ESERCIZI SU MASSIMI/MINIMI VINCOLATI

Dal foglio di esercizi.

1) Si vogliono determinare i punti di minima distanza tra gli insiemi $y = x^2$ e $y = x - 2$ in $\mathbb{R}^2$.

1. (Massimi e Minimi vincolati)

(a) il problema equivale a determinare il minimo della funzione
$$h(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
con $g(x_1, y_1, x_2, y_2) = (y_1 - x_1^2,\ y_2 - x_2 + 2) = (0,0)$.

Infatti se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due punti in $\mathbb{R}^2$, $h(x_1, y_1, x_2, y_2)$ non è altro che la distanza tra i due punti, mentre il vincolo $g(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0,0)$ non è altro che impone (x_1, y_1) sulla prima curva $y = x^2$ e (x_2, y_2) sulla seconda, $y = x - 2$.

(b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Notiamo "$n = 4$", "$\nu = 2 = n - m$" per cui $m = 2$. Se g' è suriettivo per $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in M$, allora M (gli zeri di g) è varietà 2-dim.

(Supponiamo esista un punto di minimo)

$$g' = \begin{bmatrix} -2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$ ha rango 2 perché almeno un minore (es. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$) è di rango 2 sempre. Col metodo dei moltiplic. di Lagrange, se
$$\nabla h = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ -2(x_1 - x_2) \\ -2(y_1 - y_2) \end{pmatrix},$$
supponendo che esista un minimo, dovremmo imporre che ∇h, ∇g_1, ∇g_2 linearmente dipendenti, ovvero

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-x_2) & -2x_1 & 0 \\ 2(y_1-y_2) & 1 & 0 \\ -2(x_1-x_2) & 0 & -1 \\ -2(y_1-y_2) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ha <u>tutti</u> i minori di ordine 3 nulli.

essi sono

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-x_2) & -2x_1 & 0 \\ 2(y_1-y_2) & 1 & 0 \\ -2(x_1-x_2) & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2(y_1-y_2) & 1 & 0 \\ -2(x_1-x_2) & 0 & -1 \\ -2(y_1-y_2) & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2(x_1-x_2) & -2x_1 & 0 \\ 2(y_1-y_2) & 1 & 0 \\ -2(y_1-y_2) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\left[2(x_1-x_2)+4x_1(y_1-y_2)\right]=0; \quad -\left[-2(x_1-x_2)-2(y_1-y_2)\right]=0; \quad \left[2(x_1-x_2)+8x_1(y_1-y_2)\right]=0$$

avevo vogliamo:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_1(y_1-y_2)=0 \\ x_1-x_2+y_1-y_2=0 \\ y_1=x_1^2 \\ y_2=x_2-2 \end{cases}$$

$\}$ minori

$\}$ vincolo (cioè il punto $\in M$)

sistema di 4 eq. in 4 incognite

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_1(x_1^2-x_2+2)=0 = 5x_1+2x_1^3-x_2-2x_1x_2=0 \\ x_1-x_2+x_1^2-x_2+2=0 \Rightarrow x_2=\dfrac{x_1^2+x_1+2}{2} \Rightarrow x_1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$5x_1+2x_1^3 \left(\frac{-x_1^2}{2}\right) \frac{-x_1}{2} \; \frac{-2}{2} \; -\cancel{x_1^3}-x_1^2-2x_1 =$$

