inoltre, una soluzione, posto che esista, è univoca ed assegnata dalla formula (2.5.2) su I_{y_0}. Senza avere ancora un teorema che garantisca l'esistenza possiamo comunque concludere che φ è soluzione facendo la verifica diretta (piccolo calcolo). ■

Vedremo ora che è possibile indebolire l'ipotesi (2.4.2) (o (2.4.3)) chiedendo essenzialmente la *lipschitzianità locale in y*. L'essenza del discorso è che *perdendo il controllo globale si riesce solo a garantire l'esistenza di soluzioni locali.* La dimostrazione di questo indebolimento, che è poi un indebolimento del teorema 2.4.3, si basa sulla stessa idea, cioè di applicare opportunamente il teorema delle contrazioni, senonché la situazione è assai più complessa:

Teorema 2.5.2 (esistenza ed unicità locale). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, D aperto. Supponiamo che*

i) $F \in C(D)$;

ii) F *sia* **localmente lipschitziana nella variabile** y **uniformemente nella variabile** t, *ovvero:*

$$\begin{gathered}\forall (t_0, y_0) \in D,\ \exists U_{(t_0,y_0)} \subset D \text{ intorno di } (t_0, y_0),\ \exists L_{t_0,y_0} > 0, \text{ tale che} \\ |F(t,\xi) - F(t,\eta)| \leqslant L_{t_0,y_0} |\xi - \eta|,\ \forall (t,\xi), (t,\eta) \in U_{(t_0,y_0)}.\end{gathered} \tag{2.5.3}$$

Allora si ha che:

- **Esistenza locale:** *per ogni $(t_0, y_0) \in D$ esistono un intervallo $I_{t_0} \ni t_0$ ed una funzione φ soluzione su I_{t_0} di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$.*
- **Unicità globale:** *se ψ è soluzione su $J_{t_0} \ni t_0$ di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$ allora $\varphi \equiv \psi$ su $I_{t_0} \cap J_{t_0}$.*

Vale inoltre il seguente controllo sull'ampiezza dell'intervallo I_{t_0}: preso $(t_0, y_0) \in D$ esistono un intorno $V_{(t_0,y_0)} \subset D$ di (t_0, x_0) e $T = T(t_0, y_0) > 0$ tali che se $(s_0, z_0) \in V_{(t_0,y_0)}$ la soluzione di $\mathsf{PC}(s_0, z_0)$ è definita per un intervallo di lunghezza almeno T indipendentemente da (s_0, z_0).

Osservazione 2.5.3. *In altre parole: per condizioni iniziali abbastanza vicine ad una data condizione (t_0, y_0) le soluzioni locali hanno tutte un tempo di vita minimo indipendente dalla condizione iniziale stessa.* ■

Dim. — L'idea è la stessa di quella del Teorema 2.4.3, solo più complessa da realizzare (ved. Appendice C). ■

Vediamo ora un'importante condizione sufficiente (simile alla 2.4.5) che garantisce la lipschizianità locale (2.5.3): ciò è abbastanza semplice ricordata la (2.4.4).

Proposizione 2.5.4 (criterio di Lipschitzianità locale). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua su D aperto e tale che $y \longmapsto F(t, y)$ sia differenziabile nei punti $(t_0, y_0) \in D$. Allora se*

$$\forall (t_0, y_0) \in D,\ \exists U_{(t_0,y_0)} \subset D \text{ intorno di } (t_0, y_0)\ :\ \sup_{(t,y)\in U_{(t_0,y_0)}} \|\partial_y F(t, y)\| < +\infty, \tag{2.5.4}$$

si ha che F è localmente lipschitziana nella y uniformente in t su D. **In particolare: se $\partial_{y_i} F_j \in C(D)$ per ogni $i, j = 1, \dots, d$ allora vale la (2.5.4) per cui F è localmente lipschiziana in y uniformemente in t su D.**

Dim. — Anzitutto: per la (2.4.4) e la (2.5.4) abbiamo subito la (2.5.3) come si vede facilmente. Quando al caso particolare basta osservare che se $\partial_{y_i} F_j \in C(D)$ allora $t \longmapsto F(t, y)$ è differenziabile nei punti $(t, y) \in D$ (teorema del differenziale totale) e, per il teorema di Weierstrass, essendo $\partial_y F \in C(D)$ è limitata sui compatti: ciò permette di affermare che la (2.5.4) è vera pur di prendere come intorno un intorno compatto di (t_0, y_0). ■

2.6 Soluzioni massimali

Come abbiamo già detto nella sezione precedente, le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale sono di solito troppo restrittive per le applicazioni interessanti. In generale, dunque, in ipotesi di esistenza ed unicità locale la soluzione di un $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$ sarà definita solo in un intorno del tempo iniziale t_0. Tuttavia, in virtù dell'unicità, appare naturale procedere per prolungamenti successivi di una soluzione. Ciò lascia intuire che dovrà esistere un qualche intervallo massimo di definizione della soluzione (un po' come si è già fatto nella dimostrazione del corollario 2.4.5). In tal senso introduciamo la

Definizione 2.6.1 (soluzione massimale). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continua. Una soluzione $\varphi : I \longrightarrow X$ di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$ si dice* **massimale** *se non esiste $\psi : J \supsetneq I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$.*

In altre parole, una soluzione massimale è una soluzione che non si può ulteriormente prolungare. Naturalmente ne parliamo perché vale il

Teorema 2.6.2. *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, D aperto, soddisfacente le ipotesi del teorema 2.5.2 di esistenza ed unicità locale. Allora per ogni $(t_0, y_0) \in D$ esiste ed è unica una soluzione massimale $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ del $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$. Per tale soluzione l'intervallo di definizione è necessariamente aperto, cioè $I =]\alpha, \beta[$ con $-\infty \leqslant \alpha < t_0 < \beta \leqslant +\infty$).*

Dim. — **Esistenza :** Prendiamo tutte le possibili soluzioni $(\varphi_\lambda, I_\lambda)$ dove I_λ è l'intervallo di definizione di φ_λ, $t_0 \in \mathrm{Int}(I_\lambda)$. Poniamo:

$$I := \bigcup_\lambda I_\lambda, \quad \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \varphi(t) := \varphi_\lambda(t), \text{ se } t \in I_\lambda.$$

La definizione è ben posta perché se $t \in I_\mu$ allora, essendo $\varphi_\lambda = \varphi_\mu$ su $I_\lambda \cap I_\mu$ ne segue che $\varphi_\lambda(t) = \varphi_\mu(t)$. Inoltre, coincidendo φ localmente con φ_λ continua e derivabile sarà anch'essa continua e derivabile. Infine è soluzione su I perché lo è su ogni I_λ. Morale: φ risolve $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$. Vediamo che è massimale: se $\psi : J \longrightarrow X$ è soluzione allora, per definizione di I e φ, si ha subito che $J \subset \bigcup_\lambda I_\lambda = I$ e $\psi = \varphi$ su J.
Unicità: Se $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ e $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ fossero soluzioni massimali di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$, allora per definizione di soluzione massimale si avrebbe che $I = J$ e $\varphi(t_0) = x_0 = \psi(t_0)$. Ma allora, per l'unicità, $\varphi \equiv \psi$.
Apertura dell'intervallo massimale: Se infatti fosse, per esempio, $\varphi : [\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ soluzione massimale, allora $(\alpha, \varphi(\alpha)) \in D$ (perché soluzione). In virtù dell'esistenza ed unicità locale, esisterebbe J contenente α al proprio interno ed una $\psi : J \longrightarrow X$ soluzione di $\mathsf{PC}(\alpha, \varphi(\alpha))$. Chiaramente allora $J \cup I \supsetneq I$ e se definiamo

