

Principalmente ci troveremo di fronte alle seguenti tipologie di esercizi:

A) SISTEMI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Sono sistemi di equazioni differenziali del tipo $Y' = AY + b(t)$,
 $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ (solitamente $\mathbb{R}^m$), $A \in M_{m \times m}(\mathbb{K})$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

$$Y' = AY + b(t).$$

A.1 Se il sistema presenta una forma "semplice" (ad esempio è un sistema di due equazioni in due incognite), il metodo di stituzione/eliminazione è il più veloce.

A.2 un altro metodo di risoluzione è quello di trovare tutte le soluzioni del sistema omogeneo omogeneo

$$Y' = AY$$

ovvero trovare una matrice risolvante $\Phi(t)$. Tutte le soluzioni del sistema omogeneo saranno date da combinazioni lineari delle colonne di $\Phi(t)$ (che ricordiamo essere m soluzioni linearmente indipendenti di $Y' = AY$), cioè $y(t) = \Phi(t)C$, $C \in \mathbb{K}^m$ è vettore costante.

• (ii) e questa si somma a una soluzione particolare data da

$$y(t) = \Phi(t)C(t), \text{ dove } C(t) \in \mathbb{K}^1,$$

$$C'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t) \Leftrightarrow \left| C(t) = \int \Phi(s)^{-1}b(s) ds \right|, \text{ dove possiamo prendere un qualsiasi integrale di } \Phi(s)^{-1}b(s).$$

m.b. se l' esercizio richiede di risolvere un problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$, sarà conveniente scegliere quell' integrale che è nullo in $t = t_0$, ovvero

$$\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds.$$

→ (iii) una soluzione generale del sistema sarà allora

$$y(t) = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

m.b. se viene richiesta la risoluzione di un p. di Cauchy $y(t_0) = y_0$, allora, imponendolo nella forma generale dell'equazione, si ha $y_0 = \Phi(t_0)C$, dunque $C = \Phi(t_0)^{-1}y_0$. La soluzione (unica) di P.C. è allora

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$$

A3 METODI PER RISOLVERE UN SISTEMA OMOGENEO

Il problema principale è dunque trovare TUTTE le soluzioni del problema omogeneo, ossia determinare una matrice risolvante $\Phi(t)$ di $y' = Ay$. Ogni soluzione sarà della forma $\Phi(t)C$, $C \in \mathbb{K}^n$.

(i) si studia la matrice A . In particolare si cercano gli autovalori di A .

CASO ① $|n$ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Siano $u_1, \dots, u_n$ le rispettive autofunzioni. Allora $e^{\lambda_1 t} u_1, \dots, e^{\lambda_n t} u_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti. Una $\Phi(t)$ è $\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t} u_1, \dots, e^{\lambda_n t} u_n]$.

N.B. Si possono essere pure complessi, ma abbiamo detto nulla sulle matrici A . Può essere anche $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Caso ② Autovale complessa di una matrice A reale.

2

Allora, se u è autovettore relativo a λ , pure $\bar{u}$ è autovettore di autovale $\bar{\lambda}$. $e^{\lambda t} u$, $e^{\bar{\lambda} t} \bar{u}$ sono soluzioni indipendenti (ma in generale sono complesse). Per ottenere due soluzioni REALI (ci viene infatti richiesta una matrice risolvibile REALE), si fa un'opportuna combinazione lineare. Si vede che $\operatorname{Re}(e^{\lambda t} u)$ e $\operatorname{Im}(e^{\lambda t} u)$ sono soluzioni reali indipendenti.

N.B. Ricordare sempre $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$,
 $\frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \cos \vartheta$, $\frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} = \sin \vartheta$

N.B. in generale, se troviamo delle soluzioni complesse y_1, y_2 cercheremo di portarle in forma reale facendo
 $\frac{y_1 + y_2}{2}$, $\frac{y_1 - y_2}{2i}$

Caso ③ Autovale di molteplicità $r > 1$, ma l'autospazio ha dimensione $< r$.