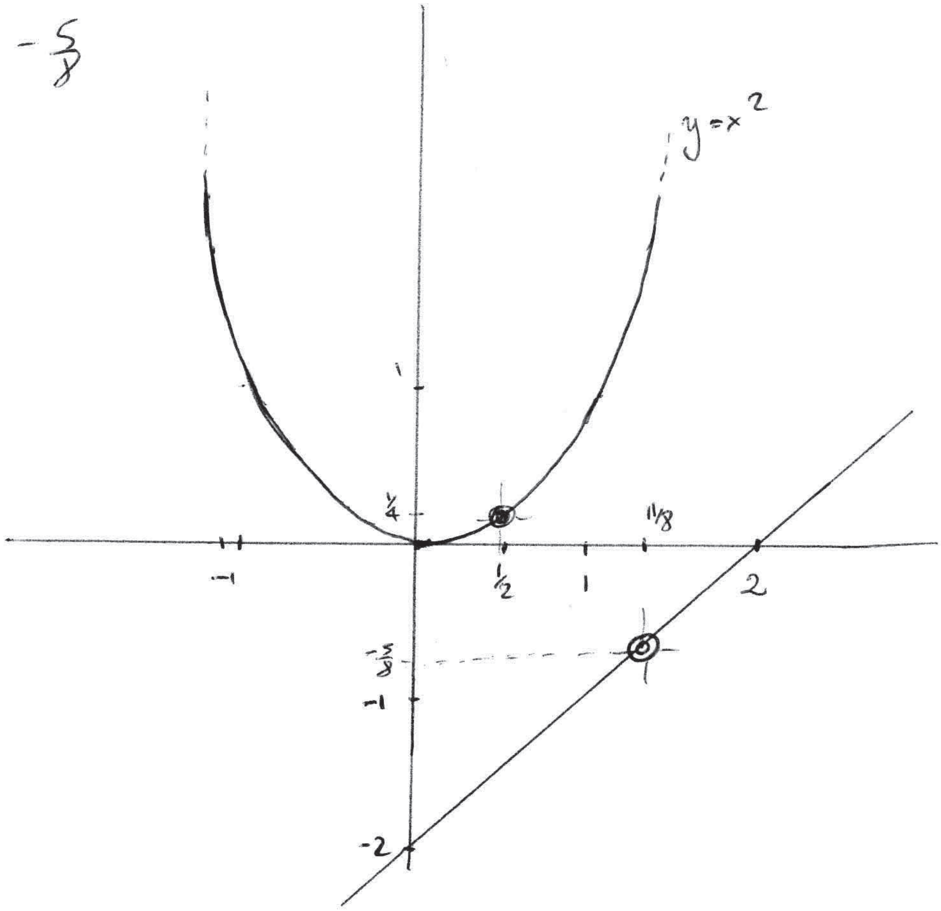
$$= x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{5}{2}x_1-\frac{1}{2}=0$$; notiamo che $x=\frac{1}{2}$ è t.c.

$$\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}-1=0$$; quindi $x=\frac{1}{2}$ è radice ; si vede

$$\left(x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{5}{2}x_1-1\right)=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_1^2-x_1+2\right)$$; e la seconda eq. ha due radici complesse. Per cui

$x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2\right) = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1 = \frac{11}{8}$;

$y_1 = \frac{1}{4}$; $y_2 = -\frac{5}{8}$



(c)

il segmento si trova sulla retta di equazione

$$\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)} = \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}, \text{ ovvero } \frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)};$$

$\left(y-\frac{1}{4}\right) = \left(x-\frac{1}{2}\right)(-1)$; $\boxed{y = -x+\frac{1}{4}}$ che è perpendicolare a $\boxed{y = x-2}$

e alla retta tangente a $y=x^2$ in $x=\frac{1}{2}$, che è $\boxed{y = x-\frac{1}{4}}$

2. (Massimi e Minimi liberi)

(a) Il problema equivale a minimizzare una funzione positiva $f(x_1,x_2)$ su $\mathbb{R}^2$: infatti, se $h(x_1,y_1,x_2,y_2) = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$, sostituiamo $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2-2$. Otteniamo quindi

$$f(x_1,x_2) = (x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2+2)^2,$$ che è positiva.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x_1-x_2)+4(x_1^2-x_2+2)x_1 \\ -2(x_1-x_2)-2(x_1^2-x_2+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_1^3-2x_2x_1+4x_1=0 \\ x_1-x_2+x_1^2-x_2+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1+2x_1^3-2x_1x_2-x_2=0 \\ x_1^2+x_1+2=2x_2 \end{cases}$$

ritroviamo lo stesso sistema del Metodo 1. Quindi $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{11}{8}$, $y_2=-\frac{5}{8}$

(b) Proviamo che $\forall c\geq 0$, $\{(x_1,x_2): f(x_1,x_2)\leq c\}$ sono limitate: significa che:

$$(x_1-x_2)^2\leq c \quad \text{e}$$
$$(x_1^2-x_2+2)^2\leq c$$, sviluppiamo i conti.

metodo veloce, ma "naif"

(nel caso $x_2\leq 0$ ✓. Nel caso $x_2\geq 0$, osserviamo che c'è un termine x_1^4 che sistema) **Meglio**: $(x_1-x_2)^2\leq c \Rightarrow |x_1-x_2|\leq\sqrt{c}$, cioè $-\sqrt{c}+x_2\leq -x_1\leq\sqrt{c}+x_2$ $^{(*)}$; $(x_1^2-x_2+2)^2\leq c\Rightarrow |x_1^2-x_2+2|\leq\sqrt{c}$, cioè $-\sqrt{c}\leq x_1^2-x_2+2\leq\sqrt{c} \Rightarrow -\sqrt{c}+x_2\leq x_1^2+2\leq\sqrt{c}+x_2$; ma da $(*)$ $\Rightarrow$ $-\sqrt{c}\leq x_2\leq\sqrt{c}+x_1) \Rightarrow -2\sqrt{c}+x_1\leq x_1^2+2\leq 2\sqrt{c}+x_1 \Rightarrow -2\sqrt{c}\leq \boxed{x_1^2-x_1+2}\leq 2\sqrt{c}$.

