

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

1

ES. 8.24 Calcolare $\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Soluzione: usiamo il cambio di variabile $x = r \cos t$, $y = r \sin t$,
quindi $\varphi(r, t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$; $\varphi^{-1}(D) = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{r^2 \cos^2 t}_{(x^2)} + \underbrace{r^2 \sin^2 t}_{(y^2)} \leq 1\}$
 $= \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq 1\}$, cioè

$$\varphi^{-1}(D) = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r \leq 1, 0 < t < 2\pi\} \quad (\text{ricordiamo che in generale,}$$

$r \in]0, +\infty[$, $t \in]0, 2\pi[$). In questo caso, la nostra condizione che definisce D , ovvero $x^2 + y^2 \leq 1$ si traduce nella condizione (nelle nuove coordinate) $r^2 \leq 1$, ma siccome $0 < r < +\infty$, questo significa $\boxed{0 < r \leq 1}$. Per cui l'integrale diventa

$$\int_{\varphi^{-1}(D)} e^r |\det \varphi'| dr dt$$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}, \Rightarrow \det \varphi' = r \cos^2 t + r \sin^2 t = r. \text{ Quindi}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 e^r \overset{|\det \varphi'|}{r} dr dt = \int_0^{2\pi} \left[e^r r \Big|_0^1 - \int_0^1 e^r dr \right] dt = \int_0^{2\pi} e - (e - 1) dt = \int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi}$$

□

Es. 825 | Calcolare la misura 2-dimensionale dell'insieme

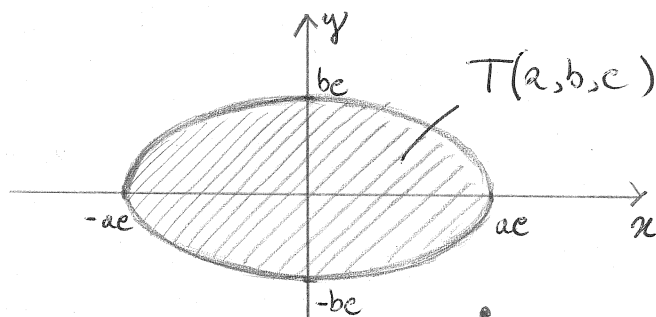
$$T(a,b,c) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\},$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \neq 0$ dati.

Soluzione: L'insieme $T(a,b,c)$ è un'ellisse di semiasse $|ae|$ e $|be|$ (siccome compaiono a^2, b^2, c^2 non è restrittivo supporre $a, b, c > 0$).

Vogliamo calcolare l'area dell'ellisse

$$\int_{T(a,b,c)} dx dy \quad \text{notiamo che}$$



possiamo scrivere $T(a,b,c) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{(ae)^2} + \frac{y^2}{(be)^2} \leq 1 \right\}.$

Questo ci suggerisce il cambio di variabile

$$\tilde{x} = \frac{x}{ae}$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{be}$$

Scriviamo la trasformazione: $x = \tilde{x}ae$
 $y = \tilde{y}be$

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}ae \\ \tilde{y}be \end{pmatrix}; \quad \varphi' = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & be \end{pmatrix}, \quad \text{da cui } \det \varphi' = abe^2.$$

Vediamo che è $\varphi^{-1}(T(a,b,c))$; si vede immediatamente che

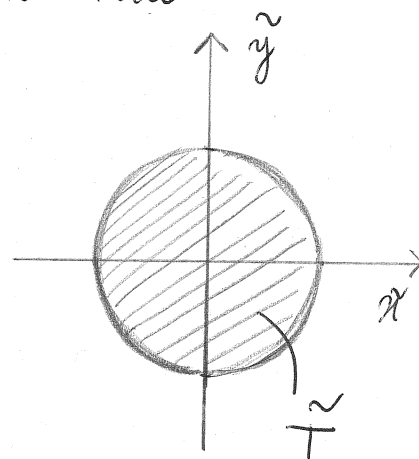
$$\tilde{T} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1 \right\} \quad \text{che è il disco unitario}$$

L'integrale diventa:

$$\int_{\tilde{T}} abe^2 d\tilde{x} d\tilde{y} = abe^2 \int_{\tilde{T}} d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad \text{e } \int_{\tilde{T}} d\tilde{x} d\tilde{y} \text{ è l'area}$$

del disco unitario, che vale π . Per cui:

$$\int_{T(a,b,c)} dx dy = \boxed{abe^2 \pi}$$



□

ES. 8.26

Calcolare $\int_D x^2 y^2 dx dy$ dove D

2

è la porzione del primo quadrante compresa fra le iperboli $xy=1$, $xy=2$ e le rette $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$, servendosi del cambiamento di variabile $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$.

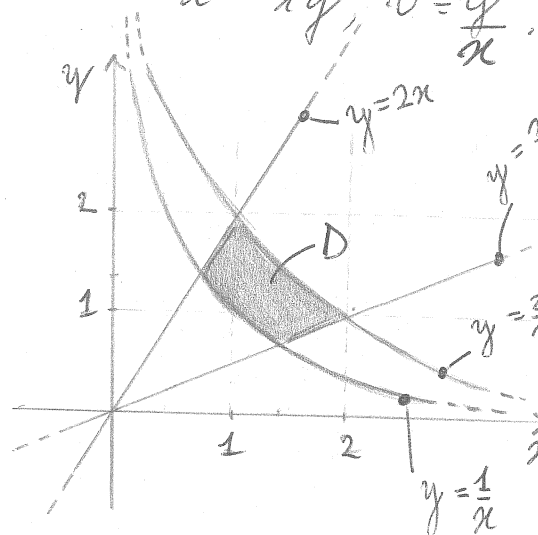
Soluzione:

Risolveremo il problema in due modi:

Primo modo: come abbiamo fatto

negli esercizi precedenti, cerchiamo la trasformazione φ . per trovarla, dobbiamo

poter scrivere $x = \varphi_x(u, v)$, $y = \varphi_y(u, v)$, cioè esprimere x, y in funzione di u, v . L'esercizio ci dà u, v in funzione di x, y (in pratica, vedremo nel secondo modo, ci sta dando φ^{-1}).