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in I, \\ \psi(t), & t \in J, \end{cases}$$

è immediato verificare che Φ è soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$ ed estende φ, che dunque non sarebbe massimale. ■

Com'è naturale attendersi, una soluzione massimale non potrà "arrestarsi" dentro al dominio di esistenza ed unicità. Ci sono molti modi di affermare ciò, il più semplice dei quali è il

Teorema 2.6.3 (fuga dai compatti). *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soddisfacente ipotesi di esistenza ed unicità locale su D aperto. Sia poi $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow X$ una soluzione massimale. Allora:*

$$\forall K \Subset D, \quad \exists \alpha < \sigma < \tau < \beta, \; : \; (t, \varphi(t)) \notin K, \; \forall\, t < \sigma, \; t > \tau.$$

Osservazione 2.6.4. *In altre parole, il grafico di una soluzione massimale deve uscire (nel "passato" e nel "futuro" rispetto a t_0) da ogni compatto K contenuto nel dominio D di esistenza e unicità in piccolo.* ■

Dim. — Per assurdo: supponiamo che la tesi sia falsa e che, per esempio, il grafico della soluzione non esca da K nel futuro. Ciò equivale ad affermare che

$$\forall \tau \in]t_0, \beta[, \; \exists t_\tau \in]\tau, \beta[\; : \; (t_\tau, \varphi(t_\tau)) \in K$$

Prendendo $\tau = \beta - \frac{1}{n}$ per n sufficientemente grande di modo tale che $\beta - \frac{1}{n} > \alpha$ otteniamo un $t_n \in]\beta - \frac{1}{n}, \beta[$ tale che $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$ per ogni $n \geqslant n_0$. Essendo K compatto e sapendo che $t_n \longrightarrow \beta$ a meno di estrazioni si avrà che

$$(t_n, \varphi(t_n)) \longrightarrow (\beta, \ell).$$

In particolare, essendo K chiuso, $(\beta, \overset{\ell}{\cancel{y_0}}) \in K \subset D$. Ricordiamo ora la conclusione del teorema di esistenza ed unicità in piccolo:

$$\exists U_{(\beta,\ell)}, \; \exists T = T(\beta, \ell) > 0, \; : \; \forall (s_0, z_0) \in U_{(\beta,\ell)}, \text{ la soluzione di } \mathsf{PC}(t_0, y_0) \text{ è definita su } [s_0 - T, s_0 + T].$$

Sia allora $N \geqslant n_0$ tale che

$$(t_N, \varphi(t_N)) \in U_{(\beta,\ell)} \quad \text{e} \quad \beta - t_N < T.$$

Chiaramente tale scelta è possibile visto che $t_n \longrightarrow \beta$. Sia poi ψ la soluzione di $\mathsf{PC}(t_N, \varphi(t_N))$ su $[t_N - T, t_N + T]$. Osservato che $t_N + T > \beta$ mostriamo che possiamo costruire una soluzione di $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$ che è definita fino a $t_N + T$, da cui una contraddizione perché allora φ non sarebbe più massimale (perché estendibile). Per costruire questo prolungamento incolliamo φ con ψ definendo

$$\tilde{\varphi} :]\alpha, t_N + T[\longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in]\alpha, t_N], \\ \\ \psi(t), & t \in [t_N, t_N + T], \end{cases}$$

Notiamo che essendo

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ soluzione di } \mathsf{PC}(t_N, \varphi(t_N)) \text{ su }]\alpha, \beta[, \\ \\ \psi \text{ soluzione di } \mathsf{PC}(t_N, \varphi(t_N)) \text{ su } [t_N - T, t_N + T], \end{array}\right. \quad \overset{\text{unicità}}{\Longrightarrow} \quad \varphi \equiv \psi \text{ su }]\alpha, \beta[\cap]t_N - T, t_N + T[$$

Questo significa che il raccordo tra φ e ψ nel punto t_N è garantito come quello di una funzione regolare (in altre parole: in un intorno di t_N, φ e ψ sono la stessa cosa). Inoltre $\tilde{\varphi}$ risolve il $\mathsf{PC}(t_0, y_0)$, da cui la contraddizione essendo $]\alpha, t_N + T] \supsetneqq]\alpha, \beta[$. ∎

Dal teorema della fuga dai compatti scende abbastanza facilmente il seguente

Corollario 2.6.5 (criterio di esplosione). *Sia $F : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo soddisfacente le ipotesi del teorema 2.5.2 di esistenza e unicità locale. Sia poi φ soluzione massimale su $]\alpha, \beta[$ di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$. Allora*

$$\text{se} \quad \beta < \sup I, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \beta-} \|\varphi(t)\| = +\infty. \tag{2.6.1}$$

Lo stesso vale per $t \longrightarrow \alpha+$ se $\alpha > \inf I$.

Dim. — Supponiamo per assurdo che la soluzione non esploda: allora deve esistere una costante M ed una successione $(t_n) \subset]\alpha, \beta[$ tale che

$$t_n \nearrow \beta, \quad \|\varphi(t_n)\| \leqslant R, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siccome $\beta < \sup I$ ne segue che $K := [t_0, \beta] \times B(0, R+1]$ è un compatto contenuto in $D = I \times \mathbb{R}^d$. Deve dunque esistere un $\tau < \beta$ tale che $(t, \varphi(t)) \notin K$ per ogni $t > \tau$. Ma $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$ per ogni n e per n sufficientemente grande e $t_n \longrightarrow \beta$ e dunque è definitivamente maggiore di τ, per cui dovrebbe aversi che $(t_n, \varphi(t_n)) \notin K$: assurdo! ∎

* orale →

Esercizio 2.6.6. *Sia $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soddisfacente ipotesi di esistenza ed unicità locale su D aperto. Sia poi $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ una soluzione massimale. Mostrare che*

$$\lim_{t \to \alpha+, \beta-} \operatorname{dist}\Big((t, \varphi(t)), \partial D\Big) = 0,$$

dove ∂D è la frontiera di D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. (sugg.: considerare gli insiemi $K_n := \{(t, x) \in D \; : \; (t, x) \in [-n, n] \times B(0, n], \ \operatorname{dist}((t, x), \partial D) \geqslant \frac{1}{n}\} \ldots$) ∎

