ESERCIZIO 1

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y + 1 \\ y' = x - y \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

Soluzione:

Risolviamo col metodo di sostituzione/eliminazione (più veloce in questo caso)

$x = y + y'$

$x' = y' + y''$,

$y'(0) = x(0) - y(0) = -1$; otteniamo, inserendo nella seconda equazione,

$$\begin{cases} y' + y'' = 3y + 3y' - 5y + 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

È un'equazione lineare di ordine due a coefficienti costanti. Per risolverla dobbiamo trovare

- due soluzioni indipendenti dell'omogenea associata
- una soluzione particolare dell'equazione completa
- imporre le condizioni iniziali e risolvere il p. di Cauchy.

L'omogenea associata è

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

il p. caratteristico è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \ ;$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

Quindi due soluzioni indipendenti sono:

$$\hat{y}_1 = e^{(1+i)t} = e^t e^{it} = e^t\left(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)\right)$$

$$\hat{y}_2 = e^{(1-i)t} = e^t e^{-it} = e^t\left(\cos(-t) + i\,\mathrm{sen}(-t)\right) = e^t\left(\cos(t) - i\,\mathrm{sen}(t)\right)$$

(ricordando la f. di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta$).

Per ottenere soluzioni reali indipendenti possiamo ad esempio prendere la somma e la differenza delle due appena ottenute (magari divise per due, ma non è importante).

$$y_1 = \frac{\hat{y}_1 + \hat{y}_2}{2} = e^t \cos(t)$$

$$y_2 = \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_2}{2} = e^t \sin(t)$$

Una generica soluzione dell'eq. omogenea sarà

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha e^t \cos(t) + \beta e^t \sin(t) \quad , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ arbitrari}$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell' eq. completa

$$y'' - 2y' + 2y = 1$$

In questo caso, essendo che il termine noto è un quasi-polinomio (in realtà, è un polinomio di grado 0) e 0 non è radice del p. caratteristico dell' omogenea, si cercherà una soluzione particolare che sarà un polinomio di grado 0. Sia esso C.

Inserendolo nell' equazione: $\underset{(0)}{C''} - 2\underset{(0)}{C'} + 2C = 1$; C è costante, quindi $C = \frac{1}{2}$.

$\tilde{y} \equiv \frac{1}{2}$ è soluzione particolare. La generica soluzione dell' eq. completa sarà dunque

$$y(t) = \alpha e^t \cos(t) + \beta e^t \mathrm{sen}(t) + \frac{1}{2} .$$

Risolviamo ora il problema di Cauchy. Vogliamo quelle soluzioni y tale che $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

$$y(0) = \alpha + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}};$$

$$y'(t) = \alpha\left(e^t\cos(t) - e^t\sin(t)\right) + \beta\left(e^t\sin(t) + e^t\cos(t)\right);$$

$$y'(0) = \alpha + \beta = \frac{3}{2} + \beta = -1 \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{5}{2}}$$

La soluzione è

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(3e^t\cos(t) - 5e^t\sin(t) + 1\right)}$$

<u>Nota</u>: siccome il termine noto era un quasi-polinomio (un polinomio), sapevamo come trattarlo in modo sbrigativo. La tecnica generica, quando il t. noto è $b(t)$ non (necessariamente) quasi-polinomio, è quella della variazione delle costanti. Avremmo potuto usarla anche qui:

- sol. indipendenti dell'omogenea $\boxed{y_1 = e^t\cos(t),\ y_2 = e^t\sin(t)}$
- sol. particolare della completa $\tilde{y} = c_1(t)\,y_1(t) + c_2(t)\,y_2(t)$, dove $c_1(t) = \int \frac{-y_2(t)b(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'}dt$; $c_2(t) = \int \frac{y_1(t)b(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'}dt$. Nel nostro caso avremmo

ottenuto $(y_1y_2' - y_2y_1') = e^{2t}$; avremmo dovuto calcolare c_1 e c_2 con $b(t)=1$:

$c_1(t) = \int -\sin(t)e^{-t}dt$; $c_2(t) = \int \cos(t)e^{-t}dt$. Sono lunghi! occorrono due integrazioni per parti per ognuno! Si ha $c_1(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\cos(t)+\sin(t))$, $c_2(t) = \frac{e^{-t}}{2}(-\cos(t)+\sin(t))$ e $\boxed{y_1c_1 + y_2c_2 = \frac{1}{2}}$, quindi avremmo

ritrovato la nostra soluzione particolare, ma in <u>molto più tempo</u>. Questo metodo però è <u>necessario</u> se $b(t)$ <u>NON</u> è un quasi-polinomio □

ESERCIZIO 2

Determinare la matrice esponenziale e^{At}, con
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol. Se osserviamo la matrice, essa sembra essere "vicina" ad una matrice nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. E notiamo che sulla diagonale ha una serie di numeri uguali. In pratica possiamo scrivere
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B}, \text{ dove}$$

chiaramente $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è $4\mathbb{1}$, mentre B è nilpotente di ordine 3:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^3 = \mathbb{0} \quad (\text{oltre } B^4, B^5, \ldots = \mathbb{0})$$

Inoltre, chiaramente <u>B e $4\mathbb{1}$ commutano</u> (ogni matrice commuta con $\alpha\mathbb{1}$).

Per cui $e^{At} = e^{(4\mathbb{1}+B)t} = e^{4\mathbb{1}t}\, e^{Bt}$. ($t$ è semplicemente un coefficiente che moltiplica la matrice: $4\mathbb{1}t = \begin{pmatrix} 4t & 0 & 0 \\ 0 & 4t & 0 \\ 0 & 0 & 4t \end{pmatrix}$); Sappiamo che nel caso di matrice diagonale,
$$e^{4\mathbb{1}t} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} = e^{4t}\,\mathbb{1}. \text{ Calcoliamo } e^{Bt}$$

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Bt)^k}{k!} = \left(\mathbb{1} + Bt + \frac{B^2t^2}{2} + \overbrace{0 + \cdots}^{\text{tutti zeri}}\right) =$$

$$= \underset{(\mathbb{1})}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} + \underset{(Bt)}{\begin{pmatrix} 0 & t & 3t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{\left(\frac{B^2t^2}{2}\right)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t+t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{e^{Bt}}$$

Quindi

$$e^{At} = e^{4\mathbb{1}t} e^{Bt} = e^{4t} \cdot \mathbb{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 3t+t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & t & 3t+t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: se non si notava subito che $A = 4\mathbb{1} + B$, potevamo agire in modo standard: troviamo il p. caratteristico di A:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-4 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix} = \det(\lambda\mathbb{1} - A) = (\lambda-4)^3 = 0.$$ Per <u>Hamilton-Cayley</u>

allora $(A - 4\mathbb{1})^3 = \mathbb{0}$; quindi $(A - 4\mathbb{1})$ è nilpotente di ordine 3.

e $A - 4\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$, quella che avevamo individuato all'inizio.