Vedremo alcuni casi particolari. Se il sistema è 2×2 , si preferisce procedere per sostituzione/eliminazione. Almeno che non espressamente richiesto.

Altrimenti si usa la tecnica delle matrici esponenziali

→ (ii) dato $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, si definisce $e^{At} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.
 La definizione è ben posta.

- e^{At} è una matrice risolvante di $Y' = AY$.
- e^{At} è l'unica matrice risolvante tale che $e^{A0} = \mathbb{1}$ ($\Phi(0) = \mathbb{1}$).

- Se abbiamo già una matrice ^{risolvante} del sistema, allora
 $e^{At} = \Phi(t)M$, $M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile (c. base) e
 siccome $e^{A0} = \mathbb{1} = \Phi(0)M$, $M = \Phi(0)^{-1}$. Quindi

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$$

- Ogni soluzione y di $Y' = AY$, se conosciamo e^{At} , si scrive
 come $y(t) = e^{At}C$, $C \in \mathbb{K}^n$.

Come calcolare e^{At} in casi semplici?

Caso 1 • $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale, allora $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

Caso 2 • $A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove $*$ è nilpotente di ordine n : $A^n = 0$. Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tA)^k}{k!}$$
 è somma finita di matrici

In generale, se si sa che $A^r = 0$ per qualche r ,
 allora e^{At} sarà una somma finita di matrici.

Caso 3 • Se si osserva che A, A^2, A^3 hanno un comportamento
 conosciuto (conosciamo la serie di Taylor in 0 di
 funzioni) si può calcolare e^{tA}

Caso 4 • Principali matrici 2×2 . Se $P_A(A) = \dots (x-2)^2$, allora
 (cf. Horn & Cyclic), A soddisfa

$(A - \lambda \mathbb{1})^2 = 0$ (quindi nilpotente). In più si sa che

se $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$. Allora

$A = (A - \lambda \mathbb{1}) + \lambda \mathbb{1}$ e $(A - \lambda \mathbb{1})$, $\lambda \mathbb{1}$ commutano. Quindi

$$e^{At} = e^{\lambda \mathbb{1} t} e^{(A - \lambda \mathbb{1})t} = e^{\lambda t} \mathbb{1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda \mathbb{1})^k t^k}{k!} \right) = e^{\lambda t} \mathbb{1} \cdot (1 + At - \lambda \mathbb{1} t)$$

$$= e^{\lambda t} ((1 - \lambda t) \mathbb{1} + At)$$

B) Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine 2

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

B.1) Ricorre Soluzioni dell'omogenea associata:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{P. caratteristica}$$

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Se λ_1, λ_2 radici distinte,
allora $y_1 = e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ sol. indep.

• Se λ radice doppia,

$y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = t e^{\lambda t}$ sol. indep.

B.2 | Soluz. particolare col metodo delle variaz. delle costanti.
Se y_1, y_2 sol. indipendenti, e se riscriviamo il sistema
come

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \text{ con matrice risolvibile}$$

$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$. Cerchiamo soluzione particolare

$$y(t) = W(t) C(t) \quad C \in \mathbb{R}^2 \quad *$$

$$C'(t) = W^{-1}(t) B(t), \quad \text{dove } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} ; \det W(t) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W(t)^{-1} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \int \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} dt. \quad C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$c_1(t) = \int \frac{-y_2 b(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{y_1 b(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dt$$

Da (*) otteniamo che

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{sol. particolare,}$$

Una sol. generale si scrive

$$y(t) = \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{\text{omogenea}} + \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{part.}} \quad (5)$$

Se si vuole risolvere P.C. $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, si sceglie

$$c_1 = \int_{t_0}^+ 0, \quad c_2 = \int_{t_0}^+ \quad \text{e si impone in (5) } y(t_0) = y_0$$

determinando α e β .

$$y'(t_0) = y_1,$$

ESERCIZI DI BASE

1

① Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = x - y + e^{-2t} \\ y' = -x + y - 3e^{-2t} \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 5 \end{matrix}$$