Notiamo che, per $(x, y) \in D$ si ha $x > 0, y > 0$ (siamo nel primo quadrante). Poiché per $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$, allora per $(x, y) \in D$, anche $u > 0, v > 0$. Cerchiamo di scrivere x, y in funzione di u, v :

$$\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{u}{x} \\ v=\frac{u}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{u}{x} \\ x=\sqrt{\frac{u}{v}} \end{cases}, \text{ per cui } \begin{cases} x=\sqrt{\frac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$$

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \sqrt{uv} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \text{ i posto il senso delle } \varphi!$$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{v} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}, \quad \det \varphi' = \frac{1}{2v}$$

Ci serve trovare $\varphi^{-1}(D)$; Scriviamo D per bene (in x ed y):

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad 1 \leq xy \leq 2 \right\}. \text{ Ma siccome } u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\varphi^{-1}(D) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq v \leq 2, \quad 1 \leq u \leq 2 \right\} \quad (\varphi^{-1}(D) \text{ è un rettangolo!})$$

Dobbiamo calcolare $\int_D x^2 y^2 dx dy$.

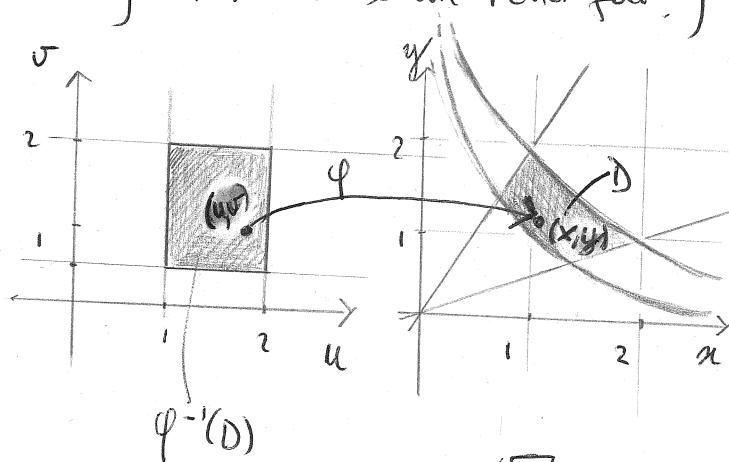
l'Integranda è $x^2 y^2$, cioè u^2 .

In definitiva:

$$\int_D x^2 y^2 dx dy = \int_{\varphi^{-1}(D)} u^2 \cdot \frac{1}{2v} du dv =$$

$$\int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u^2}{2v} dv \right) du = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 u^2 du \right) \cdot \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{v} dv \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^{u=2} \cdot \left[\ln(v) \right]_{v=\frac{1}{2}}^{v=2} =$$

$$= \frac{7}{6} \cdot 2 \ln(2) = \boxed{\frac{7}{3} \ln(2)}$$



$$\varphi(u, v) = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \sqrt{\frac{uv}{v}} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Secondo modo: il problema ci fornisce u, v in funzione di x, y . In pratica ci sta dando $\varphi^{-1}: D \rightarrow \varphi^{-1}(D)$.
 (Come prima, osserviamo che $x > 0, y > 0$ e $(x, y) \in D$, $u > 0, v > 0$ se $(u, v) \in \varphi^{-1}(D)$).

$$\varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \left(\varphi^{-1} \text{ associa ad } (x, y) \in D, \text{ il punto } \varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ in } \varphi^{-1}(D) \right)$$

$$(\varphi^{-1})' = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}; \quad \text{Noi vogliamo calcolare}$$

$$\int_D x^2 y^2 dx dy = \int_{\varphi^{-1}(D)} u^2 |\det \varphi'| du dv \quad \varphi^{-1}(D) \text{ l'abbiamo trovata (è il rettangolo } [1, 2] \times [1/2, 2])$$

Ci serve $|\det \varphi'|$. Noi abbiamo solo $(\varphi^{-1})'$.

$$\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}; \quad \text{ricordiamo che } \det(g^{-1})'(u, v) = \frac{1}{|\det g'(x(u, v), y(u, v))|}$$

nel nostro caso $g(x, y) = \varphi^{-1}(x, y)$. Per cui

$$\det \varphi' = \det ((\varphi^{-1})^{-1})'(u, v) = \frac{1}{|\det (\varphi^{-1})'(x(u, v), y(u, v))|};$$

$\det (\varphi^{-1})'$ lo troviamo dalla formula di $(\varphi^{-1})'$ scritta prima

$$\det (\varphi^{-1})' = 2 \frac{y}{x} = 2v; \quad \text{per cui } \det \varphi' = \frac{1}{2v}$$

L'integrale diventa

$$\int_1^2 \int_{1/2}^2 \frac{u^2}{2v} dv du = \frac{7}{3} \ln(2)$$

□

ESERCIZIO 7.19

Calcolare $\int_E \sqrt{x^2 - y^2} \, dx \, dy$

dove E è la regione del semipiano $x > 0$ compresa tra le iperboli di equazione $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2$ e le rette di equazioni $y = px$, $y = qx$ con $-1 < p < q < 1$

Soluzione:

L'insieme E è simile a quello dell'esercizio precedente (a meno di una rotazione attorno all'origine). Descriviamo E :

$$E = \{(x, y) : px \leq y \leq qx, \sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{2+y^2}\}$$

(notiamo che essendo $x > 0$, possiamo descrivere i due rami di iperbole come $x = \sqrt{1+y^2}$, $x = \sqrt{2+y^2}$),

oppure

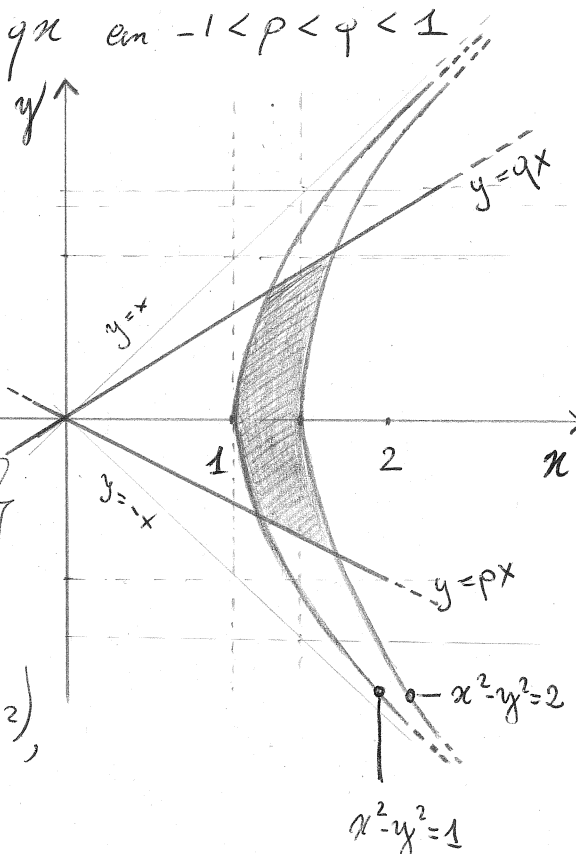
$$E = \{(x, y) : px \leq y \leq qx, 1+y^2 \leq x^2 \leq 2+y^2, x > 0\}$$

$$= \{(x, y) : p \leq \frac{y}{x} \leq q, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2, x > 0\}. \text{ Questo ci}$$

suggerisce di porre $u = x^2 - y^2$, $v = \frac{y}{x}$, ricordando $x > 0$.