Per cui $A = (A - 4\mathbb{1}) + 4\mathbb{1} = B + 4\mathbb{1}$, con B nilpotente. E si procede poi come abbiamo fatto su.

$\square$

ESERCIZIO 3

Provare che esiste la distanza minima del punto $(2,1,-1)$ al piano $x+y-z=1$. Determinarla.

Dato un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il quadrato delle sue distanze da $(2,1,-1)$ sarà

$$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}.$$

Consideriamo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ (quadrato della distanza da $(2,1,-1)$).

Il problema ci chiede di mostrare se esiste un minimo per f vincolato al piano $x+y-z=1$ $(=: \Pi)$.

Si vede che ad esempio, il minimo esiste. Fissiamo un punto $p \in \Pi$, e sia $R>0$ t.c. $R > d(p,(2,1,-1))$, e consideriamo la palla di centro p e raggio R. Si ha chiaramente che $\lim_{|(x,y,z)| \to +\infty} f(x,y,z) = +\infty$. Sia $M>0$ t.c. $M > d(p,(2,1,-1))$. Esisterà $\tilde{R}>0$ t.c. $f(x,y,z) \geq M^2$ $\forall (x,y,z) \in B(p,M)$. Prendiamo $\max(R,\tilde{R})$. Il minimo di f si troverà quindi nell'insieme

$B(p, \max(R,\tilde{R})) \cap \Pi$ (che è non vuoto, p vi appartiene), e che è compatto: chiuso poiché intersezione di chiusi (il piano Π e la palla) e limitato (contenuto all'interno di una palla).

Per cui f ammette minimo. f fuori della palla è $f \geq M^2$; all'interno della palla, $d(p,(2,1,-1)) < M$, quindi il minimo di f sarà $\leq M^2$. Quindi il minimo è globale!

Procediamo a determinarlo, ad es., col metodo dei M. di Lagrange. Il piano Π è dato dal vincolo $g(x,y,z) = x+y-z-1=0$.

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \\ 2(z+1) \end{pmatrix}.$$

Un punto $(x,y,z) \in \Pi$ è critico per f se ∇g e ∇f sono lin. dipendenti. Scriviamoli sotto forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(x-2) \\ 1 & 2(y-1) \\ -1 & 2(z+1) \end{pmatrix}.$$ Sono dipendenti sse tutti i minori di ordine due sono nulli. Ovvero:

$$\begin{cases} y-1-x+2=0 \\ z+1+y-1=0 \\ z+1+x-2=0 \end{cases} \quad \underline{e} \quad x+y-z-1=0 \quad ((x,y,z)\in\Pi),$$ da imporre sempre!

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y-x+1=0 \\ y+z=0 \\ z+x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ -z-x+1=0 \\ z+x-1=0 \end{cases} \quad e \quad x+y-z-1=0, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} y=-z \\ x+z-1=0 \\ x-2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$$; il punto $(1,0,0)$ è l'unico punto critico. Esistendo il minimo per f su Π, esso è il punto di minimo.

$f(1,0,0) = 1+1+1 = 3$, che è il quadrato delle distanze.

$\sqrt{3}$ è la minima distanza.

Nota: Il punto su Π che realizza la minima distanza da $(2,1,-1)$ può essere trovato intersecando la retta r perpendicolare a Π e passante per $(2,1,-1)$ con Π.

Se Π è dato da $x+y-z=1$, lo possiamo rappresentare, ad es., dal vettore $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Due vettori ortogonali in $\mathbb{R}^3$ a $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e tra loro ortogonali, si vede subito essere $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Quindi la generica retta perpendicolare a Π si scrive

$$\begin{cases} -x+y=a \\ x+z=b \end{cases}$$

; imponiamo il passaggio per $(2,1,-1)$; otteniamo $a=-1$, $b=1$.

La retta r passante per $(2,1,-1)$ e perpendicolare a Π è

$$\begin{cases} -x+y=-1 \\ x+z=1. \end{cases}$$

Cerchiamo l'intersezione con Π:

$$\begin{cases} -x+y+1=0 \\ x+z-1=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

; risolvendo otteniamo $\boxed{x=1,\ y=0,\ z=0.}$, quello trovato prima.

$$\boxed{d\big((1,0,0),(2,1,-1)\big)=\sqrt{3}}.$$

Π

ESERCIZIO 4

Sia $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36\}$

a) Mostrare che M è una varietà; determinare lo spazio vettoriale tangente ad M in $(x_0, y_0, z_0) \in M$

b) Provare che esiste il massimo volume dei parallelepipedi con le facce parallele ai piani coordinati e inscritto in M; determinarlo.

Soluzione:

a) M è data dagli zeri di una funzione C^∞, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y,z) = 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0.$$

$Dg = (18x, 72y, 8z)$. $Dg = 0$ solo nel punto $(0,0,0)$.

Ma $(0,0,0) \notin M$. Per cui M è varietà differenziale.