Determinare le soluzioni con due metodi

i) Sostituzione/eliminazione

ii) Omogenee + Particolare

Soluzione:

$$i) \begin{cases} y = x - x' + e^{-2t} \\ y' = x' - x'' - 2e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow x'' - 2x' = 0, \text{ equazione omogenea di } 2^{\text{o}} \text{ grado.}$$

eq. caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. La soluzione

$$x(t) = \alpha + \beta e^{2t} = x(t). \text{ Tornando ad } y, \\ y(t) = \alpha - \beta e^{2t} + e^{-2t}. \text{ Per cui}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}. \text{ Vogliamo } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -2. \text{ quindi } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 - e^{2t} \\ 1 + e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Scriviamo $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Il sistema è $Y' = AY + b(t)$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{pmatrix}. \text{ Troviamo soluzione dell'omogenea}$$

associata: $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1$. Che dà $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (relativo a } \lambda_1 = 0)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (relativo a } \lambda_2 = 2). \text{ Quindi una matrice}$$

$$\text{risolvente è } \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

per trovare una soluzione particolare, ci serve utile avere $\Phi^{-1}(t)$.

Essa si calcola facilmente: $\Phi^{-1}(t) = -\frac{e^{-2t}}{2} \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$

una sol. particolare $\tilde{y}$ è $\tilde{y} = \Phi(t) C(t)$ con

$$C(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds = -\frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -e^{-2s} & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2s} \\ -3e^{-2s} \end{pmatrix} ds = -\frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-2s} \\ -4e^{-4s} \end{pmatrix} ds$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2s} \Big|_0^t \\ e^{-4s} \Big|_0^t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 1 \\ e^{-4t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t} - 1}{2} \\ \frac{1 - e^{-4t}}{2} \end{pmatrix}.$$

Una sol. generale è

$$\Phi(t) C + \Phi(t) C(t) = \Phi(t) C + \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t} - 1}{2} \\ \frac{1 - e^{-4t}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \Phi(t) C + \begin{pmatrix} \frac{e^{-2t} - 1 + e^{2t} - e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{-2t} - 1 - e^{2t} + e^{-2t}}{2} \end{pmatrix} = \Phi(t) C + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t} - 1}{2} \\ \frac{2e^{-2t} - 1 - e^{2t}}{2} \end{pmatrix} ; \text{imponiamo}$$

le condizioni iniziali $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, ovvero

$$\Phi(0) C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

le soluzioni del P.C. i quindi

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^{2t} - 1}{2} \\ \frac{2e^{-2t} - 1 - e^{2t}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + \frac{5}{2} e^{2t} + \frac{e^{2t} - 1}{2} \\ \frac{5}{2} + \frac{5}{2} e^{2t} + \frac{2e^{-2t} - 1 - e^{2t}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2e^{2t} \\ 2 + 2e^{2t} + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

□

② Determinare la soluzione di $y'' + y = \frac{1}{\sin t}$, $t \in]0, \pi[$
 tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$

②

Soluzione:

L'eq. omogenea associata è $y'' + y = 0$. Polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm i. \quad \text{Due soluzioni sono}$$

$$(e^{it}, e^{-it}), \quad \text{cioè} \quad \cos t + i \sin t, \quad \cos t - i \sin t.$$

Prendiamo $\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$, ovvero $\cos t$, $\sin t$. Queste sono
 altre due soluzioni, linearmente indipendenti e reali.

Chiamiamole $y_1(t) = \cos(t)$, $y_2(t) = \sin(t)$.

