

INTEGRAZIONE MULTIPLA: FUNZIONI DI 3 VARIABILI

1

ES. 8.13

Sia $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Determinare

- i) la proiezione di E sul piano xy ;
- ii) la proiezione di E sull'asse z ;
- iii) le z -sezioni $E(z)$ di E

Sol.

i) $(x, y, z) \in E \Leftrightarrow z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$. Questa disuguaglianza può avere soluzioni $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0$, ovvero $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Quindi la proiezione è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(L'insieme E è la sfera unitaria. La sua proiezione sul piano xy è il disco unitario D)

ii) $(x, y, z) \in E \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$. Può avere soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se e solo se $1 - z^2 \geq 0$, ovvero se $-1 \leq z \leq 1$. La proiezione sull'asse z è quindi l'intervallo $[-1, 1]$

iii) Sia $z \in \mathbb{R}$. $(x, y, z) \in E$ se $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$. Se $1 - z^2 < 0$, non ci sono soluzioni; Se $1 - z^2 \geq 0$, $E(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$, ovvero il disco di centro $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ di raggio $\sqrt{1 - z^2}$.

□

Es. 8.14

Per $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Determinare $E(x)$ ed $E(y, z)$. Determinare poi le proiezioni di E sull'asse x e sul piano yz .

Sol: si può osservare che è "lo stesso" che svolgere l'esercizio precedente. Si tratta di trovare le proiezioni su un asse coordinato (in questo caso x) e su un piano coordinato (in questo caso yz). Si può anche pensare di "cambiare i nomi" agli assi ($x \rightsquigarrow z$, $z \rightsquigarrow x$, $y \rightsquigarrow y$. L'equazione di E non cambia forma!).

Ad ogni modo:

per $x \in \mathbb{R}$, $E(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}$; è non vuoto se $1 - x^2 \geq 0$, cioè $x \in [-1, 1]$.

per $x \in [-1, 1]$, la x -sezione è il disco centrato in $(0, 0)$ nel piano (yz) e di raggio $\sqrt{1 - x^2}$.

per $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, $E(y, z) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 - y^2 - z^2\}$, che è

l'insieme vuoto per $1 - y^2 - z^2 < 0$, e l'insieme (segmento)

$$-\sqrt{1 - y^2 - z^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad \text{altrimenti.}$$

□

Siano $f(x, y, z) = |x|$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

$r > 0$ fissato (costante). Calcolare $\int_E f(x, y, z) dx dy dz$.

Sol: l'insieme E è normale rispetto al piano (yz) :

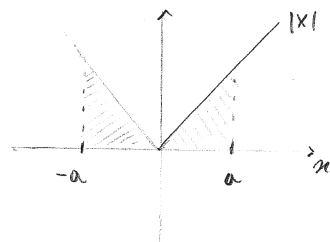
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{r^2 - y^2 - z^2} \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, \quad y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

la condizione $y^2 + z^2 \leq r^2$ è la "proiezione" sul piano yz di E (E è la sfera centrata in $(0, 0, 0)$ di raggio r).

Per cui,
$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{x=-\sqrt{r^2-y^2-z^2}}^{x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}} |x| dx \right) dy dz, \quad \text{dove}$$

appunto $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq r^2\}$ è la proiezione di E su (yz) .

Ricordiamo che in $\mathbb{R}$, $\int_{-a}^a |x| dx = 2 \int_0^a x dx \quad (a > 0)$.



Per cui:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_D \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{r^2-y^2-z^2}} x dx \right) dy dz = 2 \int_D \frac{r^2 - y^2 - z^2}{2} dy dz = \int_D (r^2 - y^2 - z^2) dy dz$$

Ora non ci resta che calcolare un integrale doppio. Scriviamo, ad esempio,

$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{r^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \leq y \leq r\}$. Per cui

$$\begin{aligned} \int_D (r^2 - y^2 - z^2) dy dz &= \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} (r^2 - y^2 - z^2) dz \right) dy = \int_{-r}^r \left[(r^2 - y^2)z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-\sqrt{r^2-y^2}}^{z=\sqrt{r^2-y^2}} dy = \\ &= \int_{-r}^r (r^2 - y^2) 2\sqrt{r^2 - y^2} - \frac{2}{3} (r^2 - y^2) \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{4}{3} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} (r^2 - y^2) dy \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\frac{4}{3} \int_{-r}^r (r^2 - y^2) \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