2.7 Crescita sub–lineare

Consideriamo il seguente problema di Cauchy (scalare)

$$\begin{cases} y' = \sin(y^2), \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Nelle solite notazioni si ha $F(t,y) = \sin(y^2)$, da cui $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. È dunque soddisfatta la condizione particolare del criterio 2.5.4 ma non la (2.4.6) essendo $\partial_y F(t,y) = 2y\cos(y^2)$. Sia $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una soluzione massimale. Stando al criterio di esplosione (in questo caso $I = \mathbb{R}$), se $\beta < +\infty$ allora

$$\lim_{t \to \beta-} |\varphi(t)| = +\infty.$$

D'altra parte in questo caso

$$|\varphi'(t)| = |\sin(\varphi(t)^2)| \leqslant 1,$$

per cui chiaramente φ non può esplodere in un tempo finito. Il seguente teorema estende in generale questa situazione:

Teorema 2.7.1 (crescita sub–lineare). *Sia $F : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soddisfacente le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità in piccolo 2.5.2, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Supponiamo che esistano $a, b \in C(I)$ tali che*

$$|F(t,y)| \leqslant a(t) + b(t)|y|, \quad \forall t \in I,\ y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.7.1}$$

Allora l'intervallo di definizione di una soluzione massimale è I.
Dim. — Sia $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ soluzione massimale di $\mathsf{PC}(t_0, x_0)$. Mostriamo che non può valere il criterio di esplosione (2.6.1). A tal fine sia $t > t_0$ ed osserviamo che, dalla (2.4.1) e applicando la (2.7.1) abbiamo

$$|\varphi(t)| = \left| y_0 + \int_{t_0}^t F(s,\varphi(s))\, ds \right| \leqslant |y_0| + \int_{t_0}^t |F(s,\varphi(s))|\, ds \leqslant |y_0| + \int_{t_0}^t a(s) + b(s)|\varphi(s)|\, ds.$$

Il passo chiave è la seguente fondamentale disuguaglianza:

Lemma 2.7.2 (disuguaglianza di Gronwall). *Siano $\lambda : [\tau, \sigma] \longrightarrow [0, +\infty[$ continua, $\alpha, \beta : [\tau, \sigma] \longrightarrow [0, +\infty[$ continue e tali che*

$$\lambda(t) \leqslant \alpha(t) + \int_\tau^t \beta(s)\lambda(s)\, ds, \quad \forall t \in [\tau, \sigma].$$

Allora si ha che

$$\lambda(t) \leqslant \alpha(t) + e^{\int_\tau^t \beta(s)\, ds} \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s \beta(r)\, dr} \alpha(s)\beta(s)\, ds, \quad \forall t \in [\tau, \sigma]. \tag{2.7.2}$$

In particolare, se $\alpha, \beta > 0$ sono costanti allora $\lambda(t) \leqslant \alpha e^{\beta(t-\tau)}$ per ogni $t \in [\tau, \sigma]$.
Dim. Lemma — Sia

$$\Lambda(t) := \int_\tau^t \beta(s)\lambda(s)\, ds.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\Lambda'(t) = \beta(t)\lambda(t) \leqslant \beta(t)\Big(\alpha(t) + \Lambda(t)\Big), \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda'(t) - \beta(t)\Lambda(t) \leqslant \alpha(t)\beta(t).$$

Ma allora, ricordato che sempre per il teorema fondamentale del calcolo, $\left(\int_\tau^t \beta(s)\, ds\right)' = \beta(t)$,

$$\left(e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\Lambda(t)\right)' = e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\Lambda'(t) - e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\beta(t)\Lambda(t) = e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\left(\Lambda'(t) - \beta(t)\Lambda(t)\right) \leqslant e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\alpha(t)\beta(t).$$

Integrando questa disuguaglianza su $[\tau, t]$ si ottiene

$$e^{-\int_\tau^t \beta(s)\, ds}\Lambda(t) - e^{-\int_\tau^\tau \beta(s)\, ds}\Lambda(\tau) \leqslant \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s \beta(r)\, dr}\alpha(s)\beta(s)\, ds,$$

da cui, infine

$$\Lambda(t) \leqslant e^{\int_\tau^t \beta(s)\, ds} \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s \beta(r)\, dr}\alpha(s)\beta(s)\, ds.$$

Per concludere basta osservare che, essendo $\lambda(t) \leqslant \alpha(t) + \Lambda(t)$ otteniamo

$$\lambda(t) \leqslant \alpha(t) + e^{\int_\tau^t \beta(s)\, ds} \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s \beta(r)\, dr} \alpha(s)\beta(s)\, ds.$$

Se poi α e β sono costanti allora

$$\lambda(t) \leqslant \alpha \left(1 + e^{\beta(t-\tau)} \int_\tau^t \beta e^{-\beta(s-\tau)}\, ds\right) = \alpha \left(1 + \int_\tau^t \beta e^{\beta(t-s)}\, ds\right) = \alpha \left(1 - \left[e^{\beta(t-s)}\right]_{s=\tau}^{s=t}\right) = \alpha e^{\beta(t-\tau)}. \quad \blacksquare$$

Applichiamo la disuguaglianza di Gronwall (2.7.2) con $\tau := t_0$, $\lambda(t) := |\varphi(t)|$, $\alpha(t) := |x_0| + \int_\tau^t a(s)\, ds$ e $\beta(t) := b(t)$. Otteniamo

$$|\varphi(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^t a(s)\, ds + e^{\int_{t_0}^t b(s)\, ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s b(r)\, dr} a(s)b(s)\, ds, \quad \forall t \in [t_0, \beta[.$$

Mostriamo che necessariamente $\beta = \sup I$: se infatti fosse $\beta < \sup I$ allora, per il criterio di esplosione 2.6.5 si deve avere $\lim_{t\to\beta-} |\varphi(t)| = +\infty$. D'altra parte, siccome $\beta < \sup I$ necessariamente β è finito ed inoltre, essendo $a, b \in C(I)$ possiamo correttamente scrivere

$$|\varphi(\beta-)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^\beta a(s)\, ds + e^{\int_{t_0}^\beta b(s)\, ds} \int_{t_0}^\beta e^{-\int_{t_0}^s b(r)\, dr} a(s)b(s)\, ds < +\infty,$$

che è evidentemente una contraddizione. $\blacksquare$

2.8 Applicazioni allo studio qualitativo

In questa sezione illustriamo con alcuni esempi il problema dello studio qualitativo delle soluzioni di un'EDO del primo ordine scalare. Essenzialmente l'obiettivo è sempre quello di stabilire il maggior numero possibile di informazioni sulle soluzioni, eventualmente tracciandone un grafico qualitativo.