Metodo di variazione delle costanti cerchiamo una sol. particolare

$$\tilde{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \quad c_1, c_2 \in C^1(]0, \pi[).$$

abbiamo visto

$$c_1(t) = \frac{\int -b(t)y_2(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'},$$

$$c_2(t) = \frac{\int b(t)y_1(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'}, \quad y_1y_2' - y_2y_1' = \cos^2(t) - \sin(t)(-\sin(t)) = 1.$$

$$b(t) = \frac{1}{\sin t}. \quad \text{Per cui}$$

$$c_1(t) = - \int \frac{\sin(t)}{\sin(t)} = -t$$

$$c_2(t) = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \int \frac{f'}{f} dt = \int \frac{1}{f} df = \ln(f) = \ln(\sin t). \quad \text{Per cui}$$

$$\tilde{y}(t) = -t \cos(t) + \sin(t) \ln(\sin(t)) \text{ sol. part.}$$

una sol. generale è

$$y(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - t \cos(t) + \sin(t) \ln(\sin(t)).$$

Vogliamo che $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$

$$y(\frac{\pi}{2}) = \beta = 1$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = -\alpha \sin(\frac{\pi}{2}) + \beta \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2}) + t \sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) \ln(\sin(\frac{\pi}{2})) + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) \cos(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2})} \Big|_{\frac{\pi}{2}} =$$

$$1 = -\alpha + \frac{\pi}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

□

③-④ trovare e^{At} , $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P_{A_1}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(2-\lambda) + 1 = (\lambda-1)^2. \text{ T. Hamilton-Cayley}$$

$$A_1 \text{ soddisfa } (A_1 - \mathbb{1})^2 = 0. \text{ Dunque } A_1 = (A_1 - \mathbb{1}) + \mathbb{1}.$$

$$e^{A_1 t} = e^{(A_1 - \mathbb{1})t} e^{\mathbb{1}t} = e^t \left(\mathbb{1} + t(A_1 - \mathbb{1}) \right) = e^t \left((1-t)\mathbb{1} + tA_1 \right) =$$

$$= e^t \left(\begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

$$P_{A_2}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1; \lambda = \pm i \quad \boxed{\text{Metodo 1)}$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (-1-i)u_1 = 2u_2 \\ \frac{1}{2} u_1 - (1-i)u_2 = 0 \end{cases} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix} \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 0 \right)$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad \underline{\text{Prendiamo i v. lin. indip. come}}$$

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + i e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \frac{-\cos t - i \sin t}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i \cos t - \sin t}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{-\cos t + \sin t}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{-\sin t - \cos t}{2} \end{pmatrix}. \quad \text{Due sol. lin. indep. sono}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

(3)

Uma resolvente é $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t \end{pmatrix}$; $e^{At} e^{-}$

é a única resolvente: $e^{tA} = \mathbb{1}$. Per cui

$$e^{tA} = \Phi(t) C, \quad C = \Phi(0)^{-1}; \quad e^{tA} = \Phi(t) \Phi(0)^{-1}.$$

$$\det(\Phi(t)) = -2\cos t(\cos t + \sin t) - 2\sin t(\sin t - \cos t) =$$
$$= -2\cos^2 t - 2\cos t \sin t - 2\sin^2 t + 2\sin t \cos t = -2$$

$$\Phi^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t & -2\sin t \\ \cos t - \sin t & 2\cos t \end{pmatrix}; \quad \Phi^{-1}(0) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) \Phi(0)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ \sin t - \cos t & -\cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos t - 2\sin t & -4\sin t \\ 2\sin t & 2\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Metodo 2)

$$e^{tA} = \mathbb{1} + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}. \text{ Allora}$$

$$A^3 = -A; \quad A^4 = \mathbb{1}, \quad A^5 = A, \text{ etc. Per cui}$$

$$e^{tA} = \mathbb{1} + tA - \frac{t^2 \mathbb{1}}{2} - \frac{t^3 A}{3!} + \frac{t^4 \mathbb{1}}{4!} + \frac{t^5 A}{5!} + \dots =$$

$$= \mathbb{1} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) + A \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) =$$

$$= \mathbb{1} \cos(t) + A \sin(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t & -2\sin t \\ \sin t & \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