Proviamo il cambio di variabile $y = r \sin \vartheta$,

$$dy = r \cos \vartheta ; \quad \sin \vartheta = 1 \Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \vartheta = -1 \Leftrightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4}{3} \int_{r \sin \vartheta = -r}^{r \sin \vartheta = r} r^2 (1 - \sin^2 \vartheta) \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 \vartheta)} r \cos \vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{4r^4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{4r^4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2\vartheta)}{4} + \frac{\cos(4\vartheta)}{8} \right) d\vartheta =$$

ricordiamo $\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} \Rightarrow$
 $\cos^4 \vartheta = \frac{1}{4} + \frac{(\cos 2\vartheta)^2}{4} + \frac{1}{2} \cos(2\vartheta)$

$$= \frac{4r^4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{8} + \frac{\cos(2\vartheta)}{2} \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{4r^4}{3} \cdot \left[\frac{1}{4} \vartheta + \frac{1}{8} \vartheta + \frac{\sin(2\vartheta)}{32} + \frac{\sin(2\vartheta)}{4} \right]_{\vartheta = -\frac{\pi}{2}}^{\vartheta = \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4r^4}{3} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right] = \boxed{\frac{r^4 \pi}{2}}$$

□

Mostrare che

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a, x + y + z \geq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

($a > 0$ fissato) può essere descritto come dominio normale rispetto al piano xy , e calcolarne il volume.

Sl: individuiamo prima la proiezione di E sul piano xy .

Si dovrà avere:

- $z^2 \leq a^2 - x^2 - y^2$, che ha soluzione sse $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$,
ovvero $x^2 + y^2 \leq a^2$ (disco di centro $(0,0)$ in xy e raggio a).
- $z \geq a - x - y$ e $z \geq 0$
- $y \geq 0, x \geq 0$.

Le condizioni su x ed y ottenute ci danno la proiezione di E su (xy) .

Chiamiamola $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$

Se vogliamo E scritto come dominio normale rispetto al piano (xy) , dobbiamo poter scrivere

$$E = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Abbiamo già determinato D . Da $z^2 \leq a^2 - x^2 - y^2$

otteniamo $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Poi abbiamo anche $z \geq 0$ e $z \geq a - x - y$

Quindi non c'è una definizione unica per $\alpha(x, y)$.

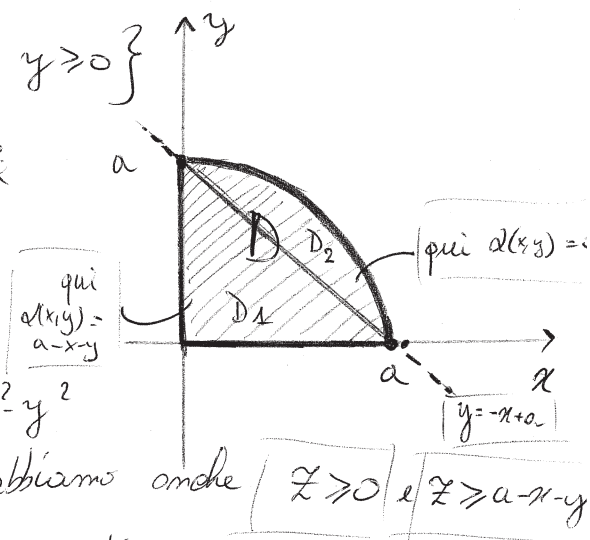
Poiché deve essere $z \geq 0$, sarà sicuramente $z \geq -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (prendo negativa quest'ultima)

Se $a - x - y \leq 0$, allora $\alpha(x, y) = 0$ (ciò deve essere $z \geq 0$) (la regione D_2)

Se $a - x - y \geq 0$, allora $\alpha(x, y) = a - x - y$ (ciò deve essere $z \geq a - x - y$) (la regione D_1)