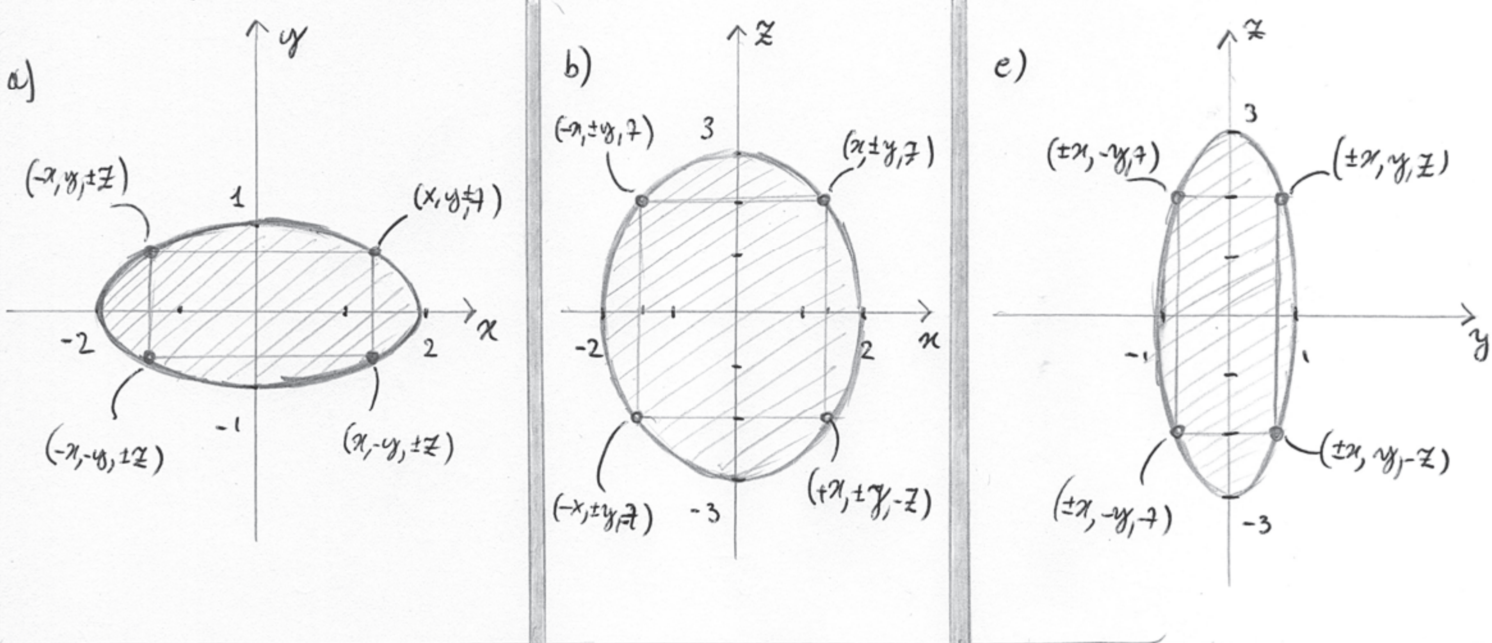
Lo spazio tangente è dato da $\ker Dg(x_0, y_0, z_0)$, ovvero $\ker(18x_0, 72y_0, 8z_0)$; lo spazio vettoriale corrispondente a $\ker Dg(x_0, y_0, z_0)$ è (x,y,z): $18x_0 x + 72y_0 y + 8z_0 z = 0$. Lo spazio tangente a M in (x_0, y_0, z_0) è $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $18x_0 x + 72y_0 y + 8z_0 z + C = 0$.

Siccome deve passare per (x_0, y_0, z_0), $C = -18x_0^2 - 72y_0^2 - 8z_0^2$.

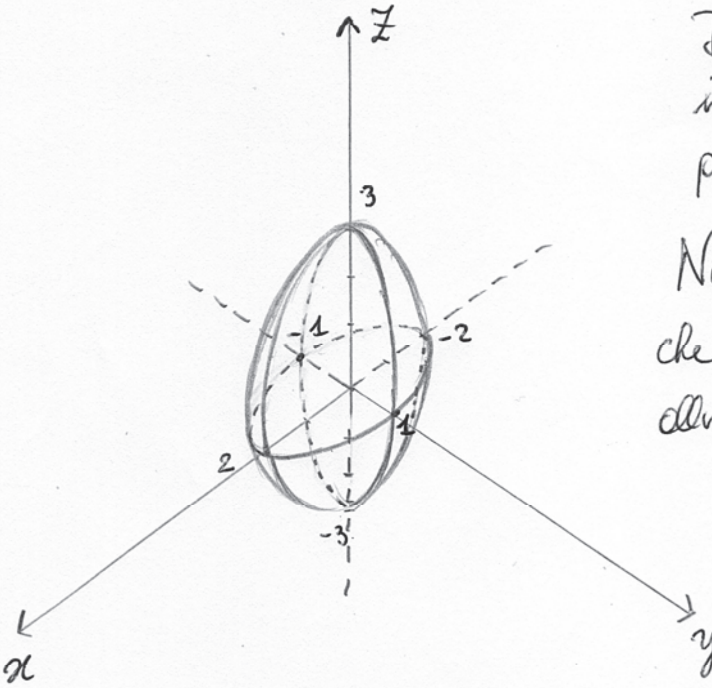
Quindi $\boxed{T_{(x_0,y_0,z_0)} M = 18x_0(x - x_0) + 72y_0(y - y_0) + 8z_0(z - z_0)}$

b) Dalla forma dell' equazione riconosciamo che M è la superficie di un' ellissoide: se consideriamo le proiezioni sugli assi coordinati (es. $9x^2+36y^2 \leq 9x^2+36y^2+4z^2=36$, e analogamente per le altre), si ha che esse sono:

a) $9x^2+36y^2 \leq 36$ (ellisse di semiassi $(-2,2)$ e $(-1,1)$)
b) $9x^2+4z^2 \leq 36$ (" " " $(-2,2)$ e $(-3,3)$)
c) $36y^2+4z^2 \leq 36$ (" " " $(-1,1)$ e $(-3,3)$). Disegnamole:



M



Dobbiamo descrivere i parallelepipedi inscritti in M con le facce parallele ai piani coordinati.

Notiamo, dalla forma dell'equazione che descrive M, che se $(x,y,z) \in M$, allora tutte le combinazioni di segni $(\pm x, \pm y, \pm z) \in M$. (poiché x, y, z sono al quadrato nell' equazione).

Sono $2^3 = 8$ possibilità.

Ricapitolando, se $(x,y,z)\in M$, allora
(x,y,z), $(-x,y,z)$
$(x,-y,z)$ $(-x,-y,z)$
$(x,-y,-z)$ $(-x,-y,-z)$
$(x,y,-z)$ $(-x,y,-z)$ $\in M$. E si nota subito che questi sono i vertici di un parallelepipedo inscritto in M, e che in più ha le facce parallele agli assi. (si vede l'esempio in figura)
(bisognerebbe mostrare che è effettivamente inscritto, ma questo discende dal fatto che il solido delimitato da M, $9x^2+36y^2+4z^2\le 36$, è convesso, e questo discende dalla convessità di x^2, y^2, z^2).