Esprimiamo x, y in termini di u, v .

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - x^2 v^2 \\ y = vx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{u}{1-v^2} \\ y = vx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{1-v^2}} \quad (x > 0) \\ y = \sqrt{\frac{uv^2}{1-v^2}} \end{cases}$$



Notiamo che $u = x^2 - y^2$, per $(x, y) \in E$, e t.c. 4

$1 \leq u \leq v$, quindi $u > 0$. Poi, siccome $-1 < p \leq v = \frac{y}{x} \leq q < 1$ si ha che $0 \leq v^2 < 1$, per cui le quantità sotto radice sono ben definite. Abbiamo la nostra trasformazione

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u}{1-v^2}} \\ \sqrt{\frac{uv^2}{1-v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \text{Ci resta da determinare}$$

$\varphi^{-1}(E)$, ma è immediato (abbiamo scelto u e v apposta)

$$\varphi^{-1}(E) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R} : p \leq v \leq q, 1 \leq u \leq 2 \right\}, \text{ è un rettangolo.}$$

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u(1-v^2)}} & \frac{\sqrt{u}}{(1-v^2)} \sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}} \sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}} & \frac{\sqrt{u}}{(1-v^2)\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det \varphi'(u, v) = \frac{1}{2(1-v^2)} \quad (\text{che vediamo essere } > 0 \text{ poiché } 0 \leq v^2 < 1).$$

= Nota = l'altro modo per calcolare $\det \varphi'$ è il seguente: inizialmente avevamo u e v in termini di x ed y

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = \frac{y}{x}. \quad \text{Calcoliamo lo Jacobiano (in } x \text{ ed } y) \text{ di questa trasformazione}$$

$$\text{che è } \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}; \quad \text{il determinante di tale Jacobiano è}$$

$$2\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right). \quad \text{Esprimendolo poi in termini di } u \text{ e } v:$$

$$\text{esso è } 2(1-v^2). \quad \text{Allora } |\det \varphi'| = \frac{1}{|2(1-v^2)|} = \frac{1}{2(1-v^2)}.$$

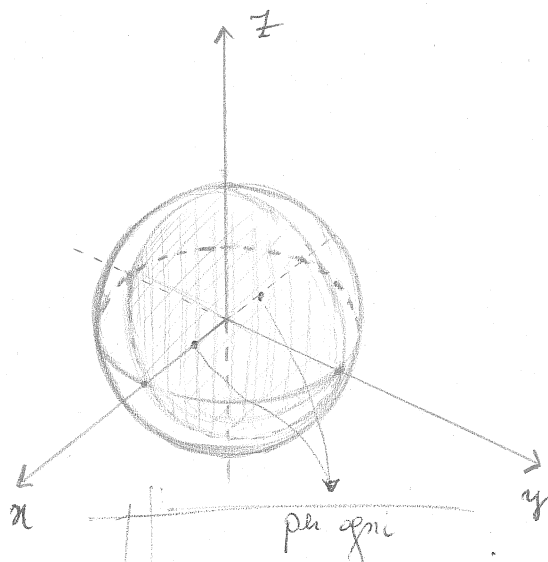
in pratica, se abbiamo la nostra trasformazione che ci è
 data come $u, v = g(x, y)$ (e mm, come al solito, $(x, y) = f(u, v)$),
 troviamo lo Jacobiano della trasformazione (in x, y), calcoliamo
 il determinante, lo esprimiamo in termini di u, v , e
 consideriamo il reciproco del modulo. Questo è il modulo
 dello Jacobiano della trasformazione $(x, y) = f(u, v)$ che serve nel cambio
 di variabile.

Per cui:

$$\begin{aligned} \int_E \sqrt{x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \int_{\varphi^{-1}(E) = [1, 2] \times [p, q]} \frac{\sqrt{u}}{2(1-v^2)} \, du \, dv = \\ &= \left(\int_1^2 \sqrt{u} \, du \right) \left(\int_p^q \frac{1}{2(1-v^2)} \, dv \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=1}^{u=2} \cdot \left(\int_p^q \frac{1}{2(1+v)} + \frac{1}{2(1-v)} \, dv \right) \\ &= \frac{(2\sqrt{2}-1)}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_p^q \frac{1}{(1+v)} \, dv + \int_p^q \frac{1}{(1-v)} \, dv \right) = \\ &= \frac{(2\sqrt{2}-1)}{6} \cdot \left[\ln(1+v) - \ln(1-v) \right]_{v=p}^{v=q} = \frac{(2\sqrt{2}-1)}{6} \cdot \left[\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \right]_{v=p}^{v=q} = \\ &= \frac{(2\sqrt{2}-1)}{6} \cdot \left(\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) - \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right) \right) = \boxed{\frac{(2\sqrt{2}-1)}{6} \cdot \ln\left(\frac{(1+q)(1-p)}{(1-q)(1+p)}\right)} \end{aligned}$$



Sia B la palla unitaria in $\mathbb{R}^3$. Calcolare

$$\int_B x \, dx \, dy \, dz$$


Soluzione:

$$\int_B x \, dx \, dy \, dz = \int_{B \cap \{x > 0\}} x \, dx \, dy \, dz + \int_{B \cap \{x < 0\}} x \, dx \, dy \, dz.$$

Sia il numero $a \in \mathbb{R}$ il valore dell'integrale $\int_{B \cap \{x > 0\}} x \, dx \, dy \, dz$:

$$a := \int_{B \cap \{x > 0\}} x \, dx \, dy \, dz.$$

Calcoliamo $\int_{B \cap \{x < 0\}} x \, dx \, dy \, dz$.

operiamo il cambio di variabile $\tilde{x} = -x$,
 $\tilde{y} = y$,
 $\tilde{z} = z$,

cioè, $x = -\tilde{x}$, $y = \tilde{y}$, $z = \tilde{z}$; $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} -\tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$.

$$\varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \det \varphi' = -1.$$

$|\det \varphi'| = 1$. L'integrale (notiamo che

$$\varphi^{-1}(B \cap \{x < 0\}) = B \cap \{\tilde{x} > 0\} :$$

$$B \cap \{x < 0\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x < 0\} \Rightarrow$$

$$\varphi^{-1}(B \cap \{x < 0\}) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1, -\tilde{x} < 0 \Rightarrow \tilde{x} > 0\}$$

per ogni coppia di punti (x, y, z) e $(-x, y, z)$ l'integrande f è $x, -x$
 $\hookrightarrow m(x, y, z) \quad \hookrightarrow m(-x, y, z)$.