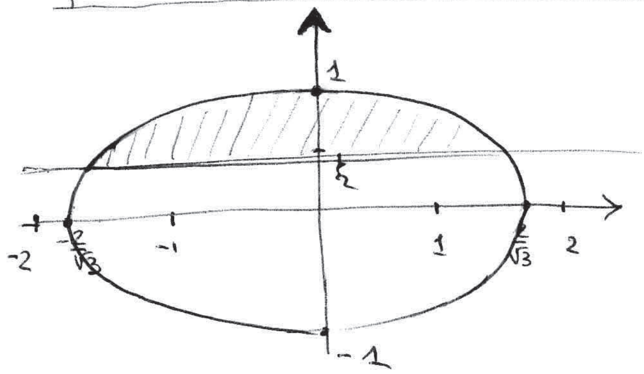
$x_1^2-x_1+2\to+\infty$ per $x_1\to\pm\infty$ per cui, volendolo limitato, sarà $|x_1|\leq\tilde{c}$. E allora da $|x_1-x_2|^2\leq c$, anche x_2.

ES. 6.20

Trovare i massimi e minimi assoluti di

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2 \quad \text{su}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4 ;\ y \geq \frac{1}{2} \right\}$$



- $\frac{3}{4}x^2 + y^2 \leq 1$ è l'ellisse $\mathcal{E}$ di centro $(0,0)$ e intersezioni con gli assi $(0, \pm 1)$, $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$
- $y \geq \frac{1}{2}$ è il semipiano superiore alla retta $y = \frac{1}{2}$

chiaramente i massimi/minimi assoluti esistono: D è (con $\leq$) un insieme compatto: è chiuso, poiché definito da disequazioni ($\geq$) di funzioni continue. È limitato poiché ad es. $D \subseteq \text{Ellisse}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1\right)$.
f è continua su D. Allora ammette massimo e minimo.
O sono punti interni a D, quindi $\nabla f = 0$, o sono punti del bordo di D, ∂D.

ⓐ $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+y^2} - x \\ 2y e^{x^2+y^2} - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2e^{x^2+y^2} - 1) \\ 2y(e^{x^2+y^2} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ solo nei casi

$\begin{cases} e^{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \\ e^{x^2+y^2} = 1 \end{cases}$, cioè questo caso non si verifica, oppure

$\boxed{x=0,\ y=0}$. Ma $(0,0) \notin D$. Quindi non ci sono max/min **locali** in $\mathring{D}$.

notiamo che ∂D è formato da due pezzi: una parte è sulla retta $y=\frac{1}{2}$, l'altra sull'ellisse $\mathcal{E}$.

• la retta $y=\frac{1}{2}$. Qui $f(x,y)\big|_{y=\frac{1}{2}}$ è

$$e^{x^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}.$$ Cerchiamo i max/min.

$$f' = 2xe^{x^2+\frac{1}{4}}-x=0 \iff x\left(2e^{x^2+\frac{1}{4}}-1\right)=0 \to x=0, \text{ o}$$

$$e^{\frac{1}{4}}e^{x^2}=\frac{1}{2}\ ;\ e^{x^2}=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}}\ ;\ x^2=\ln\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}\right)\ ;\ \text{ma } e^{-\frac{1}{4}}<1\ ;\ \text{mai}.$$

quindi il punto è $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, che è su ∂D.

sulle ellisse, abbiamo: $\mathcal{E}$ è data implicitamente da

$g(x,y)$ $\frac{3}{4}x^2+y^2-1=0$. I punti stazionari su $\mathcal{E}$, per il T. dei molt. di $\mathcal{L}$. sono quei punti t.c.

$\nabla f, \nabla g$ linearmente dipendenti, avremo

$$\det\begin{bmatrix} x\left(2e^{x^2+y^2}-1\right) & \frac{3}{2}x \\ 2y\left(e^{x^2+y^2}-1\right) & 2y \end{bmatrix}=0,$$ cioè

$$2xy\left(2e^{x^2+y^2}-1\right)-3xy\left(e^{x^2+y^2}-1\right)=0$$

$$xy\,e^{x^2+y^2}+xy=0\ ,\quad xy\left(\underset{>0}{e^{x^2+y^2}+1}\right)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

cioè i punti

$(0,1)$, $(0,-1)$

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},1\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},1\right)$. L'unico che è su ∂D è $(0,1)$.

Abbiamo provato che

$(0, \frac{1}{2})$ è punto stazionario su $y = \frac{1}{2}$, che è in ∂D

$(0, 1)$ è punto stazionario su $\mathcal{E}$, che è in ∂D.

$$f(0, \tfrac{1}{2}) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$$

$$f(0, 1) = e - 1$$

Però manca qualcosa! I due punti

$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ \mathcal{E} \end{cases}$, ovvero $\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right)$.