In aggiunta a quanto abbiamo visto in precedenza aggiungiamo ancora la seguente osservazione. Supponiamo che una per soluzione massimale $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ uno (o entrambi) tra gli estremi α e β sia infinito. La soluzione in tal caso potrebbe ammettere limite finito. La seguente proposizione di carattere generale è spesso utile per la determinazione del valore di tale limite:

Proposizione 2.8.1 (teorema dell'asintoto). *Sia $\varphi \in C^1([a, +\infty[; \mathbb{R})$ tale che esista $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) =: \ell \in \mathbb{R}$ e esista anche $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) =: \ell' \in \mathbb{R}$. Allora $\ell' = 0$.*

Dim. — Basta osservare che, per il teorema di Lagrange,

$$\forall t > \alpha, \quad \exists \xi_t \in]t, t+1[, \quad : \quad \varphi(t+1) - \varphi(t) = \varphi'(\xi_t).$$

Facendo tendere t a $+\infty$ si ottiene $\ell - \ell = \lim_{t\to+\infty} \varphi'(\xi_t) = \lim_{s\to+\infty} \varphi'(s) = \ell'$ da cui la conclusione. $\blacksquare$

Esempio 2.8.2. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

dispari

Dopo aver stabilito se vale esistenza e unicità globale o locale (i), sia $\varphi : I =]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale. Mostrare che $\varphi \nearrow$ (ii), che $x = 0$ è punto di flesso per φ (iii), che φ è ~~pari~~ e che $\alpha = -\beta$ (iv). Infine: mostrare che $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ e determinare una formula per α e β stabilendo anche se siano finiti od infiniti (v). Con le informazioni ottenute tracciare un grafico della soluzione (vi).

Sol. — **i)** Premettiamo, anzitutto, alcune considerazioni preliminari. L'equazione è scalare del primo ordine, $y'(t) = f(t, y(t))$ con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita attraverso $f(t, y) = e^{y^2}$. Da ció si vede che f è continua e $\partial_y f(t, y) = 2ye^{y^2}$, da cui, essendo $\partial_y f$ continua, si deduce che f è localmente lipschitziana in y, uniformemente in t su tutto il proprio dominio. Vale, dunque, esistenza ed unicità locale. L'espressione della derivata $\partial_y f$ mostra anche che essa non è limitata su alcuna striscia $[a, b] \times \mathbb{R}$, quindi non valgono le ipotesi per assicurare l'esistenza ed unicità globale.
ii) Se φ è una soluzione dell'equazione, allora essendo $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2}$ risulta che $\varphi'(t) > 0$ $\forall t$ ove definita: quindi le soluzioni sono sempre strettamente crescenti.
iii) Andiamo a mostrare che $\exists \varphi''(0) = 0$ e che la derivata seconda cambia di segno in $x = 0$. L'esistenza si basa su un argomento "retroattivo" (valido in generale). Se φ è soluzione, allora $\varphi \in C^1$, quindi (per composizione),

$$t \longmapsto e^{\varphi(t)^2} \in C^1.$$

Ma $\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2}$, per cui $\varphi' \in C^1$, che vuol dire $\varphi \in C^2$. Notiamo, per inciso, che iterando il ragionamento, si mostra che $\varphi \in C^\infty$. Tornando a $\varphi''(t)$ abbiamo che, dalla regola della catena

$$\varphi''(t) = (\varphi'(t))' = \left(e^{\varphi(t)^2}\right)' = e^{\varphi'(t)^2} 2\varphi(t)\varphi'(t),$$

da cui si vede che

$$\varphi''(0) = 2e^{\varphi(0)^2}\varphi(0)\varphi'(0) = 2e^0 \cdot 0 \cdot 1 = 0, \quad \text{e} \quad \varphi''(t) > 0, \iff \varphi(t) > 0.$$

Poiché $\varphi \nearrow$ (punto (ii)), e $\varphi(0) = 0$ (condizione iniziale), avremo che

$$\varphi(t) > 0 \iff t > 0.$$

Quindi è provato che $t = 0$ è punto di flesso per φ.
iv) Dobbiamo mostrare che $\varphi(-t) = -\varphi(t)$, ovvero che $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, e che l'intervallo di definizione è simmetrico (cioé che $\alpha = -\beta$). Prendiamo la funzione

$$\psi : J :=]-\beta, -\alpha[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) := -\psi(-t).$$

Dire che φ è dispari equivale a dire che $\varphi \equiv \psi$. Mostreremo questa identità provando che ψ è soluzione ed applicando la proprietà di unicità. Infatti:

$$\psi'(t) = (-\varphi(-t))' = \varphi'(-t) = e^{\varphi(-t)^2} = e^{(-\varphi(-t))^2} = e^{\psi(t)^2},$$

quindi ψ è soluzione. Poiché inoltre $\psi(0) = -\varphi(-0) = -\varphi(0) = 0$, segue che ψ è soluzione di (PC) su $]-\beta, -\alpha[$. Per unicità, essendo φ e ψ soluzioni dello stesso (PC), devono coincidere dove entrambe definite (come segue dal teorema di esistenza ed unicità locale). Quindi, se $I :=]\alpha, \beta[$,

$$\varphi \equiv \psi, \quad \text{su } I \cap J.$$

Inoltre, se $\alpha \neq -\beta$, allora gli intervalli I e J sono asimmetrici, per cui se

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in I, \\ \psi(t), & t \in J, \end{cases}$$

è soluzione di (PC) su $I \cup J$ (quanto visto sopra assicura che la definizione di φ sia univoca per ogni t). Se $I \neq J$ allora φ è soluzione di (PC) su $I \cup J$ che è strettamente più grande di I; ma ció è impossibile visto che φ è soluzione massimale. Quindi $I = J$ e $\varphi = \psi$ su I, cioè φ è dispari.
v) Sia $\varphi :]-\beta, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione massimale. Analizziamo il comportamento della soluzione per $t \uparrow \beta$. Poiché $\varphi \nearrow$

$$\exists \varphi(\beta-) = \lim_{t \to \beta-} \varphi(t),$$

convenendo che se $\beta = +\infty$ allora il limite sarebbe $\lim_{t \to +\infty}$. Abbiamo solamente le seguenti possibilità:

a) $\beta < +\infty$ e $\varphi(\beta-) \in \mathbb{R}$;

b) $\beta = +\infty$ e $\varphi(\beta-) \in \mathbb{R}$ (caso dell'asintoto orizzontale);

c) $\beta < +\infty$ e $\varphi(\beta-) = +\infty$ (caso dell'asintoto verticale);

e) $\beta = +\infty$ e $\varphi(\beta-) = +\infty$.

Come s'intuisce, il primo caso non si verificherà a causa della fuga dai compatti. Vediamo il ragionamento preciso. Nel caso a), sapendo che $\varphi \nearrow$ avremo che

$$0 = \varphi(0) < \varphi(t) < \varphi(\beta-), \quad \forall t \in [0, \beta[, \tag{2.8.1}$$

ovvero

$$(t, \varphi(t)) \in [0, \beta[\times[\varphi(0), \varphi(\beta-)[\subset [0, \beta] \times [\varphi(0), \varphi(\beta-)] =: K.$$