$\beta(x, y)$ è invece sempre $\beta(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Quindi

$$E = \{(x, y, z) : \max\{0, a - x - y\} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}.$$



Ricapitolando:

4

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{(a-x-y), 0\} \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \underbrace{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2}_{\text{questa parte nel disco}}\}$$

$(x, y) \in D$, dove D parte di E su (xy)

Il volume di E si calcola integrando $f \equiv 1$ su E .

$$V(E) = \int_E dx dy dz = \int_D \left(\int_{z=\alpha(x,y)}^{z=\beta(x,y)} dz \right) dx dy =$$

$$= \int_D (\beta(x,y) - \alpha(x,y)) dx dy = \left(\text{ricordiamo che su } D_1, \alpha(x,y) = a-x-y \right. \\ \left. \text{su } D_2, \alpha(x,y) = 0 \right) =$$

$$= \int_D \beta(x,y) dx dy - \int_{D_1} (a-x-y) dx dy.$$

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq -x+a, 0 \leq x \leq a\}$$

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}, 0 \leq x \leq a\}.$$

Calcoliamo i pezzi separatamente:

$$\int_D \beta(x,y) dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy \right) dx ; \text{ conviene studiare}$$

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy = \int_{r \sin \theta = 0}^{r \sin \theta = r} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} dy$$

$r \sin \theta = r \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
 $r \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
 $y = r \sin \theta$
 $(r := \sqrt{a^2-x^2})$
 $dy = r \cos \theta d\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \theta d\theta = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) d\theta =$
 (ricordiamo $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$)

$$= r^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (a^2 - x^2); \text{ Quindi}$$

$$\int_0^a \frac{\pi}{4} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{4} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi}{4} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a^3 \pi}{6}.$$

Resta da calcolare

$$\begin{aligned} \int_{D_1} (a-x-y) dx dy &= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} (a-x-y) dy \right) dx = \int_0^a \left[ay - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=a-x} dx = \\ &= \int_0^a (a-x)(a-x) - \frac{(a-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2 + x^2 - 2ax) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[a^2 x + \frac{x^3}{3} - \frac{2ax^2}{2} \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{a^3}{3} - a^3 \right) = \frac{a^3}{6} ; \end{aligned}$$

Per cui $V(E) = \boxed{\frac{a^3}{6}(\pi - 1)}$

□

Es. 8.18

Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

i) Spiegare brevemente di che si tratta

ii) Calcolare $\int_E z^2 dx dy dz$

i) il dominio si può scrivere come normale rispetto a (yz) :

$$E = \{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 - y^2 - z^2 \} ; \text{ la condizione \u00e9 verificata}$$

da $x \in \mathbb{R}$ se $1 - y^2 - z^2 \geq 0$, ovvero $y^2 + z^2 \leq 1$. La proiezione di E sul piano (yz) \u00e9 dunque il disco $D = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 1 \}$.

Le (yz) -sezioni sono dunque i segmenti $x \in [0, 1 - y^2 - z^2]$.

ii) Calcoliamo l'integrale $\int_E x^2 dx dy dz =$

$$= \int_D \left(\int_0^{1-y^2-x^2} x^2 dx \right) dy dz = \int_D x^2 (1-y^2-x^2) dy dz = \int_D (x^2 - x^4 - x^2 y^2) dy dz$$

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1\} ; \text{ per cui:}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 - x^4 - x^2 y^2) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left[(1-y^2) \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-1}^1 2(1-y^2) \frac{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}}{3} - 2(1-y^2) \frac{\sqrt{1-y^2}}{5} dy = \frac{4}{15} \int_{-1}^1 (1-y^2)^2 \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \frac{4}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 \vartheta)^2 \sqrt{1-\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{4}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \vartheta d\vartheta$$

$$\cos^6 \vartheta = (\cos^2 \vartheta)^3 = \left(\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{\cos(2\vartheta)}{8} + \frac{3\cos(2\vartheta)}{8} + \frac{3\cos^2(2\vartheta)}{8} =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{\cos(2\vartheta)(1+\cos(4\vartheta))}{16} + \frac{3}{4} \cos(2\vartheta) + \frac{3}{8} \left(\frac{1+\cos(4\vartheta)}{2} \right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} +$$

funzioni di $\cos(2\vartheta), \cos(4\vartheta)$ che hanno int. nullo su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (cento simpos lungo).