□

trovare quelle soluzioni $Y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = Y_0$;

siccome e^{tA} è risolvibile, $e^{0A} = I$

$e^{tA} Y_0$ è sol. l.c. $e^{tA} Y_0|_{t=0} = e^{0A} Y_0 = Y_0$. quindi basta moltiplicare e^{tA} per $Y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5) Trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} x' = y + j \\ y' = x + j \\ j' = x + y \end{cases}$$

Il sistema è omogeneo. È del tipo

$$Y' = AY, \text{ dove } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ j \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori di A $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$; si scompone

in $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$. -1 è radice doppia;

Vogliamo trovare l'autospazio relativo a -1 :

$$\begin{cases} a + b + c \\ " & " & " \\ " & " & " \end{cases}$$

cerchiamo a, b, c : $a + b + c = 1$

vediamo che se $c = 0 \Rightarrow a = -b$

$b = 0 \Rightarrow a = -c$, ovvero

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono autovettori lin. indep. di -1 . Quindi l'autosp. ha mult. 2. Invece, per $\lambda = 2$,

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è soluzione, per cui

$$u_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sol. lin. indep.}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{2t} \end{bmatrix} \text{ è matrice risolvibile.}$$

ESERCIZI (meno di base)

1

ES. 13.49

1. Consideriamo l'e.d. $y'' + 2y' + y = 0$.
Trova l'integrale generale. Trova un integrale particolare di
 $y'' + 2y' + y = te^{-t}$

Soluzione: il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$.
 $\lambda = -1$ è radice doppia, per cui due soluzioni
linearmente indipendenti sono
 $y_1 = e^{-t}, y_2 = te^{-t}$.

Con il metodo delle variazioni delle costanti cerchiamo
una soluzione particolare $\tilde{y}$ della forma

$$\tilde{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathcal{C}^1.$$

abbiamo visto come si ricavano c_1 e c_2 :

$$c_1 = \int \frac{-te^{-t}te^{-t}}{e^{-2t}} = -\int t^2 = -\frac{t^3}{3}$$
$$c_2 = \int \frac{te^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}} = \int t = \frac{t^2}{2}$$

$y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{-t}(e^{-t} - te^{-t}) - te^{-2t} = e^{-2t} - te^{-2t} - te^{-2t} = e^{-2t} - 2te^{-2t}$

$$\tilde{y} = -\frac{t^3}{3}e^{-t} + \frac{t^3}{2}e^{-t} = \frac{t^3}{6}e^{-t}. \quad \text{la soluzione generale}$$

$$y(t) = \alpha e^{-t} + \beta te^{-t} + \frac{t^3}{6}e^{-t}$$

2. Trovare tutte le funzioni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

- i) φ risolve $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t}$ sia su $]-\infty, 0[$ che su $]0, +\infty[$
- ii) φ è continua in $\mathbb{R}$
- iii) $\varphi(0) = 0$

Soluzione: consideriamo la semiretta $]0, +\infty[$. ($]-\infty, 0[$ sarà analogo, o peggio). Dal punto 1. conosciamo due soluzioni indipendenti y_1 e y_2 dell'omogenea:

$$y_1(t) = e^{-t}, \quad y_2(t) = te^{-t}.$$

Cerchiamo una sol. particolare $\tilde{y}$

$$\tilde{y} = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t).$$

$$c_1(t) = \int -\frac{e^{-t}}{t} \cdot te^{-t} \cdot e^{2t} = -\int 1 = -t$$

$$c_2(t) = \int \frac{e^{-t}}{t} e^{-t} e^{2t} = \int \frac{1}{t} = \ln(t). \quad \text{L'integrale particolare}$$

sarà $\tilde{y}(t) = -te^{-t} + t\ln(t)e^{-t}$. La soluzione generale

$$\text{sarà } y_+(t) = \alpha_+ e^{-t} + \beta_+ te^{-t} - te^{-t} + t\ln(t)e^{-t}.$$

$y_+ \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$. Calcoliamo $\lim_{t \rightarrow 0^+} y_+(t) = \alpha_+$, che quindi è finito.