!! Queste non erano incluse nel nostro studio che riguardava o tutte $y = \frac{1}{2}$, o tutte $\mathcal{E}$, non le intersezioni

$f(\pm 1, \frac{1}{2}) = e^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{4}$. Confrontiamo questi tre valori:

- $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \implies e - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$
- $e^{\frac{1}{4}x} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{(4^2)} \cdot \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1}{(4^k)} \frac{x^k}{k!} + \cdots \implies e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{(4^2)} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(4^k) k!}$

$$\implies \boxed{e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} < e - 1.}$$

$$e^{\frac{5}{4}} - \frac{3}{4} = e \cdot \overbrace{e^{\frac{1}{4}}}^{>1} - \frac{3}{4} > e - \frac{3}{4} > e - 1.$$ Per cui

$$\boxed{f(\pm 1, \tfrac{1}{2}) > f(0, 1) > f(0, \tfrac{1}{2})}$$

$\square$

ES. 6.21

Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ed E definiti da:

$$f(x,y) = \ln(3x^2 - y^2 + 3)$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + y^2 = 1\}$$

1). E è definita come zeri di $g(x,y) := 9x^2 + y^2 - 1$.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ "$n^* = 2$", "$\nu = 1$". "$m = n - \nu = 1$".

Se Dg ha rango massimo nei punti di E:

$Dg\,(= g') = (18x,\ 2y)$; ha rango 0 solo in $(0,0)$.

ma $(0,0) \notin E$. E è varietà 1-dimensionale.

2). f ammette max/min assoluti: E è compatto e f è continua. Ci sarebbe un problema sulle varietà

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 3 = 0 \\ 9x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

ciò quando l'argomento del logaritmo si annulla o è negativo

$12x^2 + 2 = 0$, mai! ed è sempre > 0.

Molt. Lagrange: $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{6x}{3x^2 - y^2 + 3} \\ \dfrac{-2y}{3x^2 - y^2 + 3} \end{pmatrix}$; $\nabla g = \begin{pmatrix} 18x \\ 2y \end{pmatrix}$.

deve essere ∇f e ∇g dipendenti $\Rightarrow$

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{6x}{3x^2 - y^2 + 3} & 18x \\ \dfrac{-2y}{3x^2 - y^2 + 3} & 2y \end{bmatrix} = 0 = \frac{(12 + 36)xy}{3x^2 - y^2 + 3} = 0 \ ; \quad \frac{48xy}{3x^2 - y^2 + 3} = 0$$

ovvero $\nearrow x=0 \quad (\Rightarrow y=\pm 1)$
$\searrow y=0 \quad (\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3})$

i punti candidati sono $(0,1), (0,-1), (\frac{1}{3},0), (-\frac{1}{3},0)$

$f(0,\pm 1) = \ln(2)$ ← min.

$f(\pm\frac{1}{3},0) = \ln(\frac{10}{3})$ ← max

$\boxed{\text{ES. } 6.28}$

Siano $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy+1\}$

1) Mostrare che M è una superficie.

M è data dagli zeri di $g = z^2 - xy - 1$. $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

"n" $= 3$, "$\nu = 1$" $\Rightarrow$ "$m = n - \nu = 2$". Vediamo Dg $(= g')$

$Dg = (-y, -x, 2z)$. Esso ha rango 0 solo in $(0,0,0)$, ma $(0,0,0) \notin M$. Quindi M è varietà 2-dim, quindi è una superficie.

2) Supponiamo che il minimo esista. Il T. dei molt. di Lagrange afferma che ∇f e ∇g dipendenti. Ovvero che

$$\begin{bmatrix} 2x & -y \\ 2y & -x \\ 2z & 2z \end{bmatrix}$$

ha $rk=1$, ovvero tutti i minori di ordine 2 sono nulli.

$\underline{\text{Cioè}}$: $\begin{cases} -2x^2+2y^2=0 \\ 4yz+2zx=0 \\ 4zx+2zy=0 \\ z^2=xy+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ z(2y+x)=0 \\ z(2x+y)=0 \\ z^2=xy+1 \end{cases}$

$z=0 \Rightarrow \begin{cases} xy=-1 \\ x^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm y \;\Uparrow\; x^2=\pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} x=-y \\ x=\pm 1 \\ y=\mp 1 \end{matrix}$ $(1,-1,0)$ $(-1,1,0)$.

negli altri casi $2y+x=0$, $x=-2y \Rightarrow 4y^2-y^2=0$, $y=0$, $x=0$,

$z=\pm 1$, quindi $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$.

stesso caso $2x+y=0$. Questi sono tutti i punti.

$f(\pm1,\mp1,0)=2 \leftarrow$ (max?) (forse no... ma è stazionario. A noi interessa il minimo)

$f(0,0,\pm1)=1 \leftarrow$ min.

). f è il quadrato della dist dell'origine e tende a $+\infty$ per $|(x,y,z)| \to +\infty$.