$$\text{per cui: } \int_E x^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{4} \cdot \pi = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

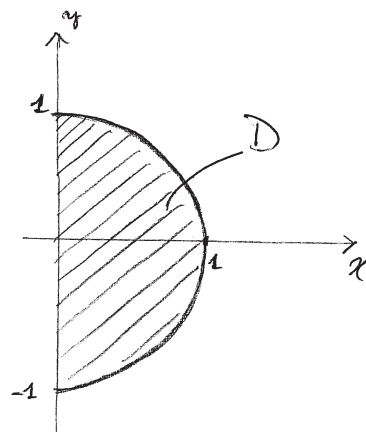
□

ES. 8.20

Calcolare il volume dell'insieme $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$

Sapiamo che E è già scritto in forma normale rispetto a (x, y) :

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0}_{\text{questa è la proiezione } D \text{ di } E \text{ sul piano } (xy)}\}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\int_D dx dy dz = \int_D \left(\int_0^x dz \right) dx dy = \int_D x dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^1 \frac{1-y^2}{2} dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{y^3}{6} \right]_{y=-1}^{y=1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Si consideri il seguente integrale iterato come un integrale triplo su un opportuno insieme e calcolarlo

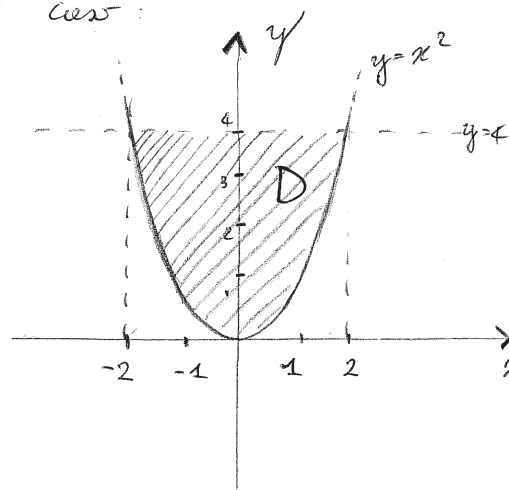
$$\frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} dz dy dx$$

Sol. dalla forma dell' integrale, vediamo che esso è l' integrale di $f \equiv \frac{1}{\pi}$ su un dominio E scritto in forma normale rispetto al piano (xy) . (È $\frac{1}{\pi}$ volte il volume di E). Infatti

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{y-x^2} \leq z \leq \sqrt{y-x^2}, x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 2 \right\}$$

Come al solito, le condizioni $x^2 \leq y \leq 4$ e $-2 \leq x \leq 2$ ci definiscono D , proiezione di E sul piano (xy) . In questo caso:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 2 \right\}$$



Calcoliamo l' integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 2\sqrt{y-x^2} dy dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 2 \cdot \frac{2}{3} \left[(y-x^2)^{3/2} \right]_{y=x^2}^{y=4} dx = \\ &= \frac{4}{3\pi} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \quad \xrightarrow{\substack{x = 2\sin(\vartheta) \\ dx = 2\cos(\vartheta) d\vartheta}} \frac{4}{3\pi} \int_{2\sin(\vartheta)=-2}^{2\sin(\vartheta)=2} (4(1-\sin^2\vartheta))^{3/2} \cos\vartheta d\vartheta = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4(\vartheta) d\vartheta = \left(\text{in un esercizio precedente avevamo calcolato} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\vartheta) d\vartheta = \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{4 \cdot 16}{3\pi \cdot 8} \cdot 3\pi = \boxed{8}$$

Es. 8.22

Calcolare

$$\int_E xy^2 \sqrt{x^2 + zy} \, dx dy dz,$$

dove E è il solido delimitato dalla superficie di equazione

$$z = x^2, z = 0, x = 1, y = 0, y = 1, x = 0.$$

Sol. Dalle equazioni delle superfici, dobbiamo ricavare le disuguaglianze che descrivono E .