Estendiamo per continuità y_+ a 0 definendo $y_+(0) := \alpha_+$.

$$y_+ \in \mathcal{C}([0, +\infty[).$$

y_- , la soluzione su $]-\infty, 0[$ si definirà in modo analogo a

y_+ . Siccome siamo nel semipiano negativo, osserviamo solo che

$$\int \frac{1}{t} = \ln(|t|) \quad \left(\frac{d}{dt} \ln(|t|) = \frac{1}{|t|} \cdot \text{sgn}(t) = \frac{1}{t} \right). \quad \text{Per cui}$$

$$y_-(t) = \alpha_- e^{-t} + \beta_- te^{-t} - te^{-t} + t\ln|t|e^{-t}.$$

(2)

Anche qui, $\lim_{t \rightarrow 0^-} y_-(t) = \alpha_-$, quindi possiamo estendere per continuit  y_- a 0, ponendo $y_-(0) = \alpha_-$. $y_- \in C([-\infty, 0])$.

Possiamo "incollare" y_+ e y_- in 0 per ottenere una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, imponendo che $\alpha_+ = \alpha_-$.

Infine, se vogliamo che $\phi(0) = 0$, dove $\phi = \begin{cases} y_+ & y > 0 \\ y_- & y < 0 \end{cases}$,

abbiamo inoltre $\alpha_+ = \alpha_- = 0$. Le soluzioni ϕ sono

$$\phi(t) = \begin{cases} \beta_- te^{-t} - te^{-t} + t \ln t e^{-t} & t \leq 0 \\ \beta_+ te^{-t} - te^{-t} + t \ln t e^{-t} & t \geq 0, \end{cases} \quad \beta_+, \beta_- \text{ arbitrarie.}$$

□

Es. 13.44

Consideriamo l'eq. $y'' + y = e^{-t^2}$

- i) Trovare le soluzioni con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$
(lasciare in forma integrale)

Soluzione: l'omogenea associata  

$$y'' + y = 0. \quad \text{il p.c.  }$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \pm i$$

due soluzioni indep. sono e^{it} , e^{-it} . Vogliamo pero due soluzioni reali. A partire da queste due, possiamo

definire $y_1 = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $y_2 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, ovvero

$y_1 = \cos(t)$, $y_2 = \sin(t)$. | Esse sono linearmente indep. su $\mathbb{C}$ ($\Rightarrow$ su $\mathbb{R}$).

Cerchiamo una soluzione particolare $\tilde{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$.

$$c_1(t) = \int \frac{-b(t)y_2'(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'} ; \quad \boxed{b(t) = e^{-t^2}}$$

$$c_2(t) = \int \frac{b(t)y_1'(t)}{y_1y_2' - y_2y_1'} ; \quad \boxed{y_1y_2' - y_2y_1' = \cos^2 t - \sin(t)(-\sin(t)) = 1} \Rightarrow$$

$$c_1(t) = - \int \sin(t) e^{-t^2} ;$$

$$c_2(t) = \int \cos(t) e^{-t^2} ; \text{ scegliamo ora un integrale indefinito qualunque,}$$

$$c_1(t) = - \int_0^t \sin(s) e^{-s^2} ds \quad \text{ma:}$$

$$c_2(t) = \int_0^t \cos(s) e^{-s^2} ds . \quad \text{Un integrale generale è quindi:}$$

$$y(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - \cos(t) \int_0^t \sin(s) e^{-s^2} ds + \sin(t) \int_0^t \cos(s) e^{-s^2} ds$$

$$\text{imponiamo } y(0) = y'(0) = 0$$

$$y(0) = \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$y'(t) = \beta \cos(t) + \sin(t) \int_0^t \sin(s) e^{-s^2} ds - \cos(t) \sin(t) e^{-t^2} + \cos(t) \int_0^t \cos(s) e^{-s^2} ds + \sin(t) \cos(t) e^{-t^2}$$

$$\downarrow$$

$$y'(0) = \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

□

Sie $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Determinare una matrice risolvibile Reale di $y' = Ay$
dobbiamo trovare due soluzioni indep. reali.