Per cui, se fissiamo un punto, ad es., nell'ottante $x>0, y>0, z>0$, e consideriamo il parallelepipedo che ha per vertici tutte le combinazioni $(\pm x, \pm y, \pm z)$ (8), esso ha lati di lunghezza $\boxed{2x,\ 2y,\ 2z}$

Pertanto il suo volume è $\boxed{8xyz}$ (prodotto dei lati).

Consideriamo allora la funzione $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 8xyz$.

Dobbiamo cercare il massimo di f su M. f è continua, M è compatto: chiuso poiché luogo degli zeri di una funzione continua; limitato, poiché dall'equazione si vede subito
$-2\le x\le 2$, $-1\le y\le 1$, $-3\le z\le 3$. Quindi esistono max/min assoluti per f su M.

Cerchiamoli col metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che descrive M è $g(x,y,z) = 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è $f(x,y,z) = 8xyz$.

$\nabla g = \begin{pmatrix} 18x \\ 72y \\ 8z \end{pmatrix}$; $\nabla f = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix}$. Vogliamo che tutti i minori di ordine due di $\begin{pmatrix} 18x & 8yz \\ 72y & 8xz \\ 8z & 8xy \end{pmatrix}$ siano nulli (e in più, che $(x,y,z) \in M$)

$$\begin{cases} z(4y^2 - x^2) = 0 \\ x(z^2 - 9y^2) = 0 \\ y(4z^2 - 9x^2) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0.$$

i casi $z=0$, o $x=0$, o $y=0$, che corrispondono a $(\pm 2, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 3)$ danno $f = 0$ (i parallelepipedi stanno "diventando dei segmenti"), cioè il volume è nullo.

Gli altri casi sono

$$\begin{cases} x = \pm 2y \\ z = \pm 3y \\ 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 36y^2 = 36, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \ x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \ z = \pm \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

a seconda della scelta dei segni $f = \frac{\pm 16}{\sqrt{3}}$, poiché noi avevamo considerato (x,y,z) arbitrari su M (per i segni).

Siccome cerchiamo di massimizzare il volume, dobbiamo prendere $|f|$, che è massimo per $(x,y,z) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$ e permutazioni dei segni. Il volume è

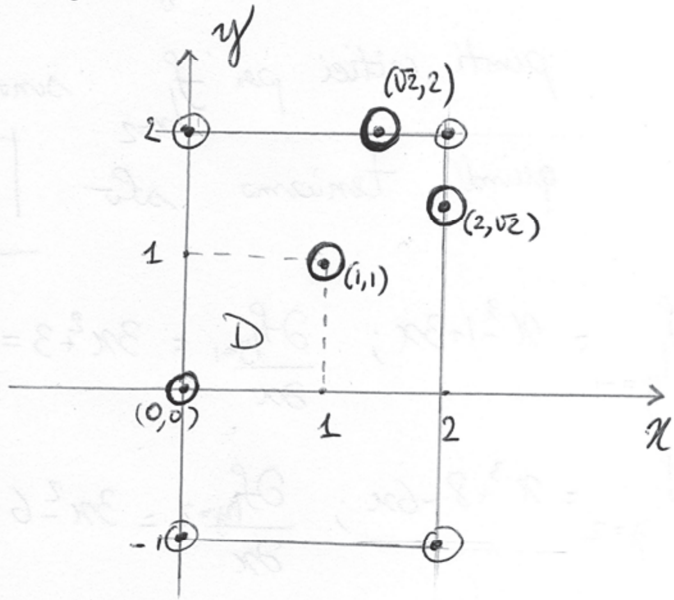
$$\boxed{\frac{16}{\sqrt{3}}}$$

□

ESERCIZIO 5

Determinare minimo e massimo assoluti di $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$

Sol. D è un rettangolo. Disegnamolo:



f è continua e D è compatto.
Essa ammette massimo e minimo assoluti su D.

Essi possono essere interni a D o sul bordo.
Innanzitutto cerchiamo tutti i punti critici di f, che possono essere punti critici INTERNI a D, o vincolati sul bordo di D.

- Punti critici interni. Studiamo il gradiente di f:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solo se } \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^4 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = 1 \end{cases} \\ y^4 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \to x = 0 \\ y = 1 \to x = 1 \end{cases} \end{matrix}$$

I punti critici per f su $\mathbb{R}^2$ sono $\boxed{(0,0)}$ e $\boxed{(1,1)}$. ~~primari~~
Entrambi sono in D.

- Punti critici sul bordo: Studiamo come si comporta f ristretta alle rette $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$. !! Ricordiamo che questo non ci dà informazioni sulle intersezioni, ovvero sui vertici. Dovremmo poi separatamente studiare il valore di f sui quattro vertici $(0,-1)$, $(2,-1)$, $(0,2)$, $(2,2)$.

• $f_{|x=0} = y^3$. Calcoliamo $\frac{\partial y^3}{\partial y} = 3y^2 = 0 \iff y=0$.

punto critico per $f_{|x=0}$ è $\boxed{(0,0)}$

• $f_{|x=2} = 8+y^3-6y$. $\frac{\partial f_{|x=2}}{\partial y} = 3y^2-6 = 0 \iff y = \pm\sqrt{2}$.

punti critici per $f_{|x=2}$ sono $(2, \pm\sqrt{2})$, il punto $(2,-\sqrt{2}) \notin D$.

quindi teniamo solo $\boxed{(2,+\sqrt{2})}$

• $f_{|y=-1} = x^3-1+3x$; $\frac{\partial f_{|y=-1}}{\partial x} = 3x^2+3=0$, non ha soluzione.