Se E è delimitato dai piani $x=1$ e $x=0$, dove $0 \leq x \leq 1$

Se E è delimitato dai piani $y=0$ e $y=1$, dove $0 \leq y \leq 1$.

E è delimitato da $z = x^2$ e $z = 0$, e $x^2 \geq 0$, quindi $0 \leq z \leq x^2$.

In definitiva $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Come al solito, E è scritto in forma normale rispetto al piano (xy) ($0 \leq z \leq x^2$), e la proiezione su (xy) di E è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, il quadrato $([0, 1] \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$. Per cui

$$\int_E xy^2 \sqrt{x^2 + zy} \, dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy^2 \sqrt{x^2 + zy} \, dz \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 y^2 \left(\int_0^{x^2} z \sqrt{x^2 + zy} \, dz \right) dx dy \quad (*)$$

$$\text{Calcoliamo } \int_0^{x^2} z \sqrt{x^2 + zy} \, dz = \frac{z}{y} \cdot (x^2 + zy)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_{z=0}^{z=x^2} - \int_0^{x^2} \frac{2}{3y} (x^2 + zy)^{3/2} dz =$$

$$= \frac{2x^2}{3y} (x^2 + x^2 y)^{3/2} - \frac{2}{3y^2} \cdot \frac{2}{5} (x^2 + zy)^{5/2} \Big|_{z=0}^{z=x^2} = \frac{2}{3} \frac{x^2}{y} \cdot x^3 (1+y)^{3/2} - \frac{4x^5 (1+y)^{5/2}}{15y^2} + \frac{4x^5}{15y^2}$$

(ricordiamo che $x \geq 0$)

Quindi: $(*) =$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2}{3} x^5 y (1+y)^{3/2} - \frac{4x^5 (1+y)^{5/2}}{15} + \frac{4x^5}{15} \right) dx dy = \left(\text{sono somme di prodotti } f(x)g(y) \text{ su rettangoli} \right) =$$

$$\frac{2}{3} \left(\int_0^1 x^5 dx \right) \left(\int_0^1 y (1+y)^{3/2} dy \right) - \frac{4}{15} \left(\int_0^1 x^5 dx \right) \left(\int_0^1 (1+y)^{5/2} dy \right) + \frac{4}{15} \left(\int_0^1 x^5 dx \right) \left(\int_0^1 dy \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[y \cdot \frac{2}{5} (1+y)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{5} (1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} (1+y)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{6} = \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} (1+y)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 \right] - \frac{4}{315} (2^{\frac{7}{2}} - 1) + \frac{2}{45} = \\
 &= \frac{1}{9} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{5} - \frac{4}{35} (2^{\frac{7}{2}} - 1) \right] - \frac{4}{315} (8\sqrt{2} - 1) + \frac{2}{45} = \\
 &= \frac{8\sqrt{2}}{45} - \frac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{315} + \frac{4}{315} - \frac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{315} + \frac{4}{315} + \frac{2}{45} = \\
 &= \frac{56\sqrt{2}}{315} - \frac{32\sqrt{2}}{315} + \frac{4}{315} - \frac{32\sqrt{2}}{315} + \frac{4}{315} + \frac{14}{315} = \frac{2}{315} (28\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 2 - 16\sqrt{2} + 2 + 7) \\
 &= \boxed{\frac{2}{315} (-4\sqrt{2} + 11)}
 \end{aligned}$$

ESERCIZI DALLA FOTOCOPIA (p. 512)

Es. 43

a) Calcolare $\int_E x^2 dx dy dz$, dove $E = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq x\}$

Im questo caso vediamo che il dominio si presta meglio all'integrazione per llette parallele al piano (y,z) :
infatti abbiamo che $x \in [0,2]$, quindi una variabile scorre in un intervallo di valori reali. E per ogni fissato $x \in [0,2]$, $(y,z) \in [0,2x] \times [0,x]$ che è un rettangolo. Quindi ci conviene:

$$\int_0^2 \left(\int_{D(x)} x^2 dy dz \right) dx, \text{ dove per ogni } x \in [0,2], D(x) = [0,2x] \times [0,x]$$

$$\int_0^2 x^2 \left(\int_{D(x)} dy dz \right) dx.$$

L'integrale $\int_{D(x)} dy dz = \int_0^{2x} \left(\int_0^x dz \right) dy = 2x^2$. Quindi