Nel caso a), $K \subset\subset \mathbb{R}^2$: per il teorema della fuga dai compatti deve esistere un $\sigma \in]\alpha, \beta[$ tale che

$$(t, \varphi(t)) \in K^c, \quad \forall t : \sigma < t < \beta.$$

Se $t > 0$ e $t > \sigma$ (per tutti i t "vicini" a β ció è vero), posto che $t \in [0, \beta[$, il punto $(t, \varphi(t))$ non appartiene a K se e solo se $\varphi(t) \in [\varphi(0), \varphi(\beta-)]^c$: quindi o $\varphi(t) < \varphi(0)$ (che è assurdo per la (2.8.1)) oppure $\varphi(t) > \varphi(\beta-)$ (che è nuovamente assurdo per la (2.8.1), perché al massimo $\varphi(t) \leqslant \varphi(\beta-)$ dalla stessa). Quindi il caso a) non si può presentare. Vediamo ora il caso b). In questo caso φ avrebbe un asintoto orizzontale. Se $\varphi(+\infty) =: \ell$, allora, per l'equazione,

$$\varphi'(t) = e^{\varphi(t)^2} \longrightarrow e^{\ell^2},$$

e quindi $\exists\, \varphi'(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} \varphi'(t)$. Ma allora, per il criterio dell'asintoto, deve aversi $\varphi'(+\infty) = 0$, da cui si deduce

$$0 = e^{\ell^2},$$

che è evidentemente impossibile. Restano le alternative c) e d): **in ogni caso** $\varphi(\beta-) = +\infty$. Per stabilire se $\beta < +\infty$

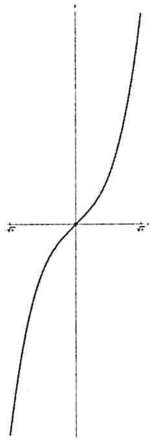


Figura 2.3: Grafico della soluzione.

o meno, ci viene d'aiuto il metodo di separazione delle variabili (che in questo caso non è applicabile per determinare la soluzione, essendo l'integrale non calcolabile): essendo $\varphi \nearrow$

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{e^{\xi^2}}\, d\xi = t - 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^{\varphi(t)} e^{-\xi^2}\, d\xi = t.$$

Facendo tendere $t \to \beta-$, e tenuto conto che $\varphi(t) \to +\infty$, avremo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \beta.$$

Ora, essendo la quantità a sinistra (l'integrale cioè) finita, dovrà esserlo anche quella a destra: pertanto $\beta < +\infty$, la soluzione massimale ha un asintoto verticale in β e

$$\beta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi \overset{\eta=\frac{\xi}{\sqrt{2}}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\eta^2}\sqrt{2}\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}. \blacksquare$$

Esempio 2.8.3. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\tan y(t)}{1+y(t)^2}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

$$\left(\varphi(t) = -y(t) \quad \varphi'(t) = -y'(t) = -\frac{\tan y(t)}{1+y(t)^2} = \frac{\tan(-y(t))}{1+(-y(t))^2} = \frac{\tan\varphi}{1+\varphi^2} \right.$$

sul dominio $D =]-\infty,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *con* $y_0 \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

i) Mostrare che vale esistenza ed unicità locale e determinare, se esistono, soluzioni costanti.

ii) Determinare le regioni di D *nelle quali le soluzioni sono crescenti e quelle nelle quali sono decrescenti.*

Sia ora $\varphi :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ *soluzione massimale con* $y_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

iii) Mostrare che φ *è monotona.*

iv) Dedurre, dal punto precedente, che $\alpha = -\infty$ *e calcolare* $\varphi(-\infty)$ *e che* $\beta < +\infty$.

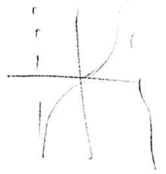
v) Mostrare che $\varphi \in C^2$ *e determinare la concavità di* φ. *Dedurre una stima di* β.

Sol. — **i)** Abbiamo che $f(t,y) = \frac{\tan y}{1+y^2}$ che è definita su $]-\infty,+\infty[\times\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il dominio D proposto è contenuto nel dominio naturale di f ed, inoltre, $f \in C^1(D)$. In particolare, quindi, $\partial_y f \in C(D)$, vale pertanto esistenza ed unicità locale dei (PC) proposti. Non essendo nelle condizioni di poter verificare le ipotesi dei teoremi di esistenza ed unicità globale, non possiamo dire niente, al momento, su questo problema. Determiniamo ora le eventuali soluzioni costanti. Una soluzione costante è una funzione φ costante soluzione su D di (PC). Se $\varphi \equiv C$, si deve avere anzitutto che $C \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (perché $(t,\varphi(t))$ deve $\in D$) e imponendo che sia soluzione abbiamo

$$0 = \varphi'(t) = \frac{\tan\varphi(t)}{1+\varphi(t)^2} = \frac{\tan C}{1+C^2}, \iff \tan C = 0, \iff C = 0,$$

visto che $C \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Quindi: **se $\varphi \equiv C$ è soluzione allora $C = 0$.** È facile verificare che $\varphi(t) := 0$ è effettivamente soluzione (verifica diretta): quindi l'unica soluzione costante è la funzione identicamente nulla.

ii) Sia φ una soluzione. Poiché $\varphi \nearrow$ strettamente se $\varphi'(t) > 0$, essendo



$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)),$$

si tratta di determinare gli insiemi

$$E_{\nearrow} := \{(t,y) \in D : f(t,y) > 0\}, \quad E_{\searrow} := \{(t,y) \in D : f(t,y) < 0\}.$$

Abbiamo che

$$f(t,y) > 0, \iff \frac{\tan y}{1+y^2} > 0, \iff \tan y > 0, \iff y \in \cancel{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \quad y \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Quindi:

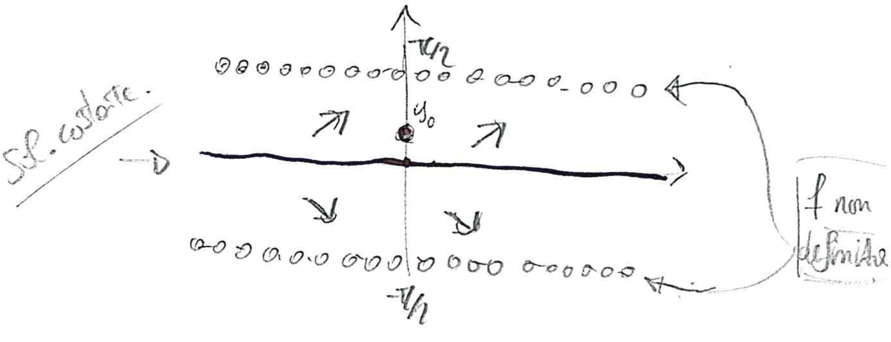
$$E_{\nearrow} = \left\{(t,y) : t \in \mathbb{R},\ y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right\}.$$

Similmente si ricava $E_{\searrow}$.

iii) Notiamo che $(0,\varphi(0)) = (0,y_0) \in E_{\nearrow}$, quindi sicuramente la soluzione è crescente in un intorno di $t = 0$. Mostriamo che $(t,\varphi(t)) \in E_{\nearrow}$ per ogni $t \in]\alpha,\beta[$, così che ne seguirà che $\varphi \nearrow$. Per come è fatto $E_{\nearrow}$ bisogna provare che

$$0 < \varphi(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in]\alpha,\beta[.$$