• $f_{|y=2} = x^3+8-6x$; $\frac{\partial f_{|y=2}}{\partial x} = 3x^2-6=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$; punti critici per $f_{|y=2}$

sono $(\pm\sqrt{2}, 2)$. Il punto $(-\sqrt{2},2) \notin D$. Prendiamo

solo $\boxed{(\sqrt{2},2)}$

Infine ci resta da calcolare il valore di f nei punti critici trovati e nei vertici (che dal nostro studio non possiamo dire se siano o meno massimi o minimi!). I punti critici trovati finora più i vertici sono segnati da ⊙ sul disegno. I massimi/minimi assoluti, <u>che esistono</u>, devono trovarsi fra questi

$\underbrace{f(0,0)=0 \; ; \; f(1,1)=-1}_{\text{estremi locali } (\nabla f=0)}$; $\underbrace{f(2,\sqrt{2}) = 8-4\sqrt{2} \; (\sim 2.34) \; ; \; f(\sqrt{2},2) = 8-4\sqrt{2}}_{\text{p. critici vincolati sui segmenti del bordo di D}}$;

$\underbrace{f(0,2)=8 \; ; \; f(0,-1) = -1 \; ; \; f(2,-1) = 13 \; ; \; f(2,2)=4}_{}$ ← f ai vertici.

Il minimo assoluto è -1 ed è raggiunto nei punti $(1,1)$ e $(0,-1)$
Il massimo assoluto è 13, ed è raggiunto nel punto $(2,-1)$

□

ESERCIZIO 6

Sia $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - \cos(\pi y) = 0 \, ; \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

a) Provare che M è compatto

b) Dire, giustificando la risposta, se $M \setminus (0,0,1)$ è una varietà differenziale.

c) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ su M

Sol:

a) M è chiuso: è luogo degli zeri di una funzione continua

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - \cos(\pi y) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

M è limitato: ad esempio, M è sulla superficie della palla $B(0,1)$ in $\mathbb{R}^3$, che è limitata.

per cui M è compatto.

b) $Dg = \begin{pmatrix} 0 & \pi \sin(\pi y) & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ deve avere rango massimo (2).

I punti dove Dg ha rango < 2 sono quelli per cui tutti i minori di ordine 2 si annullano. Cerchiamo questi punti e verifichiamo che non siano punti di $M \setminus (0,0,1)$.

$$\begin{cases} 2\pi x \sin(\pi y) = 0 \\ 2\pi z \sin(\pi y) - 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \pi z \sin(\pi y) - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$ è la "curva singolare",

tutti i punti su questa curva sono tali che $\mathrm{rk}\, Dg < 2$.

vediamo se essa interseca $M \setminus (0,0,1)$ in qualche punto:

$$\begin{cases} \pi z \sin(\pi y) = y \\ x = 0 \\ z - \cos(\pi y) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \begin{matrix} \} \text{ curva singolare} \\ \\ \} M \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi z \sin(\pi y) = y \\ z = \cos(\pi y) \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \cos(\pi y) \sin(\pi y) = y \\ \cos(\pi y) = z \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi^2 \cos^2(\pi y) \sin^2(\pi y) + \cos^2(\pi y) = 1$; dall'identità $\cos^2(\pi y) + \sin^2(\pi y) = 1$, otteniamo $\pi^2 \cos^2(\pi y) \sin^2(\pi y) = \sin^2(\pi y)$; le possibilità sono

- $\sin^2(\pi y) = 0$
- $\pi^2 \cos^2(\pi y) = 1$

Ricordiamo che, essendo su $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\boxed{-1 \le y \le 1}$

- $\sin^2(\pi y) = 0 \Rightarrow \sin(\pi y) = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = -1,\ y = 1$
  - nel caso $y = \pm 1$, da $z = \cos(\pi y) \Rightarrow z = -1$. i punti sono $(0, \pm 1, -1)$ ma essi non soddisfano $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, quindi non sono su M.
  - nel caso $y = 0$, da $z = \cos(\pi y) \Rightarrow z = 1$. il punto è $(0,0,1)$. Esso è su M, $\boxed{\text{ma \underline{non} è su } M \setminus (0,0,1) \text{ per definizione}}$

- $\cos^2(\pi y) = \frac{1}{\pi^2}$, da $z = \cos(\pi y) \Rightarrow z^2 = \frac{1}{\pi^2}$; y^2, da $y^2 + z^2 = 1$ è $y^2 = 1 - \frac{1}{\pi^2}$. I punti sono

$$\left(0, \pm\sqrt{1 - \tfrac{1}{\pi^2}}, \tfrac{1}{\pi}\right), \left(0, \pm\sqrt{1 - \tfrac{1}{\pi^2}}, -\tfrac{1}{\pi}\right) \quad \text{(quattro punti).}$$

Sono su M? Notiamo che $y = \pm\sqrt{\frac{\pi^2 - 1}{\pi^2}}$; nella def. di M, abbiamo $z = \cos(\pi y) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} = \cos\left(\pm\sqrt{\pi^2 - 1}\right)$; ma ciò è <u>impossibile</u>:

notiamo che :

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\pi^2-1} < \pi \text{ , per cui } \cos\left(\pm\sqrt{\pi^2-1}\right) < 0,$$

per cui non può essere $\frac{1}{\pi} = \cos\left(\pm\sqrt{\pi^2-1}\right)$;

potrebbe allora essere $\cos\left(\pm\sqrt{\pi^2-1}\right) = -\frac{1}{\pi}$?

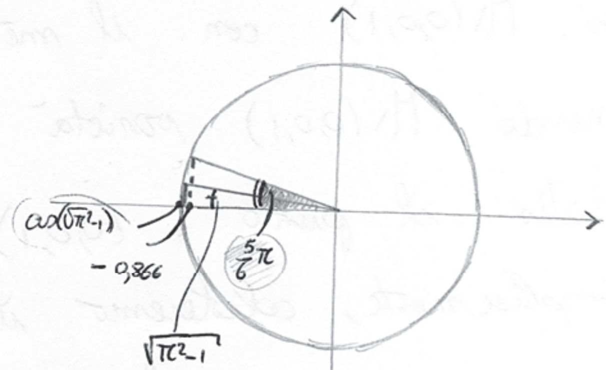
$-\frac{1}{\pi} \sim -0{,}31\ldots$ (si calcola "a mano" facendo $1/3{,}14\ldots$);

si può notare che $\frac{5\pi}{6} < \sqrt{\pi^2-1}$: $\pi^2\left(1-\frac{25}{36}\right) > 1 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{36}{11} \sim 3{,}2\ldots$

e $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866$.