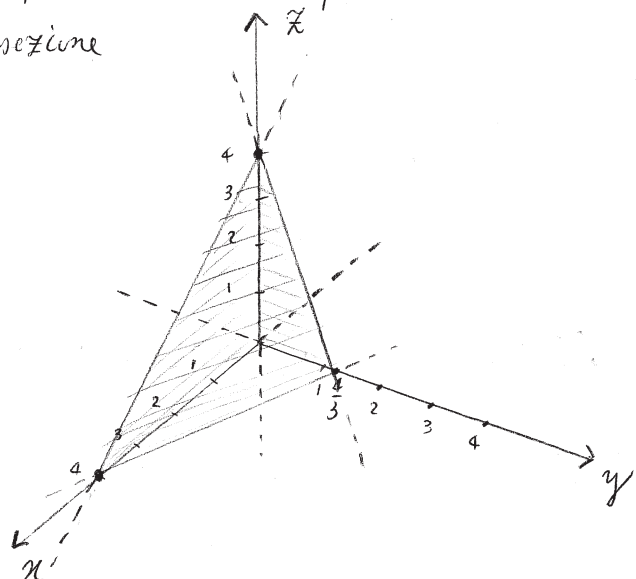
$$\int_E x^2 dx dy dz = \int_0^2 2x^4 dx = \frac{2x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{2^6}{5} = \boxed{\frac{64}{5}}$$

B) $\int_E y dx dy dz$, dove E è il tetraedro delimitato dai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+3y+z=4$.

Dobbiamo individuare una maniera opportuna per descrivere questo insieme. disegneremo innanzitutto le rette date dall'intersezione

del piano $x+3y+z=4$ con $x=0$, $y=0$, $z=0$

$$\begin{array}{lll} \left. \begin{array}{l} x+z=4 \\ y=0 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x+3y=4 \\ z=0 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} 3y+z=4 \\ x=0 \end{array} \right\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{una per i punti} & \text{come per i} & \text{come per i punti} \\ \begin{array}{l} x=0, z=4 \\ z=0, x=4 \end{array} & \begin{array}{l} x=0, y=\frac{4}{3} \\ y=0, x=4 \end{array} & \begin{array}{l} y=0, z=4 \\ z=0, y=\frac{4}{3} \end{array} \end{array}$$



Si deduce allora che nella regione interessata $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Procediamo anche in questo caso ad un'integrazione per fette parallele a uno dei tre piani coordinati. Le scelte vediamo essere equivalenti.

Scegliamo di integrare per fette parallele al piano xy .

Siccome $0 \in E$, l'ultima disuguaglianza che ci rimane è $x+3y+z \leq 4$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+3y+z \leq 4\};$$

Siccome $x+3y \leq 4-z \leq 4$ (da $z \leq 0$), la proiezione sull'asse xy è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x+3y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

La proiezione invece sull'asse z è

il segmento $[0,4]$. Le z -sezioni (i piani tagliati ad altezza z)

8

$$7) \int_E 3xy^2z^3 dx dy dz, \text{ dove } E \text{ è la regione}$$

$$E = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq xz\}$$

Anche in questo caso notiamo che il dominio E è adatto in modo
proprio per un'integrazione per fette: la variabile x è in un
intervallo, ovvero $x \in [0, 1]$. per ogni fisso $x \in [0, 1]$,

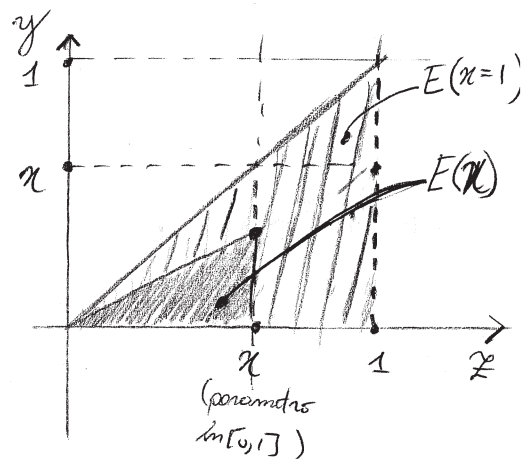
(y, z) si trovano in un ~~intervallo~~ ~~dominio~~ dominio semplice