$\boxed{\text{ES. } 6.37}$

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xyz$

(i) punti critici di f.

(ii) punti stazionari per $f_{|\Gamma}$, dove Γ è la retta di equazioni

$$\begin{cases} z - 3 = 0 \\ 4x - 5y + 12 = 0 \end{cases}$$

(i) $$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ -3xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = 0 \longrightarrow y = 0 \qquad (0,0,z)$

$y = 0 \longrightarrow x = 0 \qquad (0,0,z)$, l'asse z è "critico"

$\boxed{f \equiv 0 \text{ sull'asse } z}$

(ii) la retta è data dagli zeri di g_1 e g_2, dove $g_1 = z - 3$, $g_2 = 4x - 5y + 12$. I punti stazionari per f su Γ sono tali per cui $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ sono dipendenti, i.e.

$$\det \begin{bmatrix} 3x^2 - 3yz & 0 & 4 \\ 3y^2 - 3xz & 0 & -5 \\ -3xy & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$= -\left(-5(3x^2 - 3yz) - 4(3y^2 - 3xz)\right) = 0 \quad + \ (x,y,z) \in \Gamma$$

cid $5(3x^2-3yz)+4(3y^2-3xz)=0$

$$\begin{cases} 15x^2+12y^2-15yz-12xz=0 \\ z=3 \\ 4x-5y+12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2+4y^2-5yz-4xz=0 \\ 4x-5y+12=0 \\ z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x^2+4y^2-15y-12x=0 \\ 4x-5y+12=0 \rightarrow x=\frac{5}{4}y-3 \end{cases}$$

$$5\left(\frac{5}{4}y-3\right)^2+4y^2-15y-12\left(\frac{5}{4}y-3\right)=0$$

$$5\left(\frac{25}{16}y^2-\frac{15}{2}y+9\right)+4y^2-15y-15y+36=0$$

$$\frac{125}{16}y^2-\frac{75}{2}y+45+4y^2-15y-15y+36=0$$

$$\frac{125+64}{16}y^2-\left(\frac{75+60}{2}\right)y+81=0$$

$$\frac{189}{16}y^2-\frac{135}{2}y+81=0$$

$$\frac{63}{16}y^2-\frac{45}{2}y+27=0$$

$$\frac{21}{16}y^2-\frac{15}{2}y+9=0$$

$$\frac{7}{16}y^2-\frac{5}{2}y+3=0$$

$$7y^2-40y+48=0$$

$$y_{1/2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1344}}{14}$$

$$y_{1/2}=\frac{40\pm\sqrt{256}}{14}=\frac{40\pm16}{14} \begin{cases} 4; & x_1=2 \\ \frac{12}{7}; & x_2=-\frac{6}{7} \end{cases}$$

$(2,4)$, $\left(-\frac{6}{7},\frac{12}{7}\right)$

ES. 6.38

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$, e sia

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2+1 \geq z^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

(i) max/min assoluti di f su D. D è compatto ($x^2 \leq 1$, $y^2 \leq 1 \Rightarrow |x|,|y|$
$z^2 \leq 1 + x^2y^2 \leq 2 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{2}$).

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ nel punto $(0,0,0) \in D$. Resta da controllare il bordo di D. Esso è delimitato da due superfici, definite da $x^2y^2+1-z^2=0$ e $x^2+y^2-1=0$. Dobbiamo cercare punti critici su:

$\Sigma_1 := g_1(x,y,z) = x^2y^2+1-z^2=0$

$\Sigma_2 := g_2(x,y,z) = x^2+y^2-1=0$

$\Gamma := \begin{cases} g_1=0 \\ g_2=0 \end{cases}$

(ia) punti stazionari su Σ_1: $\nabla f, \nabla g_1$ ondip $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2xy^2 \\ -2y & 2yx^2 \\ 2z & -2z \end{bmatrix}$$, cioè tutti i minori di ordine 2 nulli e $\in \Sigma_1$

$$\begin{cases} 4yx^3 + 4xy^3 = 0 \\ 4yz - 4yx^2z = 0 \\ -4xz - 4xzy^2 = 0 \\ x^2y^2+1-z^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(x^2+y^2) = 0 \\ yz(1-x^2) = 0 \\ xz(1+y^2) = 0 \\ 1+x^2y^2-z^2 = 0 \end{cases}$$

abbiamo un sacco di casi

$x=0 \nearrow \begin{cases} yz=0 \\ 1-z^2=0 \end{cases}$

$y=0 \to \begin{cases} xz=0 \\ 1-z^2=0 \end{cases}$

$z=0 \to \begin{cases} xy(x^2+y^2)=0 \\ 1+x^2y^2=0 \end{cases}$

$(x^2+y^2)=0 \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow z=\pm1$

$x=\pm1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=0$ ma non può essere!