Quindi $-1 < \cos\left(\sqrt{\pi^2-1}\right) < -0{,}866\ldots$

e non può essere $-\frac{1}{\pi} \sim -0{,}31\ldots$



per cui neppure questa eventualità può accadere. $\boxed{\text{I punti } \left(0,\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{\pi^2}},\tfrac{1}{\pi}\right) \text{ e } \left(0,\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{\pi^2}},-\tfrac{1}{\pi}\right) \text{ non sono su } M!}$

Pertanto, riassumendo, l'unico punto su M dove $\operatorname{rk} Dg < 2$ è $(0,0,1)$. Quindi M non è varietà.

$M\setminus(0,0,1)$ è invece varietà. (Non possiamo definire lo spazio tangente ad M in $(0,0,1)$).

Determiniamo lo spazio vettoriale tangente a $M \setminus (0,0,1)$ **9 bis**

in $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$. Tale punto è su $M \setminus (0,0,1)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Lo spazio vettoriale tangente è dato da $\ker Dg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, cioè

$\ker \begin{pmatrix} 0 & \pi & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$; esso ha dimensione 1: è l'insieme (x,y,z):

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cioè } (*) \begin{cases} \pi y + z = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}$$; questa è l'equazione.

da queste possiamo ricavare, ponendo $x = 1$, $y = -\sqrt{3}x = -\sqrt{3}$, $z = -\pi y = \pi\sqrt{3}$,

che è la retta di direzione $(1, -\sqrt{3}, \pi\sqrt{3})$.

La retta tangente a $M \setminus (0,0,1)$ e passante per $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ è

lo spazio affine parallelo a $(1, -\sqrt{3}, \pi\sqrt{3})$ e passante per $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Le equazioni di questa retta si scrivono a partire da $(*)$

come $$\begin{cases} \pi\left(y - \frac{1}{2}\right) + (z - 0) = 0 \\ \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$; oppure in forma parametrica

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{punto}} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ \pi\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\alpha \cdot \text{direzione}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

c) M è data come luogo degli zeri di $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definita da $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - \cos(\pi y) \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}$.

La funzione f è $f(x,y,z) = x^2 + z^2$, ed è continua.
Da a) sappiamo che M è compatto. Quindi f ammette massimi e minimi assoluti. Questi saranno tra i punti critici di f su M. Possiamo cercare tali punti critici su $M \setminus (0,0,1)$ con il metodo dei molt. di Lagrange, essendo $M \setminus (0,0,1)$ varietà differenziale. Resta fuori dallo studio il punto $(0,0,1)$, che studieremo a parte (semplicemente, calcoleremo il valore di f in $(0,0,1)$).

Dal T. dei M. di Lagrange, dobbiamo imporre:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \nabla f & \nabla g_1 & \nabla g_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (x,y,z) \in M \setminus (0,0,1).$$

$$\overset{!}{=} \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2x & 0 & 2x \\ 0 & \pi \sin(\pi y) & 2y \\ 2z & 1 & 2z \end{pmatrix} = 0, \quad (x,y,z) \in M \setminus (0,0,1).$$

$$\overset{!}{=} 2x\big(2z \sin(\pi y) - 2y\big) + 2z\big(-2x\pi \sin(\pi y)\big) = 0, \quad (x,y,z) \in M \setminus (0,0,1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4xy = 0 & (\det = 0) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 & \\ z - \cos(\pi y) = 0 & \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (x,y,z) \in M$$

• caso $y=0 \Rightarrow z=\cos(0)=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x=0$,

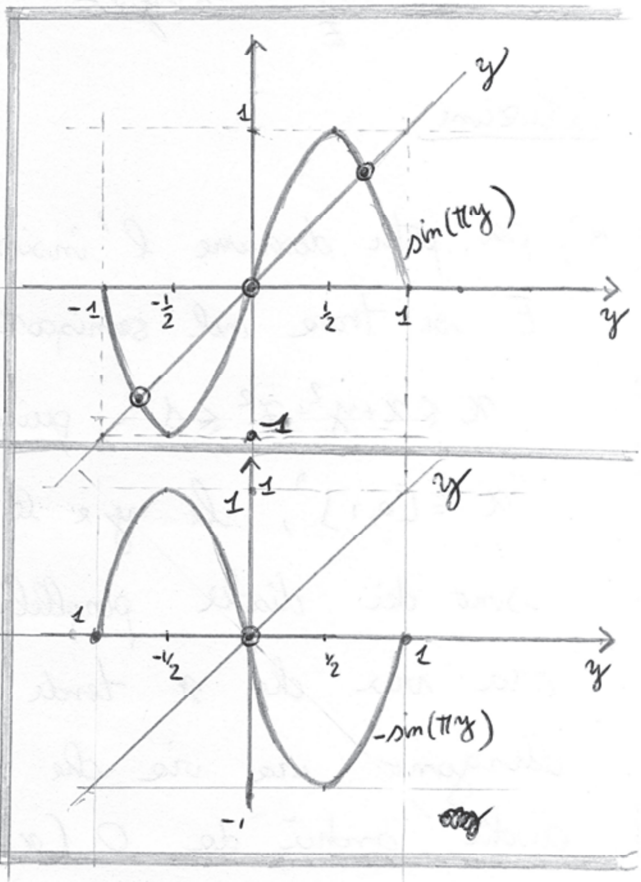
è il punto $(0,0,1)$, che però non è in $M\setminus(0,0,1)$, e lo vedremo dopo

• caso $x=0$; $\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ z=\cos(\pi y) \end{cases}$;

segue che $y^2+\cos^2(\pi y)=1 \Rightarrow y^2=\sin^2(\pi y)$

ovvero una volta, questo può succedere quando $y=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow x=0$,

oppure se $y=\sin(\pi y)$,
$y=-\sin(\pi y)$



(avevamo ricavato $-1\le y\le 1$);

$y=-\sin(\pi y)$, per $-1\le y\le 1$ è possibile solo per $y=0$, e siamo nel caso $(0,0,1)$ come su: infatti: per $-1\le y\le 0$, $y\le 0$ e $-\sin(\pi y)\ge 0$;
per $0\le y\le 1$, $y\ge 0$ e $-\sin(\pi y)\le 0$;