$E(x) := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq xz\}$. Ovvero, per ogni x fissato

z spazia nell'intervallo $[0, x]$, mentre y vive tra le funzioni

$y=0$ e $y=xz$ (x è un parametro):

$E(x)$, per $x \in [0, 1]$, è il triangolo di vertici
 $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, x^2) (si ricavano facilmente).



Procediamo ad integrare:

$$\int_E 3xy^2z^3 dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{E(x)} 3xy^2z^3 dy dz \right) dx = \int_0^1 3x \left(\int_{E(x)} y^2 z^3 dy dz \right) dx.$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{E(x)} y^2 z^3 dy dz &= \int_0^x \left(\int_0^{xz} y^2 z^3 dy \right) dz = \int_0^x z^3 \left(\int_0^{xz} y^2 dy \right) dz = \int_0^x z^3 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=xz} dz = \\ &= \int_0^x \frac{z^3 \cdot x^3 z^3}{3} dz = \int_0^x \frac{x^3 z^6}{3} dz = \frac{x^3}{3} \left[\frac{z^7}{7} \right]_{z=0}^{z=x} = \frac{x^{10}}{21}. \text{ Per cui} \end{aligned}$$

$$\int_E 3xy^2z^3 dx dy dz = \int_0^1 \frac{x^{11}}{7} dx = \left[\frac{x^{12}}{12 \cdot 7} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{84}}$$

□

Indicare i limiti di integrazione dell'integrale triplo

$$\int_E f(x,y,z) dx dy dz$$

dove E è il tetraedro limitato dal piano $x+y+z=1$ e dai piani coordinati. Scrivere poi altri due integrali iterati equivalenti.

Sl. È simile al un esercizio precedente.

Innanzitutto, siccome dobbiamo descrivere una regione, dobbiamo avere delle disuguaglianze. Noi abbiamo quattro uguaglianze:

$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. Siccome $(0,0,0) \in E$, nell'ultima equazione, dobbiamo avere " $\leq$ ", ovvero $x+y+z \leq 1$.

Siccome $x = 1 - y - z$, per $z=0, y=0$ si ha $x=1$. $(1,0,0)$ è in E per cui $x \geq 0$. Si vede in modo analogo che $z \geq 0$ o $y \geq 0$.

In definitiva $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Come abbiamo visto prima, possiamo integrare per fette parallele a una proiezione dei tre piani coordinati. Scriviamo gli integrali:

• fette parallele a (xy) : $z \geq 0$; $z \leq 1 - x - y \leq 1$ (siccome $x \geq 0$ e $y \geq 0$).

per cui $z \in [0,1]$. Per $z \in [0,1]$, la proiezione (fetta) E/z è:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1-z\}$, ovvero $y \geq 0, y \leq 1-z-x \leq 1-z$

per cui $E(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-z\}$. L'integrale è

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \int_0^{1-z} f(x,y,z) dy \right) dx dz.$$

La definizione di E è "simmetrica" rispetto alle tre coordinate.

possiamo rifare lo stesso ragionamento e integrare per fette parallele ai piani coordinati (xz) e (yz) . Otteniamo

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y,z) dx \right) dz \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx$$

□

Es. 46

Esprimere l'integrale iterato

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-2}^{y+1} f(x,y,z) dz dy dx$$

come integrale triplo su un dominio. Scrivere poi altri due integrali iterati equivalenti.