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 \Rightarrow 4-\lambda = \pm 3i \Rightarrow \lambda = 4 \pm 3i$$

due autovalori distinti. Determiniamo gli autospazi $\lambda_1 = 1 - 3i$
 $\lambda_2 = 1 + 3i$

$$d_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 4-4+3i & -3 \\ 3 & 4-4+3i \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

22:

$$\begin{pmatrix} 4-4-3i & -3 \\ 3 & 4-4-3i \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Due serie lineari indep. $\therefore$ sono

$$e^{(4-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e^{4+3i} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \text{and}$$

$$e^{4t}(\cos(3t) - i \sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e^{4t}(\cos(3t) + i \sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \text{etc.}$$

$$e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) - i \sin(3t) \\ i \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix} =: y_1, \quad e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) + i \sin(3t) \\ -i \cos(3t) + \sin(3t) \end{pmatrix} =: y_2 \quad \text{per ottenere due reali,}$$

Consideramos $\frac{y_1 + y_2}{2}$ e $\frac{y_1 - y_2}{2i}$ (de é equivalente a prendere

direttamente le porte reali e immaginarie di una delle due come
nuove soluzioni.

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{4t}}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ 2\sin(3t) \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \frac{e^{4t}}{2i} \begin{pmatrix} -2i\sin(3t) \\ 2i\cos(3t) \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} \quad \text{Una matrice reale}$$

Reale e dunque

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} \cos(3t) & -e^{4t} \sin(3t) \\ e^{4t} \sin(3t) & e^{4t} \cos(3t) \end{pmatrix}$$

2. Determinare le soluzioni $\varphi(t)$ di $y' = Ay$ t.c.

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Sappiamo che ogni soluzione } \varphi$$

si scrive $\Phi(t)C$, $C \in \mathbb{R}^2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ costante

(in poche parole, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ sono combinazioni lineari delle due soluzioni trovate).

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \cos(3t) & -e^{4t} \sin(3t) \\ e^{4t} \sin(3t) & e^{4t} \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero}$$

$$\varphi_1(t) = e^{4t} (e_1 \cos(3t) - e_2 \sin(3t))$$

$$\varphi_2(t) = e^{4t} (e_1 \sin(3t) + e_2 \cos(3t)) ; \text{ imponendo } \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1,$$

$$1 = e_1$$

$$1 = e_2, \quad \text{per cui} \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) - \sin(3t) \\ \sin(3t) + \cos(3t) \end{pmatrix}$$

□

ESERCIZIO PROPOSTO

4

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= 4 \end{aligned}$$

con: a) metodo di sostituzione
b) matrice esponenziale

$$a) \quad \begin{cases} y = 3x - x' \\ y' = 3x' - x'' \end{cases} \Rightarrow x'' - 3x' + 3x - x' + x = 0, \text{ cioè } \boxed{x'' - 4x' + 4x = 0}$$

il p. caratter. è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$. $\lambda = 2$ è
autovalore doppio. Due sol. sono

$$x_1 = e^{2t}, \quad x_2 = te^{2t}. \quad \text{Quindi la soluzione}$$

generale per $x(t)$ è $\boxed{x(t) = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t}}$. Per cui

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\alpha e^{2t} + 3\beta t e^{2t} - 2\alpha e^{2t} - \beta e^{2t} - 2\beta t e^{2t} \\ &= \alpha e^{2t} + \beta (t e^{2t} - e^{2t}). \end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \text{Imponiamo le c. iniziali:}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -1. \quad \text{Segue}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 - t \\ 4 - t \end{pmatrix}$$

b) Sia $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $Y' = AY$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P_A = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