• $y=\sin(\pi y)$ ha radici diverse da $y=0$ in $-1\le y\le 1$. Si mostra che per $-1\le y\le 1$, $y=\sin(\pi y)$ ha due radici $y=\pm a$ diverse da 0, con $\frac{1}{2}<a<1$; per cui $y=\pm a$ ($a \approx 0.7364\ldots$),

mentre $z=\cos(\pi a)$ (<0); i punti critici sono

$(0,\pm a,\cos(\pi a))=(0,\pm a,\sqrt{1-a^2})$ e f vale $f(0,\pm a,\sqrt{1-a^2})=1-a^2<1$

Resta il punto $(0,0,1)$, dove $f(0,0,1) = 1$.
Per cui, essendo che i massimi e minimi assoluti su M esistono, $(0, \pm a, \sqrt{1-a^2})$ sono punti di minimo, mentre $(0,0,1)$ è punto di massimo assoluto per f su M. $\square$

ESERCIZIO 7 | Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

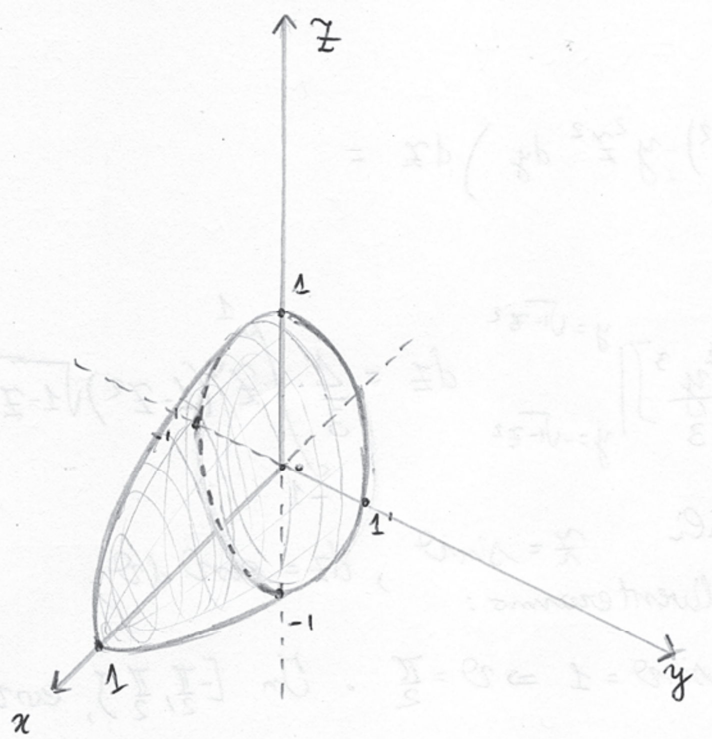
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ x + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

a) spiegare brevemente di che insieme si tratta e abbozzarne un disegno

b) Calcolare $\int_E z^2 \,dx\,dy\,dz$

Soluzione:

a) per poter descrivere l'insieme, facciamo delle considerazioni:
E si trova nel semispazio $x \geq 0$; siccome $y^2 + z^2 \geq 0 \ \forall y,z$, oltre $x \leq x + y^2 + z^2 \leq 1$, quindi $0 \leq x \leq 1$. Fissata una "quota" "$x \in [0,1]$", le y e le z soddisfano a $y^2+z^2 \leq 1-x$, cioè sono dei dischi paralleli al piano $x=0$, che si restringono via via che x tende a 1 (il raggio è $\sqrt{1-x}$) e si allargano via via che x tende a 0. Il raggio di questi dischi andrà da 0 $(x=1)$ a 1 $(x=0)$. In pratica si tratta di un "paraboloide" di vertice $(0,0,0)$, con asse coincidente con l'asse delle x, e tagliato da un piano alla quota $x=0$: disegnandolo



Descriviamolo per "fili": la proiezione sul piano zy è il disco $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$: infatti, da $x+y^2+z^2 \leq 1$, segue che $x-1 \leq -y^2-z^2$; siccome $x \geq 0$, deve essere $-1 \leq -y^2-z^2 \Rightarrow z^2+y^2 \leq 1$. Quindi D è la proiezione di E sul piano (yz). Ora, fissato $(y,z) \in D$, la yz-sezione (il "filo") è data da: $x \leq 1-y^2-z^2$, $x \geq 0$, ovvero $0 \leq x \leq 1-y^2-z^2$. Quindi

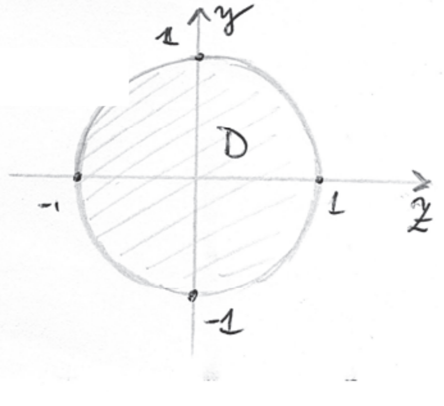
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1-y^2-z^2,\ (z,y) \in D\}.$$ Integriamo z^2 su E:

$$\int_E z^2 \,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{1-y^2-z^2} z^2 \,dx \right) dy\,dz = \int_D z^2 \cdot \big[x\big]\Big|_{x=0}^{x=1-y^2-z^2} dy\,dz = \int_D z^2(1-y^2-z^2)\,dy\,dz.$$

Questo è ora un integrale di una funzione di due variabili (y,z) su un dominio semplice D (il disco).