L'integrale, scritto in questo modo, si presta ad essere svolto per fette parallele al piano yz . Infatti vediamo che

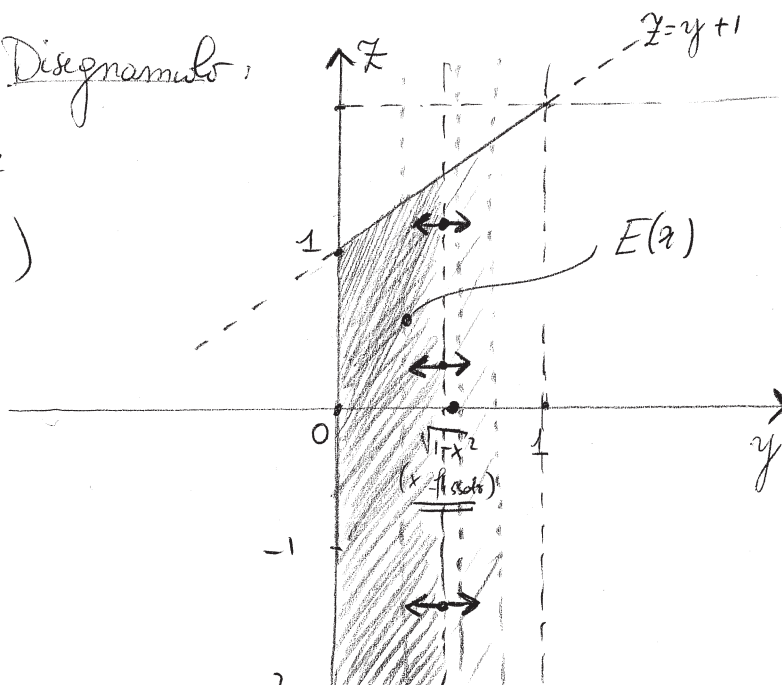
$x \in [-1, 1]$. Quindi la variabile x spazia su un segmento.

Per ogni $x \in [-1, 1]$ fissata, $f(x,y,z)$ è integrata su un

dominio $E(x) := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -2 \leq z \leq y+1\}$, che è un

dominio normale rispetto ad y . Disegnandolo,

è un trapezio di "altezza" $\sqrt{1-x^2}$
(che va da 0 a 1 per $x \in [-1, 1]$)
e basi $z \in [-2, 1]$, $z \in [-2, \sqrt{1-x^2}+1]$



Cerchiamo di riscrivere E in maniera diverse.

Quando $x \in [-1, 1]$, essendo $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, segue

che $0 \leq y \leq 1$. (Quindi ora vorremmo integrare per fette parallele al piano xz , avendo considerato la proiezione

di E sull'asse y). Da $y \leq \sqrt{1-x^2}$ segue $y^2 + x^2 \leq 1$, ovvero $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. (Quindi il nostro nuovo

dominio, o meglio la nostra nuova descrizione, prevede che per ogni $y \in [0, 1]$ fissato - quindi ora y è un parametro - $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$,

cioè x varia in un intervallo. Per cui la "fetta" $E(y)$

ad altezza y è dritta, come insieme bidimensionale

rispetto all'asse x . Infine, $-2 \leq z \leq y+1$ ha

la stessa forma. Per $y \in [0, 1]$ fissato, z è nell'intervallo

$[-2, y+1]$. Per cui le y -sezioni $E(y)$ sono dei rettangoli

$[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}] \times [-2, y+1]$ sul piano (xz) (paralleli al piano (xz)).

Cerchiamo una terza descrizione, che ormai abbiamo capito essere una descrizione per "fette" parallele al piano xzy , cioè per z -sezioni $E(z)$.

Se $-2 \leq z \leq y+1$ e $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \boxed{-2 \leq z \leq 2}$ questa è la proiezione di E sull'asse z . Calcoliamo le z -sezioni.

Da $-2 \leq z \leq y+1$ segue $y \geq z-1$; ma avevamo anche

$y \geq 0$. Quindi sarà $y \geq \max\{0, z-1\}$. Poi possiamo scegliere

" $y \leq \sqrt{1-x^2}$ e $x \in [-1, 1]$ " oppure " $y \leq 1$ e $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ " per

completare la descrizione. Quindi:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-2}^{y+1} f(x, y, z) dz dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-2}^{y+1} f(x, y, z) dz dx dy = \int_{-2}^2 \int_{\max\{0, z-1\}}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \int_{\max\{0, z-1\}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dy dx dz$$

□