Il dominio B è simmetrico in x :

per ogni punto $(x, y, z) \in B \Rightarrow$

onde $(-x, y, z) \in B$.

per cui l'integrale sulle "calotte" $\{x > 0\} \cap B$ sarà l'opposto di quello sulle calotte $\{x < 0\} \cap B$.

Quindi l'integrale su B sarà nullo.

$$\int_{B \cap \{x < 0\}} x dx dy dz = - \int_{B \cap \{x > 0\}} \tilde{x} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}.$$

ma $-\int_{B \cap \{x > 0\}} \tilde{x} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} = -a$, per definizione di a .

Per cui $\int_B x dx dy dz = a - a = 0$

□

Es. 8.28 Calcolare l'integrale

$$\int_{A_e} \frac{1}{1+3x^2+y^2} dx dy, \text{ dove } A_e = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2 \leq e^2\}.$$

$e > 0$

Soluzione : L'insieme A_e è un'ellisse di semiasse $(\frac{e}{\sqrt{3}}, e)$.

Come abbiamo visto nell'es. 8.25,

con un opportuno cambiamento di coordinate,

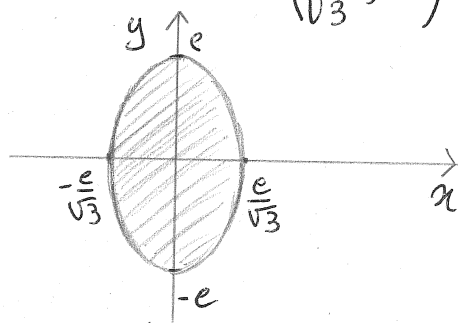
possiamo ridurre ad un integrale sul

disco unitario. Inoltre, per calcolare quest'ultimo

integrale, possiamo passare a coordinate polari. In pratica

faremo due cambi di coordinate. (Vedremo come osservare,

che in realtà questo corrisponde ad un unico cambio di coordinate, dette coordinate ellittico-polari).



Vediamo che

6

$$A_e = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Allora viene naturale porre $\tilde{x} = \frac{\sqrt{3}}{c} x$, $\tilde{y} = \frac{y}{c}$. Scriviamo x, y in funzione di $\tilde{x}, \tilde{y}$ (per poter scrivere la trasformazione $\varphi: \varphi^{-1}(A_e) \rightarrow A_e$).

$$x = \frac{c}{\sqrt{3}} \tilde{x}, \quad y = c \tilde{y}; \quad \text{per cui}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{3}} \tilde{x} \\ c \tilde{y} \end{pmatrix}; \quad \varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}; \quad \det \varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{c^2}{\sqrt{3}} (> 0)$$

$$\varphi^{-1}(A_e) = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1 \right\} \text{ è il disco unitario.}$$

Quindi

$$\int_{A_e} \frac{1}{1+3x^2+y^2} dx dy = \int_{\varphi^{-1}(A_e) =: D} \frac{1}{1+c^2(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{3}} d\tilde{x} d\tilde{y}; \quad \text{è l'integrale}$$

$$\text{della funzione } \frac{1}{1+c^2(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{3}} \text{ sul disco } \left\{ \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1 \right\} =: D$$

Ora vediamo che è conveniente un'ulteriore cambio di coordinate (perché abbiamo integrali su dischi - o su tutto $\mathbb{R}^2$ - dove spesso puntiamo del tipo x^2+y^2 , etc., conviene sempre passare a coordinate polari). Poniamo dunque

$$\tilde{x} = r \cos t, \quad \tilde{y} = r \sin t; \quad \text{qui abbiamo già la nostra trasformazione}$$

$$g(r, t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right); \quad \det g' = r \quad (\text{già visto}).$$

Inoltre sappiamo che $g^{-1}(D) =]0, 1[\times]0, 2\pi[$.

Quindi

$$\int_D \frac{1}{1+e^2(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)} \cdot \frac{e^2}{\sqrt{3}} d\tilde{x}d\tilde{y} = \left(\text{ricordiamo } \begin{matrix} \tilde{x}^2+\tilde{y}^2 = \\ r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2 \end{matrix} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e^2 r}{\sqrt{3}(1+e^2 r^2)} dr dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{2e^2 r}{1+e^2 r^2} dr dt = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \int_0^1 \frac{2e^2 r}{1+e^2 r^2} dr = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \int_{f(0)=0}^{f(1)=e^2} \frac{df}{1+f} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\ln(1+f) \right]_{f=0}^{f=e^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln(1+e^2)$$

$\uparrow e^2 r^2 = f$
 $2e^2 r dr = df$

$$= \left| \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln(1+e^2) \right|$$

Nota: i due cambi di variabili successivi possono essere incorporati in un unico cambio di variabile: le coordinate ellittiche - piani (infatti si passa dall'ellisse al disco mediante delle isometrie, e poi dal disco alle coordinate piane, cioè quello che abbiamo fatto nell'esercizio):

consideriamo l'ellisse $E(a,b) = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ ($a > 0, b > 0$)
 (se abbiamo a che fare con delle ellissi, riportiamole sempre a questa forma canonica: riassesteremo prima il cambio di coordinate giusto).

A punto punto operiamo il cambio di coordinate 17

$$\begin{aligned} x &= ar \cos t \\ y &= br \sin t \end{aligned} ; \text{ la trasformazione è } \varphi(r,t) = \begin{pmatrix} ar \cos t \\ br \sin t \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(r,t) = \begin{pmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \det \varphi'(r,t) = abr (> 0).$$

Ritroviamo qual è $\varphi^{-1}(E(0,b))$;

$$E(0,b) = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} ; \frac{x}{a} = r \cos t, \frac{y}{b} = r \sin t \Rightarrow$$

le condizioni $r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2 \leq 1$. Siccome $r > 0$,
le condizioni r su r , ed è $0 < r \leq 1$. $t \in]0, 2\pi[$.