$x=0$, $\begin{cases} yz=0 \\ z^2=1 \end{cases}$	$y=0$, $\begin{cases} xz=0 \\ z^2=1 \end{cases}$	$z=0$, $\begin{cases} xy(x^2+y^2)=0 \\ 1+x^2y^2=0 \end{cases}$	$(0,0,\pm1)$
$x=0, y=0, z=\pm1$ $(0,0,\pm1)$	$(0,0,\pm1)$	Imp.	

i due punti critici su Σ_1 sono $(0,0,\pm1)$

(ib) Σ_2 su gli zeri di $x^2+y^2-1=0$.

$$\begin{bmatrix} 2x & 2x \\ -2y & 2y \\ 2z & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} xy=0 \\ xz=0 \\ yz=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$x=0$, $\begin{cases} yz=0 \\ y^2=1 \end{cases}$ $x=0, y=\pm1, z=0$ $(0,\pm1,0)$	$y=0$, $\begin{cases} xz=0 \\ x^2=1 \end{cases}$ $(\pm1,0,0)$	$z=0$, $\begin{cases} xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $x=0$, $y=\pm1$ $y=0$, $x=\pm1$ $(0,\pm1,0)$ $(\pm1,0,0)$

i quattro punti critici su Σ_2 sono $(0,\pm1,0)$ e $(\pm1,0,0)$.

(ic) Γ: $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ indipendenti, punti di

$$\det \begin{bmatrix} 2x & 2x & 2xy^2 \\ -2y & 2y & 2yx^2 \\ 2z & 0 & -2z \end{bmatrix} = 0$$

$$2z\left[4yx^3-4xy^3-(4xy+4xy)\right]=0$$

$$8xyz\left[x^2-y^2-2\right]=0$$

In questo caso vogliamo:

$$\begin{cases} xyz(x^2-y^2-2)=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2y^2+1-z^2=0 \end{cases}$$

- $x=0 \Rightarrow y=\pm 1, z=\pm 1, \quad (0,\pm 1,\pm 1)$,
- $y=0 \Rightarrow x=\pm 1, z=\pm 1 \quad (\pm 1, 0, \pm 1)$.
- $z=0$ (impossibile)
- $x^2-y^2=2 \Rightarrow x^2=y^2+2, \quad y^2+2+y^2=1$, impossibile.

solo i punti $(0,\pm 1,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0, \pm 1)$.

Riassumiamo:

Critici su Σ_1: $(0,0,\pm 1)$	Critico su $\mathring{D}$ è $(0,0,$
" " Σ_2: $(0,\pm 1, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$	
" " Γ: $(0,\pm 1,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0, \pm 1)$	

Calcoliamone la f

$f(0,0,0)=0$

$f(0,0,\pm 1)=1$

$f(0,\pm 1, 0)=-1$ ← min. assoluto, $f(\pm 1, 0,0)=1$

$f(0,\pm 1,\pm 1)=0$

$f(\pm 1, 0, \pm 1)=2$ ← max. assoluto.

ii) $V \subseteq D$ definita da

$$\begin{cases} x^2y^2+1=z^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$ è varietà 1-dim. (era la nostra Γ).

Esso è dato dagli zeri di $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.

$$g' = \begin{bmatrix} 2xy^2 & 2yx^2 & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$ i minori sono tutti e tre nulli

se $$\begin{cases} xy^3-yx^3 & =0 & = xy(y^2-x^2) \\ yz & =0 & yz \\ xz & =0 & xz \end{cases}$$

$(0,y,0)$, $(0,0,z)$, $(x,0,0)$, $(0,0,z)$, $(x,\pm x,0)$; sostituendo

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} 1=0 \\ y^2=1 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} z^2=1 \\ 0=1 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} 1=0 \\ x^2=1 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} z^2=1 \\ 0=1 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} x^4+1=0 \\ 2x^2=1 \end{cases}}$$ punti

tutti e tre non sono mai cont. nulli. È varietà 1-dim

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, "$n=3$", "$\nu=2$"; "$m=n-\nu=1$".

iii) Lo spazio tangente è dato da $\ker g'(P_0)=$

$$\ker \begin{bmatrix} 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} & 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{19}}{2} \\ 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{19}}{2} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$; dunque ecco t.c.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{19}}{2} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\frac{1}{2} \\ y-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z-\frac{\sqrt{19}}{4} \end{bmatrix} = 0$$, cioè $$\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{19}}{2}z+\frac{19}{8} =0 \\ x-\frac{1}{2}+\sqrt{3}y-\frac{3}{2} =0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{\sqrt{19}}{2}z+\frac{13}{8}=0 \\ x+\sqrt{3}y-2=0 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{ES. } 6.39}$

$$\Gamma := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+\frac{z^2}{c^2} = 1 \, , \, x+y+z = 0 \right\}$$

i) Γ è varietà 1-dim: $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+\frac{z^2}{c^2} - 1 \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & \frac{2z}{c^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rk massimo (2)

ii) Γ è compatto: chiuso poiché luogo di zeri di f. continua, limitato perché è dentro un'ellisse.