λ ha molteplicità 2. In questo caso non riusciamo a trovare DIRETTAMENTE due sol. indipendenti per poi costruire una risolvente. Ma il $P_A(A)$ ha una forma adatta a trovare una matrice esponenziale, che è anch'essa una risolvente:

$$A = (A - 2I) + (2I). \text{ Quindi}$$

$$e^{At} = e^{(A-2I)t} e^{(2I)t}; \quad e^{2It} = e^{2t} I. \text{ Per cui}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{2t} I \cdot e^{(A-2I)t} = e^{2t} I \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A-2I)^k t^k}{k!} \right) = \\ &= e^{2t} I \cdot (I + t(A-2I) + 0 + \dots) = e^{2t} I \cdot (I - 2tI + tA) = \\ &= e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1-2t & 0 \\ 0 & 1-2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t & -t \\ t & t \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ogni sol. si scrive $e^{At} C$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Vogliamo che $e^{A \cdot 0} C = Y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, ma siccome $e^{A \cdot 0} = I$,
 $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Le soluzioni si quindi } Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 3-t \\ 4-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

ESERCIZI PROPOSTI PER CASA

1

13.32 Risolvere l'e.d. (2° ORDINE - VAR. COSTANTI)

- $y'' - 2y' + y = 0$
- $y'' - 2y' + 1 = 0$

13.33 Risolvere le e.d.

- $y'' - iy = 0$
- $y'' + iy = 0$

13.34 Trarre l'integrale generale delle seguenti e.d.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (i) $y'' + 4y' + 4y = 10x^3 e^{-2x}$ | (iv) $y'' - 2y' - 5y = 6e^{5x}$ |
| (ii) $y'' - 2y' + y = e^x$ | (v) $y'' + 4y = 4\cos 2x + 6\cos x + 8x^2 - 4x$ |
| (iii) $y'' + y = x \cos x$ | (vi) $y'' + 9y = 2\sin 3x + 4\sin x - 26e^{-2x} + 27x^3$ |

13.36 Determinare la soluzione di

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 1, \quad x(0) = 1, \quad x(\infty) = 0$$

3.37 (i) Risolvere, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'eq. diff.

$$y'' - 2ay' + 4y = e^{2x}$$

13.43 Si consideri l'e.d. $y'' - y = \frac{1}{\cosh^3 t}$ (*)

i) integrale generale dell'omogenea associata, in termini di funt. iperboliche

ii) integrale di (*) t.c. $y(0) = y'(0) = 0$ (sugg. $\sinh(\alpha - \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta - \cosh \alpha \sinh \beta$)

3.45 Si consideri l'e.d. $y'' - y' + y = (t+1)e^t$.

i) integrale generale in forma reale dell'omogenea associata

ii) integrale generale

iii) integrale particolare t.c. $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

13.52 Risolvere le e.d. (col metodo dello v. delle costanti)

1) $y'' - 3y' + 2y = e^t$

2) $y'' - 9y' + 18y = 1$

3) $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2t$

4) $y'' - y = 4te^t$

5) $y'' - 4y' = 5$

6) $y'' - y' + y = \sin(2t)$

7) $y'' + 4y = \cos(2t) + \cos(4t)$

SISTEMI LINEARI

13.71
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$$

i) Trovare una matrice esponenziale

(Sugger: $e^{tA} = \Phi(t)C$, $C \in \mathbb{M}_{n \times n}$: $I = \Phi(0)C \Rightarrow C = \Phi(0)^{-1}$
dove una qualsiasi altra matrice risulterà).

3.72
$$\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 12x_1 - 5x_2 \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0 \end{cases}$$

i) autovalori delle matrici del sistema

ii) Sono λ_1, λ_2 gli autovalori. Trovare $M \in \mathbb{M}_{n \times n}$ invertibile t.c. $A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1}$

iii) determinare e^{tA} e risolvere P.C.

iv) metodo di eliminazione.

3.73
$$\begin{cases} x_1' = 8x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 12x_1 - 5x_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.$$

i) Φ risolvete

ii) Risolvere P. Cauchy. Determinare e^{At} .

3.81 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

i) Determinare una matrice risolvete Reale di $y' = Ay$.

ii) Soluzione t.c. $y_1(0) = 1, y_2(0) = 3$.