Per cui

$$\varphi^{-1}(E(0,b)) = \left\{ (r,t) : 0 < r \leq 1, 0 < t < 2\pi \right\}. \text{ Per cui}$$

$$\int_{E(0,b)} f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(\varphi(r,t)) ab r dr dt.$$

Nel caso specifico dell'esercizio, $a = \frac{e}{\sqrt{3}}$, $b = e$,

$$f(\varphi(r,t)) = \frac{1}{1+e^2 r^2} \text{ (si ricava subito). Per cui otteniamo}$$

l'ultimo integrale che abbiamo calcolato con questo solo
cambio di coordinate



ES. 7.24

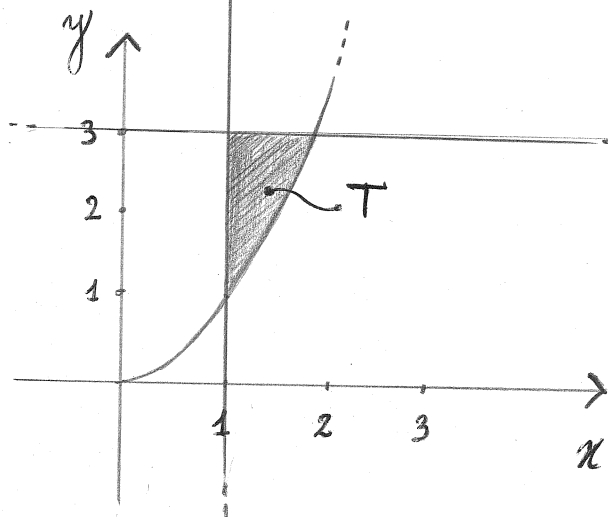
Calcolare $\int_T x^2(y-x^3)e^{y+x^3} dx dy$, dove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}$$

usando il cambiamento di variabili $u = y - x^3$, $v = y + x^3$.

Soluzione:

Abbiamo (u, v) scritti in funzione di (x, y) . Vorremmo trovare φ che descriva (x, y) in funzione di (u, v) per poi determinare $|\det \varphi'(u, v)|$.



Possiamo determinare $|\det \varphi'(u, v)|$ senza dover necessariamente descrivere φ .

Abbiamo $g(x, y) = \begin{pmatrix} y - x^3 \\ y + x^3 \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$.

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 1 \end{pmatrix}; \det g'(x, y) = -6x^2; |\det g'(x, y)| = 6x^2 > 0 \text{ per } x \geq 1.$$

ora dobbiamo scrivere $|\det g'(x, y)|$ in funzione di u e v .

Dalle formule per u e v vediamo che $u + v = 2y$ e $u - v = -2x^3$.

Non c'è un modo immediato per scrivere x^2 in funzione di u e v . Per cui dobbiamo trovare una formula per x :

$$x^3 = \frac{v - u}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{v - u}{2}\right)^{1/3} \text{ (ricordiamo che } x > 0 \text{ e } v - u (= 2x^3) > 0)$$

Per cui $x^2 = \left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Quindi $|\det \varphi'(x(u,v), y(u,v))| = \boxed{8}$
 (' $\det$ ' scritto in funzione di u, v)

$= 6\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Per cui

$|\det \varphi'(u,v)| = \frac{1}{6\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}$. Cerchiamo ora $\varphi^{-1}(T)$.

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}$. Sceiamo $y = \frac{u+v}{2}$ e
 $x^3 = \frac{v-u}{2}$, si ha

$\frac{v-u}{2} \leq \frac{v+u}{2} \leq 3$; Sceiamo $x = \left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, si ha $\left(\frac{v-u}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \geq 1$, cioè

$\frac{v-u}{2} \geq 1$. In definitiva:

$\varphi^{-1}(T) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{v-u}{2} \leq \frac{v+u}{2} \leq 3, \frac{v-u}{2} \geq 1\}$ Riscrivendo in

maniera più semplice: $\frac{v-u}{2} \leq \frac{v+u}{2} \leq 3 \Leftrightarrow v-u \leq v+u \leq 6$ e

$v-u \geq 2$, cioè (insieme) $2 \leq v-u \leq v+u \leq 6$, ovvero

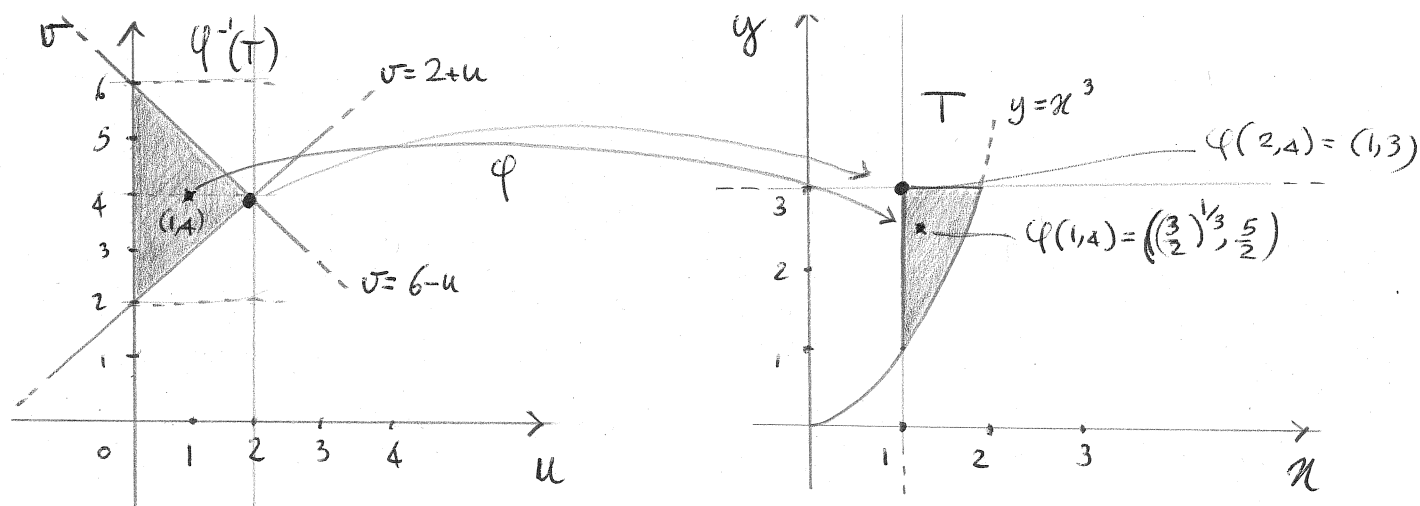
$2-v \leq -u \leq u \leq 6-v$. Innanzitutto $(-u \leq u \Rightarrow u \geq 0)$ questo significa

$2-v \leq -u \leq 0$ e $0 \leq u \leq 6-v$, cioè $0 \leq u \leq v-2$; Sommando, otteniamo

$0 \leq 2u \leq 4$, cioè $0 \leq u \leq 2$. Infine, $v \geq u+2$ e $v \leq 6-u$.