iii) $\exists$ max / min per $f(x,y,z) = z$. I pti critici per f sono dati dalla condizione

$\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ dipendenti :

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2x & 1 \\ 0 & 2y & 1 \\ 1 & \frac{2z}{c^2} & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+\frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$\|$

$2(x-y)$

avremo $\begin{cases} z = -2x \\ \frac{z^2}{c^2} = 1 - 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4x^2}{c^2} + 2x^2 = 1 \; ; \; 2x^2\left(\frac{2}{c^2}+1\right) = 1$

$x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2+c^2}$, $x = \pm\sqrt{\frac{c^2}{4+2c^2}}$; $y = \pm\sqrt{\frac{c^2}{4+2c^2}}$

$z = \mp 2\sqrt{\frac{c^2}{4+2c^2}}$

Dal Foglio di Esercizi

2) Siano $n \geq 1$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$.

$C = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0 \ , x_1 + \dots + x_n = 1\}$

a) f ha max assoluto: infatti C è compatto: chiuso poiché definito da uguaglianze e disuguaglianze (con $\leq, \geq, =$). Limitato poiché $0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i$. f è continua su C.

b) $M = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, \ x_1 + \dots + x_n = 1\}$. M è varietà;

infatti $M_1 := x_1 + \dots + x_n = 1$ è varietà $(n-1)$-dim:

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$, "$n = n$", "$\nu = 1$" $\Rightarrow$ "$m = n-1$".

$g' = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$ ha rk massimo (1).

M è $M_1 \cap x_i > 0$ che sono aperti. Per cui è varietà.

c) Molt. Lagrange. $\nabla f = \begin{pmatrix} x_2 \cdot \dots \cdot x_n \\ x_1 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \\ \vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \end{pmatrix}$; $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Tutti i minori di ordine 1 devono essere nulli, ovvero

$P_k := \prod_{\substack{i=1,\dots,n \\ i \neq k}} x_i = \lambda$, $\forall k = 1, \dots, n$; $\lambda > 0$. Dividendo $\frac{P_k}{P_j}$, si ottiene

$\frac{x_j}{x_k} = 1$ $\forall k, j$ quindi $x_k = x_j \ \forall i, j \Rightarrow n x_i = 1 \ \forall i \Rightarrow x_i = \frac{1}{n}$

il punto è $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$. È stazionario su M. Cerchiamo il massimo su C.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \prod_{i\neq 1} x_i \\ \vdots \\ \prod_{i\neq k} x_i \\ \vdots \\ \prod_{i\neq n} x_i \end{pmatrix} \leftarrow \text{kth coord.}$$

$\neq 0$ nell'interno di C poiché $x_i \neq 0$. Un punto stazionario su Π è $(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$. Restano le parti del bordo dove $x_i = 0$, $\sum_j x_j = 1$. Ma qui $f \equiv 0$, mentre

$f(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n})^n$. Quindi il max è per $(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$.

2) $f(y_1,\dots,y_n) = y_1 \cdots y_n$; chiamiamo

$x_i = \dfrac{y_i}{\sum y_i}$; allora $\dfrac{y_1\cdots y_n}{(\sum y_i)^n} \leq \left(\dfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow (y_1\cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{\sum y_i}{n}$

---

3) Siano $r,s>0$ con $r+s=1$. Mostrare che

$$x^r y^s \leq 1 \quad \forall x,y \geq 0,\ rx+sy=1$$

$g(x,y) = rx+sy-1$; $f(x,y) = x^r y^s$;

$\nabla f = \begin{pmatrix} rx^{r-1}y^s \\ sy^{s-1}x^r \end{pmatrix} = 0$ solo per $x=0, y=0$. In questo caso $(x,y)=0$ è alto, $f(0,0)=0$.

$\nabla g = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$; $\det \begin{bmatrix} rx^{r-1}y^s & r \\ sy^{s-1}x^r & s \end{bmatrix} = rs(x^{r-1}y^s - y^{s-1}x^r) = 0 \Leftrightarrow$

$rs x^r y^s (x^{-1} - y^{-1}) = 0$

ovvero, se $(x,y)\neq(0,0)$, per $x=y$. che, col vincolo diventa $\rightarrow$

Se $x=0$, allora $y=0$. E otteniamo il punto $(0,0)$ che però non è sulla varietà. Siano allora $(x,y)\neq(0,0)$.

$\frac{x^2}{y^2}=1$;

$rx+sy-1=0 \iff y=1 ; \Rightarrow x=1.$ $(1,1)$ è punto stazionario

$f(1,1)=1$. Sugli altri bordi $x=0$ o $y=0$, $f=0$. Il massimo si raggiunge per $(x,y)=(1,1)$.