Supponiamo, per assurdo, che $\exists \hat{t} \in]\alpha,\beta[$ tale che $\varphi(\hat{t}) \leqslant 0$. Allora o $\varphi(\hat{t}) = 0$ o $\varphi(\hat{t}) < 0$. Nel secondo caso, essendo φ continua (è soluzione) e $\varphi(0) = y_0 > 0$, per il teorema degli zeri deve esistere $\bar{t} \in]\alpha,\beta[$ tale che $\varphi(\bar{t}) = 0$. **In ogni**



caso: esiste $\bar{t} \in]\alpha, \beta[$ tale che $\varphi(\bar{t}) = 0$. Ma allora $\varphi \equiv 0$ su $]\alpha, \beta[$ per l'unicità essendo la funzione costantemente nulla una soluzione (ved. punto i)). Questo è impossibile perché $\varphi(0) = y_0 > 0$. Quindi è provato che

$$\varphi(t) > 0, \quad \forall t \in]\alpha, \beta[.$$

Poiché, inoltre, $(t, \varphi(t)) \in D$, ne segue che, comunque,

$$\varphi(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in]\alpha, \beta[.$$

Quindi la tesi è dimostrata e $\varphi \nearrow$.

iv) Cominciamo col mostrare che $\alpha = -\infty$. Osserviamo che, essendo $\varphi \nearrow$,

$$\exists \lim_{t \to \alpha+} \varphi(t) = \ell,$$

convenendo che se $\alpha = -\infty$ allora $\alpha+ = -\infty$. Inoltre: poiché nel punto precedente si è provato che

$$\varphi(t) > 0, \quad \forall t \in]\alpha, \beta[, \quad \Longrightarrow \quad \ell \geqslant 0.$$

Allora

$$0 \leqslant \ell \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = y_0, \quad \forall t \in]\alpha, 0],$$

ovvero, in termini di grafico,

$$(t, \varphi(t)) \in]\alpha, 0] \times [0, y_0], \quad \forall t \in]\alpha, 0].$$

Se, per assurdo, $\alpha > -\infty$, allora

$$(t, \varphi(t)) \in [\alpha, 0] \times [0, y_0] =: K \subset\subset D, \quad \forall t \in]\alpha, 0],$$

e questo produce una contraddizione col teorema della fuga dai compatti. Infatti: dovrebbe esistere $\tau \in]\alpha, \beta[$ (che possiamo assumere negativo) tale che

$$(t, \varphi(t)) \in K^c, \quad \forall \alpha < t < \tau < 0.$$

Ma, tenendo conto di come è fatto K, questo è possibile se e solo se $\varphi(t) \notin [0, y_0]$, cioé se e solo se $\varphi(t) < 0$ oppure $\varphi(t) > y_0$ per ogni $\alpha < t < \tau < 0$: ma questo, per le proprietà viste sopra, è impossibile. Dunque $\alpha = -\infty$. Per il calcolo di $\varphi(-\infty) = \ell$, notiamo che

$$\varphi'(t) = \frac{\tan \varphi(t)}{1 + \varphi(t)^2} \longrightarrow \frac{\tan \ell}{1 + \ell^2}, \; t \longrightarrow -\infty,$$

per cui, per il criterio dell'asintoto, deve essere

$$\frac{\tan \ell}{1 + \ell^2} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \tan \ell = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = 0,$$

visto che $0 \leqslant \ell \leqslant y_0 < \frac{\pi}{2}$. Quindi $\varphi(-\infty) = 0$.

Passiamo a β. Intuitivamente la soluzione è crescente. Il problema è se va a "sbattere" contro la frontiera di D oppure si mantiene sempre dentro D avendo, pertanto, un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo due modi diversi di ragionare. Nel prossimo punto ne vedremo un terzo.

- *Metodo qualitativo* — Supponiamo $\beta = +\infty$. Abbiamo che, essendo $\varphi \nearrow$,

  $$\exists \ell := \varphi(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) \geqslant y_0 > 0.$$

  Allora, passando al limite nell'equazione,

  $$\varphi'(t) \longrightarrow \frac{\tan \ell}{1 + \ell^2} = \tilde{\ell}.$$

  Se $\ell < \frac{\pi}{2}$, allora $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}$, per cui per il criterio dell'asintoto deve essere $\tilde{\ell} = 0$. Ma questo implica che $\ell = 0$ e questo contraddice il fatto che $\ell \geqslant y_0 > 0$. Quindi $\ell = \frac{\pi}{2}$. Ma allora

  $$\varphi'(t) \to +\infty,$$

per cui esisterà un $T_0 > 0$ tale che $\varphi'(t) \geqslant 1$, $\forall t \geqslant T_0$. Allora, integrando,

$$\int_{T_0}^{t} \varphi'(s)\, ds \geqslant \int_{T_0}^{t} 1\, ds, \iff \varphi(t) - \varphi(T_0) \geqslant t - T_0, \iff \varphi(t) \geqslant \varphi(T_0) + t - T_0, \quad \forall t \geqslant T_0.$$

Ma allora $\varphi(t) \longrightarrow +\infty$ e questo è nuovamente impossibile perché $\varphi(t) < \frac{\pi}{2}$. In conclusione: $\beta < +\infty$.

- *Metodo quantitativo* — In questo caso utilizziamo la forma dell'equazione, che è a variabili separabili (quindi questo metodo non è sempre utilizzabile, sebbene sia molto potente): poiché $\varphi(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ l'equazione equivale a

$$\frac{1 + \varphi(t)^2}{\tan \varphi(t)} \varphi'(t) = 1,$$

che, integrata sul generico intervallo $[0, t]$, con $t < \beta$, tenendo conto che $\varphi \nearrow$, produce

$$t = \int_0^t \frac{1 + \varphi(s)^2}{\tan \varphi(s)} \varphi'(s)\, ds = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{1 + \xi^2}{\tan \xi}\, d\xi.$$

L'obiettivo è ricavare ora una formula per β, passando al limite per $t \longrightarrow \beta-$. Poiché $\varphi \nearrow$ abbiamo che $\exists \varphi(\beta-) \leqslant \frac{\pi}{2}$ (perché $\varphi(t) < \frac{\pi}{2}$). Ragionando come nella prima parte del metodo precedente, non può essere $\varphi(\beta-) < \frac{\pi}{2}$, altrimenti dovrebbe essere 0, e questo è impossibile essendo $\geqslant y_0$. Dunque $\varphi(\beta-) = \frac{\pi}{2}$ ed allora

$$\beta = \int_{y_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \xi^2}{\tan \xi}\, d\xi.$$

Ora, l'integrale è ben lungi dall'essere calcolabile, però possiamo stabilire se esista finito o meno. La funzione

$$\xi \longrightarrow \frac{1 + \xi^2}{\tan \xi} = (1 + \xi^2) \frac{\cos \xi}{\sin \xi},$$

è definita e continua su tutto $[y_0, \frac{\pi}{2}]$ (essendo $y_0 > 0$), quindi l'integrale esiste finito: pertanto $\beta < +\infty$. Possiamo anche dare una stima di β. Infatti

$$\tan y_0 \leqslant \tan \xi \leqslant +\infty, \quad \xi \in [y_0, \frac{\pi}{2}[,$$

da cui

$$\beta \leqslant \frac{1}{\tan y_0} \int_{y_0}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \xi^2\, d\xi = \frac{1}{\tan y_0} \left[\xi + \frac{\xi^3}{3}\right]_{\xi = y_0}^{\xi = \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\tan y_0} \left[\frac{\pi}{2} - y_0 + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - y_0^3\right)\right]$$

v) Passiamo ora alla concavità. Abbiamo che, per composizione, $\varphi \in C^2$ e