Quindi $\varphi^{-1}(T) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, u+2 \leq v \leq 6-u\}$

Disegniamo $\varphi^{-1}(T)$



Poniamo al calcolo dell'integrale

$$\int_T x^2(y-x^3)e^{y+x^3} dx dy = \int \underbrace{\left(\frac{v-u}{2}\right)^{2/3}}_{\varphi^{-1}(\tau)} \cdot u \cdot e^v \cdot \frac{1}{6\left(\frac{v-u}{2}\right)^{2/3}} du dv =$$

(ricordiamo $y-x^3=u$, $y+x^3=v$, $x^2=\left(\frac{v-u}{2}\right)^{2/3}$, $|\det \varphi'| = \frac{1}{6\left(\frac{v-u}{2}\right)^{2/3}}$)

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 \left(\int_{2+u}^{6-u} u e^v dv \right) du = \frac{1}{6} \int_0^2 u \cdot [e^v]_{v=2+u}^{v=6-u} du =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^2 u e^6 e^{-u} - u e^2 e^u du = \frac{1}{6} \left[e^6 \int_0^2 u e^{-u} du - e^2 \int_0^2 u e^u du \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^6 \left(-u e^{-u} \Big|_{u=0}^{u=2} + \int_0^2 e^{-u} du \right) - e^2 \left(u e^u \Big|_{u=0}^{u=2} - \int_0^2 e^u du \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^6 \left(-2e^{-2} - e^{-u} \Big|_{u=0}^{u=2} \right) - e^2 \left(2e^2 - e^u \Big|_{u=0}^{u=2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^6 \left(-2e^{-2} - e^{-2} + 1 \right) - e^2 \left(2e^2 - e^2 + 1 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^6 \left(-3e^{-2} + 1 \right) - e^2 \left(e^2 + 1 \right) \right] = \frac{1}{6} \left(-3e^4 + e^6 - e^4 - e^2 \right) = \boxed{\frac{1}{6}e^6 - \frac{2}{3}e^4 - \frac{1}{6}e^2}$$

□

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 2x \leq y \leq 3x, 2x \leq 1-y \leq 4x\}$

sia $(u, v) = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ così definita:

$u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{1-y}{x}$. Usando un opportuno cambio di variabile, calcolare $\int_D \frac{dx dy}{xy^2}$.

Soluzione: (disegneremo la regione D insieme al grafico di $\varphi^{-1}(D) = g(D)$)

Ci è data la trasformazione $(x, y) \mapsto g(x, y) = (u, v)$, cioè u, v espresse come funzioni di x, y . Vorremo le sue inverse (in D) che ci darà (x, y) in funzione di (u, v) (ovvero la φ che servirà per il cambio di variabile).

Possiamo cercare la φ , e quindi cercare di scrivere x, y in funzione di u e v , e poi calcolare $|\det \varphi'(u, v)|$ (lungo), oppure procedere come segue:

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \frac{1-y}{x} \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \quad g'(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{(1-y)}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

$\det g'(x, y) = \frac{1}{x^3}$ (> 0 siccome $x > 0$ in D). Notiamo che $u+v = \frac{1}{x}$,

per cui $(u+v)^3 = \frac{1}{x^3}$. Esprimiamo $\det g'(x, y)$ in funzione di

u e v : $\det g'(x(u, v), y(u, v)) = (u+v)^3$. Infine, $|\det \varphi'(u, v)| = \frac{1}{|\det g'(x(u, v), y(u, v))|}$

quindi $|\det \varphi'(u, v)| = \frac{1}{(u+v)^3}$ (essendo $u+v = \frac{1}{x}$ e $x > 0$ su $D \Rightarrow u+v > 0$).

dove φ è l'inversa di g (cioè il diffeomorfismo che dà (x, y) in funzione di u e v).

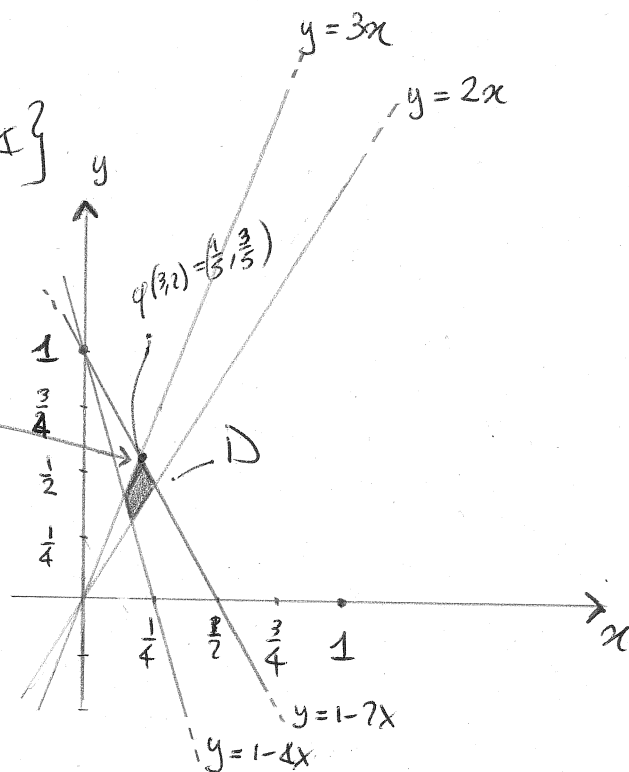
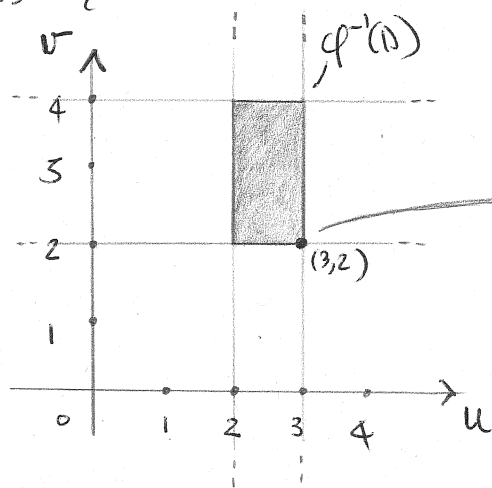
Proviamo ora di descrivere $\varphi^{-1}(D)$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 2x \leq y \leq 3x, 2x \leq 1-y \leq 4x\}; \text{ siccome}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x \leq y \leq 3x \Rightarrow (x > 0) \quad 2 \leq \frac{y}{x} \leq 3 \\ 2x \leq 1-y \leq 4x \Rightarrow (x > 0) \quad 2 \leq \frac{1-y}{x} \leq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} u = \frac{y}{x} \\ v = \frac{1-y}{x} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \leq u \leq 3 \\ 2 \leq v \leq 4 \end{array}$$