Il resto è opzionale, vedremo in seguito come calcolarlo agevolmente

Possiamo ad es. descrivere D come dominio normale rispetto a z:



$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq z \leq 1,\ -\sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-z^2}\}.$$

Otteniamo

$$\int_D z^2(1-y^2-z^2)\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} z^2(1-z^2)-y^2z^2\,dy\right)dz =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[z^2(1-z^2)\,y\right]\Big|_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{y=\sqrt{1-z^2}} - \left[z^2\frac{y^3}{3}\right]\Big|_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{y=\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} z^2(1-z^2)\sqrt{1-z^2}\,dz \quad (*)$$

operiamo il cambio di variabili $z = \sin\vartheta$, $dz = \cos\vartheta\,d\vartheta$;
gli estremi di integrazione diventeranno:

$z = \sin\vartheta = -1 \Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{2}$; $z = \sin\vartheta = 1 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$. In $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\vartheta > 0$.

procediamo:

$$(*) = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\cos^4\vartheta\,d\vartheta$$; usiamo le solite relazioni

$$\begin{cases} \sin^2\vartheta = \frac{1-\cos(2\vartheta)}{2} \\ \cos^2\vartheta = \frac{1+\cos(2\vartheta)}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^4\vartheta = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2\vartheta)}{2} + \frac{1+\cos(4\vartheta)}{8}$$

$$= \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8} + \frac{\cos(2\vartheta)}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\cos(4\vartheta)}{16} - \frac{\cos(2\vartheta)}{8} - \frac{1}{8} - \frac{\cos(4\vartheta)}{8} - \frac{\cos(2\vartheta)}{16} - \frac{\cos(2\vartheta)\cos(4\vartheta)}{16}\right)d\vartheta$$

gli integrali di $\cos(2\vartheta)$, $\cos(4\vartheta)$ tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ sono nulli. Un po' più lungo, ma si vede ugualmente, l'integrale di $\cos(2\vartheta)\cos(4\vartheta)$ è nullo; resta solo

$$\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}\,d\vartheta = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

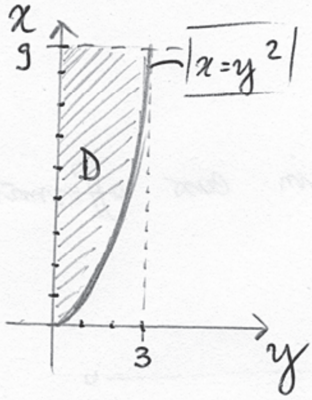
ESERCIZIO 8

Interpretare l'integrale iterato $\int_0^3\int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy$ come integrale di $y\cos(x^2)\,dx\,dy$ su una regione D di $\mathbb{R}^2$ e calcolarlo

<u>Soluzione</u>: L'integrale è scritto in modo tale che D può essere scritto come dominio normale rispetto ad y ($\int_0^3(\ )dy$ è l'integrale più esterno):

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le y\le 3,\ y^2\le x\le 9\}$. <u>Disegnamolo</u>:

(mettiamo y in ascissa)



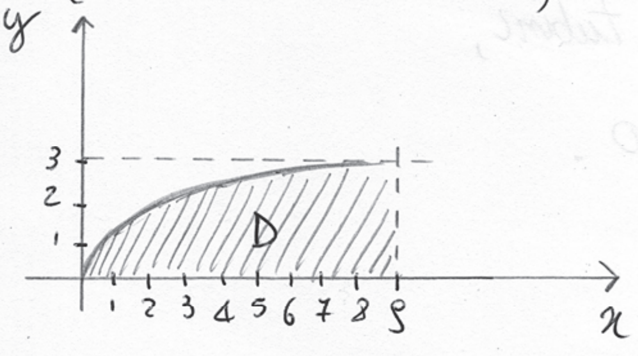
(il punto (0,9) ad es. soddisfa le condizioni, pertanto è in D; evidenzieremo la parte "sopra" la curva $x=y^2$).

Siccome, scritto in questo modo, si richiede il calcolo di $\int_{y^2}^9 \cos(x^2)dx$, di cui non conosciamo una primitiva, tentiamo uno scambio dell'ordine di integrazione: scriviamo D come normale rispetto ad x. Graficamente, si tratta di "riflettere" il grafico.

Siccome $y^2\le x \Rightarrow -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}$; ma $y\ge 0$, per cui $0\le y\le\sqrt{x}$.

Siccome poi $y\ge 0 \Rightarrow 0\le y^2\le x\le 9 \Rightarrow 0\le x\le 9$.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 9,\ 0\le y\le\sqrt{x}\}$. Disegnamolo:



È proprio il grafico di prima "riflesso"

Calcoliamo l'integrale con quest'ordine di integrazione invertito:

$$\int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy \right) dx = \int_0^9 \cos(x^2) \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^9 \frac{x\cos(x^2)}{2}\,dx = \begin{pmatrix} f = x^2 \\ df = 2x\,dx \end{pmatrix}$$

$$= \int_{f(0)}^{f(9)} \frac{\cos(f)}{4}\,df = \int_0^{81} \frac{\cos(f)}{4}\,df = \frac{\sin(f)}{4}\Bigg|_{f=0}^{f=81} = \boxed{\frac{\sin(81)}{4}}$$

$\square$

ESERCIZIO 9

Sia $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1+x^2 e^{|y|}}$.

a) mostrare che $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$; calcolare $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ in caso affermativo

b) calcolare $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy$ $\quad \left(\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,dt = 6 \right)$

Soluzione:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y^3|}{1+x^2 e^{|y|}}\,dx = |y^3| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 e^{|y|}}\,dx = |y|^3 e^{-\frac{|y|}{2}} \left[\arctg\left(x e^{\frac{|y|}{2}}\right)\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \pi |y|^3 e^{-\frac{|y|}{2}};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi|y|^3 e^{-\frac{|y|}{2}}\,dy < +\infty, \text{ poiché, ad esempio } \frac{|y|^3 e^{-\frac{|y|}{2}}}{1/|y|^2} \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0 .$$

Per il T. di Tonelli, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Essendo la funzione dispari in y, cioè $f(x,-y) = -f(x,y)$ $\forall x,y$, si ha $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0$ $\forall x$. Per il T. di Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 .$$

b) Si ha $|f| \in L^1(\mathbb{R}^2)$ dato che $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Per Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\, dx\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(punto a))}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \pi |y|^3 e^{-\frac{|y|}{2}} dy = \text{(siccome}$$

la funzione ora è pari in y (c'è il modulo!)) $=$

$$2\pi \int_0^{+\infty} y^3 e^{-\frac{y}{2}}\, dy \; ;$$

$$\int_0^{+\infty} y^3 e^{-\frac{y}{2}}\, dy \underset{\substack{\uparrow \\ \left(\frac{y}{2} = t \atop dy = 2dt\right)}}{=} \int_0^{+\infty} 16\, t^3 e^{-t}\, dt = 16 \cdot 6 \; ; \text{ pertanto}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dx dy = 2\pi \cdot 16 \cdot 6 = \boxed{192\pi}$$

$\square$