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \frac{(\tan \varphi(t))'(1 + \varphi(t)^2) - (\tan \varphi(t))(1 + \varphi(t)^2)'}{(1 + \varphi(t)^2)^2} \\
&= \frac{(1 + (\tan \varphi(t))^2)\varphi'(t)(1 + \varphi(t)^2) - (\tan \varphi(t)) 2\varphi(t)\varphi'(t)}{(1 + \varphi(t)^2)^2} \\
&= \varphi'(t) \frac{1 + (\tan \varphi(t))^2 + \varphi(t)^2 + \varphi(t)^2(\tan \varphi(t))^2 - 2\varphi(t) \tan \varphi(t)}{(1 + \varphi(t)^2)^2} \\
&= \varphi'(t) \frac{1 + \varphi(t)^2(\tan \varphi(t))^2 + (\varphi(t) - \tan \varphi(t))^2}{(1 + \varphi(t)^2)^2}
\end{aligned}$$

espressione apparentemente molto criptica e complessa, che peró permette di stabilire che $\varphi''(t) > 0$ per ogni t, dato che

$$\varphi''(t) > 0, \iff \varphi'(t) > 0.$$

Quindi φ è convessa. Allora il grafico di φ è al di sopra della tangente al grafico in ogni punto, per cui, prendendo

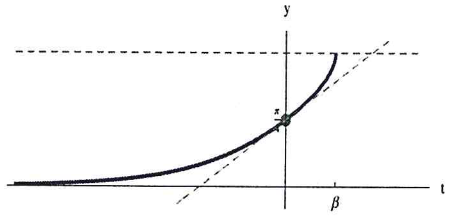


Figura 2.4: Grafico della soluzione con $y_0 = \frac{\pi}{4}$.

in particolare la tangente in $t = 0$ che ha equazione

$$y = y_0 + \varphi'(0)t = y_0 + \frac{\tan y_0}{1 + y_0^2}t,$$

essendo

$$\varphi(t) \geqslant y_0 + \frac{\tan y_0}{1 + y_0^2}t,$$

β deve sicuramente inferiore all'istante in cui la retta raggiunge la quota $\frac{\pi}{2}$ che è

$$y_0 + \frac{\tan y_0}{1 + y_0^2}t = \frac{\pi}{2}, \iff t = \left(\frac{\pi}{2} - y_0\right)\frac{1 + y_0^2}{\tan y_0}. \quad \blacksquare$$

Esempio 2.8.4. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + y(t)^2 - 1}}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

i) Dire in quali regioni del piano vale il teorema di esistenza ed unicità ed in quale forma.

ii) Determinare le regioni del piano nelle quali le soluzioni sono crescenti e quali in cui sono decrescenti. Ci sono soluzioni stazionarie?

Sia ora $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *la soluzione massimale del problema di Cauchy con* $y_0 = 0$.

iii) Mostrare che φ *è dispari;*

iv) Mostrare che è decrescente;

v) Studiare la concavità di φ*;*

vi) Mostrare che $\beta < 1$ *e fornirne una stima per eccesso di* β.

Sia ora $\varphi :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *la soluzione massimale con* $\varphi(t_0) = y_0$, $t_0 < -1$ *ed* $y_0 > 1$.

vii) Mostrare che è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Sol. — **i)** L'equazione può essere scritta nella forma

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad f(t, y) := \frac{1}{\sqrt{t^2 + y^2} - 1}.$$

Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \cup \{0_2\}))$ dove $\mathbb{S}^1$ è la circonferenza unitaria. Quindi le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale sono soddisfatte su $D := \mathbb{R}^2 \setminus \left(\mathbb{S}^1 \cup \{0_2\}\right)$. Nell'origine non possiamo controllare la lipschitzianità con le derivate essendo

$$\partial_y f = \frac{y}{\sqrt{t^2 + y^2}\left(\sqrt{t^2 + y^2} - 1\right)^2},$$

che non è definita né prolungabile per continuità in 0_2 (tuttavia è evidente che $\partial_y f$ sia limitata). In ogni caso calcoliamo a mano

$$
\begin{aligned}
f(t,\xi)-f(t,\eta) &= \frac{1}{\sqrt{t^2+\xi^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{t^2+\eta^2}-1}=\frac{\sqrt{t^2+\xi^2}-\sqrt{t^2+\eta^2}}{\left(\sqrt{t^2+\xi^2}-1\right)\left(\sqrt{t^2+\eta^2}-1\right)} \\
&= (\xi-\eta)\frac{\xi+\eta}{\left(\sqrt{t^2+\xi^2}-1\right)\left(\sqrt{t^2+\eta^2}-1\right)\left(\sqrt{t^2+\xi^2}+\sqrt{t^2+\eta^2}\right)}
\end{aligned}
$$

$(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta)$

$\leq |\xi|+|\eta|$

È ora facile mostrare che il fattore di $\xi-\eta$ è limitato in un intorno di 0_2 da cui rapidamente si conclude la locale lipschitzianità di f anche nel punto 0_2. È interessante notare che sulle strisce $[a,+\infty[\times\mathbb{R}$ e $]-\infty,-a]\times\mathbb{R}$ con $a>1$ f è a crescita sublineare essendo

$$|f(t,y)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{a^2}-1}=\frac{1}{a-1},$$

(cioè f è limitata) quindi si ha esistenza ed unicità globale per i problemi di Cauchy con $y(t_0)=y_0$ per (t_0,y_0) in tali striscie su tutta la striscia. Non è però evidente cosa succeda per il problema di Cauchy con dato iniziale in $t=0$.

ii) Sia $E_\nearrow := \{(t,y)\in D\ :\ f(t,y)>0\}$ e similmente $E_\searrow$ e $E_\leftrightarrow := \{(t,y)\in D\ :\ f(t,y)=0\}$. Abbiamo che

$$f(t,y)>0,\quad\Longleftrightarrow\quad\sqrt{t^2+y^2}>1,$$

da cui $E_\searrow = B(0_2,1[$, $E_\nearrow=\mathbb{R}^2\backslash B(0_2,1]$, $E_\leftrightarrow=\emptyset$. Le soluzioni sono crescenti fintanto che rimangono in $E_\nearrow$ e decrescenti in $E_\searrow$. Qualunque soluzione massimale φ è immediatamente monotona perché, essendo i due insiemi suddetti connessi ed essendo la soluzione una funzione continua su un intervallo, si dovrà avere $G(\varphi)\subset E_\nearrow$ oppure $G(\varphi)\subset E_\searrow$. Non ci sono invece soluzioni stazionarie poiché in tal caso esse dovrebbero avere grafico in $E_\leftrightarrow=\emptyset$.

iii) Mostriamo anzitutto che $\psi(t)=-\varphi(-t)$ è ancora soluzione:

$$\psi'(t)=(-\varphi(-t))'=\varphi'(-t)=\frac{1}{\sqrt{(-t)^2+\varphi(-t)^2}-1}=\frac{1}{\sqrt{t^2+(-\varphi(-t))^2}-1}=\frac{1}{\sqrt{t^2+\psi(t)^2}-1}.$$