per cui

$$\varphi^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq u \leq 3, 2 \leq v \leq 4\}$$



Calcoliamo l'integrale

$$\begin{aligned} \int_D \frac{dx dy}{xy^2} &= \int_{\varphi^{-1}(D)} \frac{(u+v)^3}{u^2} \cdot \frac{1}{(u+v)^3} du dv, \quad \left(\begin{array}{l} u = \frac{y}{x} \Rightarrow u^2 = \frac{y^2}{x^2} \\ x = \frac{1}{u+v} \Rightarrow \frac{u^2}{(u+v)^3} = \frac{y^2}{x^2} \cdot x^3 = xy^2 \end{array} \right) \\ &= \int_2^3 \left(\int_2^4 \frac{1}{u^2} dv \right) du = 2 \int_2^3 \frac{1}{u^2} du = 2 \left[-\frac{1}{u} \right]_{u=2}^{u=3} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

□

ES. 8.31 | Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; si ponga

10

$$E(a, b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2; a < z < b\}$$

i) Descrivere $E(a, b)$ e disegnarlo, distinguendo $a < 0 < b$ e $0 \leq a < b$.

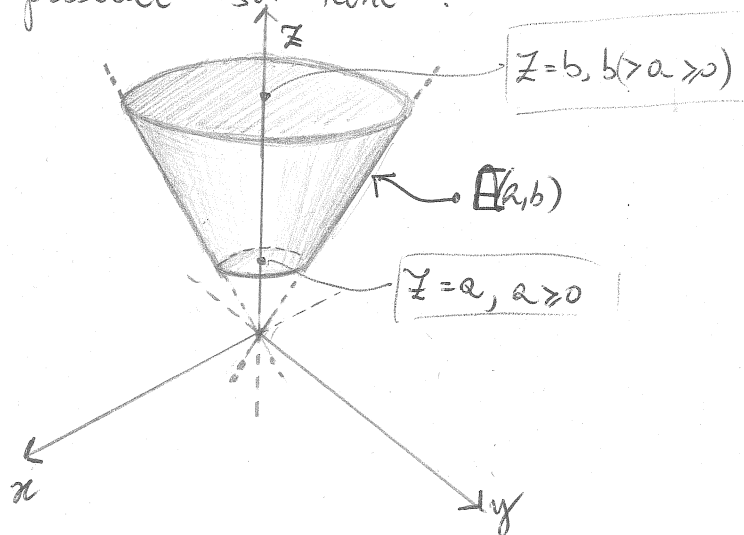
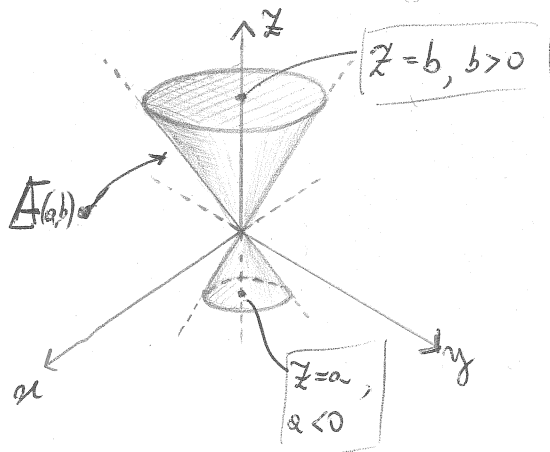
ii) Calcolare $\int_{E(a, b)} \frac{z}{1+x^2+y^2} dx dy dz$; $\int_{E(a, b)} \frac{dxdydz}{1+x^2+y^2}$.

iii) Calcolare $\int_A \frac{z}{1+x^2+y^2} dx dy dz$ dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y^2 < (z-1)^2, 0 < z < 1\}$.

Soluzioni:

i) L'equazione $z^2 = x^2 + y^2$ descrive la superficie di un cono (entrambe le folie, sia per $z \geq 0$ che per $z \leq 0$) con vertice in $(0, 0, 0)$ e con la disuguaglianza $x^2 + y^2 < z^2$ indica la regione interna alla superficie conica; la superficie stessa non è nell'insieme in quanto la disuguaglianza è stretta.

Le disuguaglianze $a < z < b$ indicano che tale cono viene tagliato ad altezza a e b da due piani paralleli al piano xy . Disegniamo due possibili situazioni:



ii) Fissiamoci ad una punta $z \in]a, b[$; la z -sezione di $E(a, b)$ è il disco $D(z)$ dato da

$$D(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < z^2\} \text{ cioè il disco centrato in } (0, 0)$$

e raggio $|z|$ (ricordiamo che $a < z < b$, ma a può essere < 0 , oppure anche $a, b < 0$, per cui possiamo considerare a seconda dei valori di a e b anche punte z negative - vedi figure del punto (i)). Per cui

$$\int_{E(a, b)} \frac{z}{1+x^2+y^2} dx dy dz = \int_a^b z \left(\int_{D(z)} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \right) dz.$$

Consideriamo $\int_{D(z)} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$. Esso è un integrale sul disco

in $\mathbb{R}^2$ di centro $(0, 0)$ e raggio $|z|$. (z è fissato: stiamo calcolando l'integrale su una specifica z -sezione: z è un parametro qui).

$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < z^2\}$. Nell'integranda compare $x^2 + y^2$.