Deduciamo che se $x,y\geq 0$ $x^r y^s \leq rx+sy$. Infatti

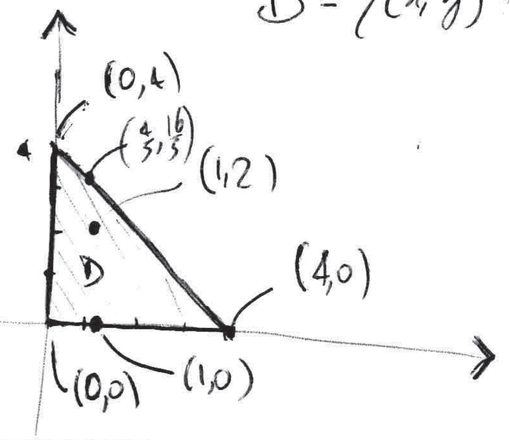
$\tilde{x}=\frac{x}{rx+sy}$; $\tilde{y}=\frac{y}{rx+sy}$; allora $r\tilde{x}+s\tilde{y}=1$ e $\tilde{x},\tilde{y}\geq 0$.

quindi $\frac{x^r}{(rx+sy)^r}\frac{y^s}{(rx+sy)^s}\leq 1 \Rightarrow x^r y^s \leq (rx+sy)^{r+s}=(rx+sy)$

---

4. Determinare max/min assoluti di $f(x,y)=x^2-xy+y$ su

$$D=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 4\}$$



$\nabla f=\begin{pmatrix}2x-y\\ -x+1\end{pmatrix}=0$ se $x=1$, $y=2$

$\boxed{f(1,2)=1-2+2=1}$

$\boxed{f(0,0)=0 \,;\; f(4,0)=16 \,;\; f(0,4)=4}$. Cerchiamo gli estremanti sui tre pezzi del bordo:

$x=0$: $\begin{vmatrix}2x-y & 1\\ -x+1 & 0\end{vmatrix} \iff x-1=0, \Rightarrow x=1$ $(1,0)$ $\boxed{f(1,0)=1}$

$y=0$: $\begin{vmatrix}2x-y & 0\\ -x+1 & 1\end{vmatrix} \iff 2x=y \iff (0,0)$; $\boxed{f(0,0)=0}$

$x+y=4$: $\begin{vmatrix}2x-y & 1\\ -x+1 & 1\end{vmatrix} \iff 2x-y+x-1=\begin{cases}3x-y-1=0\\ \ldots\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{4}{5}\\ y=\frac{16}{5}\end{cases}$; $\boxed{f(\frac{4}{5},\frac{16}{5})=\frac{32}{25}}$

5) Sia $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+3y-1=0\}$

a) f ha minimo assoluto su M. f è una funzione del raggio, ovvero con la distanza dall'origine. Allora ha minimo assoluto.

b)

(b1) Molt. $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 2y & 3 \end{vmatrix} = 6x-4y = 0 \iff \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases}$$

$$\iff y=\frac{3}{2}x \qquad 2x+\frac{9}{2}x-1 = \frac{13}{2}x-1=0 \iff \boxed{x=\frac{2}{13} \Rightarrow y=\frac{3}{13}}$$

(b2) Curve di livello: Sono le circonferenze di centro $(0,0)$ e raggio r

$$x^2+y^2=r^2; \quad \begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x\right)^2=r^2 \end{cases} \text{ e } \Delta=0$$

(tangente)

$$x^2+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{9}x-r^2=0; \quad \frac{13}{9}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}-r^2=0$$

$$\Delta = \frac{16}{81}-4\cdot\frac{13}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}-r^2\right) = \frac{16}{81}-\frac{52}{81}+\frac{52}{9}r^2=0 \iff \frac{52}{9}r^2=\frac{36}{81}=\frac{4}{9},$$

$$\iff r^2=\frac{4}{52}=13 \iff r=\sqrt{13}.$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{4}{9}}{2\cdot\frac{13}{9}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{8\cdot 13} = \frac{2}{13}; \quad x=\frac{3}{13}$$

(b3) Parametrizzazione: $t \mapsto \begin{pmatrix} t & (x) \\ -\frac{2}{3}t+\frac{1}{3} & (y) \end{pmatrix}$ dove f è

$$t^2+\left(-\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}\right)^2 = t^2+\frac{4}{9}t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9} = \frac{13}{9}t^2-\frac{4}{9}t+\frac{1}{9}; = \frac{1}{9}\left(13t^2-4t+1\right)$$

$$f' = \frac{1}{9}(26t-4) \Rightarrow t=\frac{2}{13} \Rightarrow x=\frac{2}{13}; \; y=\frac{3}{13}$$