Essendo $\psi(0)=-\varphi(-0)=0$. Dunque, per unicità, $\varphi=\psi$ dove entrambe definite e da questo segue, ragionando con la massimalità di ψ che $]\alpha,\beta[=]-\beta,\beta[$ e che $\varphi(t)=-\varphi(-t)$ per ogni $t\in]-\beta,\beta[$.

iv) Poiché $(0,\varphi(0))\in E_\searrow$ si avrà, per il punto ii), che $G(\varphi)\subset E_\searrow$ e dunque che $\varphi'<0$ su $]-\beta,\beta[$. Essendo questi intervallo ne segue che $\varphi\searrow$ su $]-\beta,\beta[$.

v) Chiaramente $\varphi\in C^2(]-\beta,\beta[)$. Derivando l'equazione si ottiene

$$\varphi''(t)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{t^2+\varphi(t)^2}}(2t+2\varphi(t)\varphi'(t))}{\left(\sqrt{t^2+\varphi(t)^2}-1\right)^2}=-\frac{t+\varphi(t)\varphi'(t)}{\sqrt{t^2+\varphi(t)^2}\left(\sqrt{t^2+\varphi(t)^2}-1\right)^2}.$$

Da ciò si vede che $\varphi''(t)>0$ se e solo se $t+\varphi(t)\varphi'(t)<0$. Per disparità basta studiare cosa succede su $[0,\beta[$. Abbiamo che, essendo $\varphi\searrow$ e $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)<0$ per $t>0$ e $\varphi'(t)<0$. Dunque $t+\varphi(t)\varphi'(t)>0$ per $t\in[0,\beta[$, cioè φ è concava. Sarà pertanto convessa su $]-\beta,0]$.

vi) Chiaramente $\beta<1$ (altrimenti φ dovrebbe uscire da $E_\searrow$ sicuramente). Per il punto precedente si ha che

$$\varphi(t)<\varphi(0)+\varphi'(0)t=0-1\cdot t=-t.$$

La retta $y=-t$ esce da $E_\searrow$ per t tale che $\sqrt{t^2+t^2}=1$, da cui $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\beta<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

vii) Come detto al punto i) si ha esistenza ed unicità globale sulla striscia $]-\infty,t_0]\times\mathbb{R}$. Dunque φ è almeno ~~definita~~ su $]-\infty,\beta[$ con $\beta>t_0$. Inoltre $\cancel{G(\varphi)\subset E_\nearrow}$. ~~Poiché la soluzione è~~ crescente ~~si~~ avrà che

$$G_+(\varphi):=\{(t,\varphi(t))\ :\ t\in[t_0,\beta[\}\subset\{(t,y)\ :\ t\in[t_0,\beta[,\ y\geqslant y_0>1\},$$

ok.

Allora

$$0<\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+\varphi(t)^2}-1}\leqslant\frac{1}{y_0-1},$$

$\varphi\searrow\quad\varphi'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+y^2_{(t)}-1}}$

$|H(t,y)| = \frac{1}{\sqrt{t^2+y^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$ $\quad 0 < \varphi' \leq \frac{1}{y_0-1}$

$|\varphi(t_0)-\varphi(t)| = |\varphi'(s)||t_0-t|$

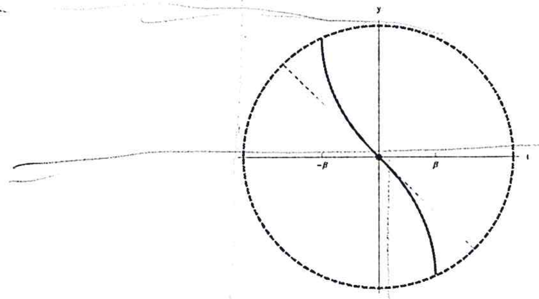


Figura 2.5: Grafico della soluzione $\mathsf{PC}(0,0)$.

da cui ne segue che φ' è limitata su $[0,\beta[$. Siccome è crescente si deve avere che $\exists\varphi(\beta-) = \lim_{t\to\beta-}\varphi(t)$. Se $\beta < +\infty$ allora, per il teorema di Lagrange

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)| = |\varphi'(s)||t-t_0| \leqslant \frac{1}{y_0-1}|\beta-t_0|,$$

ne seguirebbe che φ è limitata, e quindi $\varphi(\beta-) < +\infty$ da cui $G_+(\varphi) \subset [0,\beta]\times[y_0,\varphi(\beta-)] \Subset D$ e questo contraddirebbe la fuga dai compatti. Dunque $\beta = +\infty$. ■

2.9 Integrali primi

Gli esempi della sezione precedente riguardano tutti casi di equazioni del primo ordine scalari. Il fatto che la soluzione sia a valori reali permette di parlare di monotonia che, come si sarà notato, è stata ampiamente utilizzata negli esempi. In fondo, già l'equazione $y' = f(t,y)$ fornisce il segno di y' e quindi crescita e decrescita a seconda di dove si trovi la y nel dominio di f. Questo tipo di informazione è meno immediata nel caso dei sistemi. Anche per le equazioni di ordine superiore al primo l'informazione su y' è in genere impossibile da stabilire. Si capisce quindi che lo studio qualitativo si debba fare con minori informazioni in genere e quindi sia più difficile.

Un caso di grande rilevanza si ha quando è presente un *integrale primo*. Con tale locuzione si indica una funzione che sia costante lungo le soluzioni. L'esempio fondamentale è quello costituito dall'energia totale di un sistema meccanico conservativo. Per questo motivo consideriamo sistemi *autonomi*, cioè nei quali la funzione $F = F(t,y)$ non dipenda esplicitamente da t:

Definizione 2.9.1 (integrale primo). *Sia $F : D \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ soddisfacente le ipotesi di esistenza ed unicità locale del teorema 2.5.2* [2]. *Una funzione $H : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ si dice* **integrale primo** *se per ogni $\varphi \in C^1(I;\mathbb{R}^d)$ soluzione si ha*

$$t \longmapsto H(\varphi(t)) \quad \text{è costante.}$$

Esempio 2.9.2 (Fondamentale). *L'hamiltoniana H di un sistema hamiltoniano (2.2.4) è un integrale primo.* Infatti: se $\varphi(\cdot) = (q(\cdot),p(\cdot))$ è soluzione, allora

$$\frac{d}{dt}H(q(t),p(t)) = (\partial_q H)(q(t),p(t))\dot q(t) + (\partial_p H)(q(t),p(t))\dot p(t) = -\dot p(t)\dot q(t) + \dot q(t)\dot p(t) \equiv 0. \quad ■$$

Naturalmente non tutti i sistemi sono hamiltoniani (nella forma (2.2.4) cioè, anche perché in questo tipo di sistemi la coppia (q,p) forma un vettore di un numero pari di componenti). In generale c'è una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione H sia integrale primo:

[2]Con abuso di notazioni qui s'intende $F(t,x) = F(x)$.

$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-1}$, $y(t) = y_0 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2(t)}-1}\,dt \leq y_0 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+y_0^2}-1}\,dt$