Quindi si vede che è conveniente passare a coordinate polari

nel piano: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. $\varphi(r, t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$, $\det \varphi' = r$.

Così $\varphi^{-1}(D(z))$. Siccome $x^2 + y^2 < z^2 \Rightarrow r^2 < z^2$, cioè $0 < r < |z|$.

Per cui $\varphi^{-1}(D(z)) = \{(r, t) : 0 < r < |z|, 0 < t < 2\pi\}$.

$$\int_{D(z)} \frac{1}{1+x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{|z|} \frac{r}{1+r^2} dr = 2\pi \cdot \int_0^{|z|} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2r}{1+r^2} dr = \pi \int_{f(0)=0}^{f(|z|)=z^2} \frac{df}{1+f} =$$

$$= \pi \left[\ln(1+f) \right]_{f=0}^{f=z^2} = \pi \ln(1+z^2).$$

Questo è l'integrale sulle z -sezioni.

Quindi

11

$$\int_{E(a,b)} \frac{z}{1+x^2+y^2} dx dy dz = \int_a^b \pi z \ln(1+z^2) dz = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2z \ln(1+z^2) dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{f(a)=1+a^2}^{f(b)=1+b^2} \ln(f) df = \left(\int \ln u du = u \ln u - u \right) =$$

$$\begin{aligned} f &= 1+z^2 \\ df &= 2z dz \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[f \ln(f) - f \right]_{f=1+a^2}^{f=1+b^2} = \left[\frac{\pi}{2} \left[(1+b^2) (\ln(1+b^2) - 1) - (1+a^2) (\ln(1+a^2) - 1) \right] \right]$$

l'altro integrale

$$\int_{E(a,b)} \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2} = \int_a^b \pi \ln(1+z^2) dz = (\text{per parti}) = \pi z \ln(1+z^2) \Big|_{z=a}^{z=b}$$

$$- \pi \int_a^b \frac{z}{1+z^2} \cdot 2z dz = \pi (b \ln(1+b^2) - a \ln(1+a^2)) - \pi \int_a^b \frac{2z^2}{1+z^2} dz =$$

$$= \pi (b \ln(1+b^2) - a \ln(1+a^2)) - 2\pi \left(\int_a^b dz - \int_a^b \frac{1}{1+z^2} dz \right) \left[\frac{z^2}{1+z^2} = \frac{z^2+1-1}{1+z^2} = 1 - \frac{1}{1+z^2} \right]$$

$$= \left[\pi (b \ln(1+b^2) - a \ln(1+a^2)) - 2\pi(b-a) + 2\pi(\arctan(b) - \arctan(a)) \right]$$

iii) In questo caso vorremmo poterci ricondurre ad un integrale simile a quello calcolato al punto (ii).

$$A = \{(x, y, z) : 3x^2 + y^2 < (z-2)^2, \quad 0 < z < 1\}. \text{ Vogliamo una}$$

combinazione di coordinate q tale che $q^{-1}(A)$ sia un insieme del tipo $E(a, b)$ dei primi due punti

osserviamo che questo può essere ottenuto ponendo

$$\tilde{x} = \sqrt{3}x; \quad \tilde{y} = y; \quad \tilde{z} = z-2. \quad \text{Infatti in queste mosse,}$$

la condizione $3x^2 + y^2 < (z-2)^2$, $0 < z < 1$ sulle (x, y, z)

diventa $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 < \tilde{z}^2$, $-2 < \tilde{z} < 1$. In pratica

" $\varphi^{-1}(A) = E(-2, -1)$ ", cioè l'insieme $E(a, b)$ con $a = -2$, $b = -1$.

Scriviamo la trasformazione $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Dobbiamo esprimere (x, y, z) in funzione di $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$:

$$x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{3}}; \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z} + 2$$

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{x}/\sqrt{3} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} + 2 \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$\varphi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det \varphi' = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (> 0).$$

Pertanto

$$\int_A \frac{z}{1+3x^2+y^2} dx dy dz = \int_{\varphi^{-1}(A) = E(-2, -1)} \frac{\tilde{z}+2}{1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{E(-2, -1)} \frac{\tilde{z}}{1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{E(-2, -1)} \frac{1}{1+\tilde{x}^2+\tilde{y}^2} d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad \text{Questi due}$$

integrali sono stati calcolati in (ii): dobbiamo solo sostituire i valori

$a = -2, b = -1$:

$$\int_A \frac{z}{1+3x^2+y^2} dx dy dz = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[2(\ln(2) - 1) - 5(\ln(5) - 1) \right] + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(-\ln(2) + 2\ln(5) \right) - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctan}(2) - \operatorname{arctan}(1) \right]$$

□

Sia $\phi:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ definita da $\phi(x, y) = (xy, xy^2)$

i) Mostrare che ϕ è $\mathcal{C}^1$, invertibile e con inversa $\mathcal{C}^1$; determinarla.

ii) Usare il cambio di variabile $u = xy, v = xy^2$ per calcolare

$$\int_R xy^2 \ln xy \, dx \, dy,$$

dove R è la regione^(*) delimitata dalle curve $xy=1$, $xy=2$, $xy^2=1$, $xy^2=2$. ^(*) del 1° quadrante ($x>0, y>0$)

Soluzione:

$$i) \phi'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}; \det \phi'(x, y) = xy^2;$$

chiaramente $\phi \in \mathcal{C}^1$. In più, $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\det \phi' = xy^2 \neq 0$ (>0). Per cui, per il T. di inversione locale esse è invertibile e l'inversa è di classe $\mathcal{C}^1$.

Chiamiamo $\varphi = \phi^{-1}$ l'inversa di ϕ . Se $(u, v) = \phi(x, y)$ (cioè $u = xy, v = xy^2$), per trovare φ , ovvero ϕ^{-1} , esprimiamo

(x, y) in funzione di (u, v) . Si ha che $\frac{v}{u} = \frac{xy^2}{xy} = y$;

Poi, siccome $u = xy$ e $y = \frac{v}{u} \Rightarrow x = \frac{u^2}{v}$; per cui

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{v} \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ è l'inversa di } \phi.$$

ii) Se usiamo il c. di variabile $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{v} \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix}$, si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}; \det \varphi'(u,v) = \frac{1}{v} (>0).$$

Descriviamo R . Le curve che lo delimitano (siccome siamo nelle parti di piano $x>0, y>0$) sono

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \sqrt{\frac{2}{x}}$. Vediamone le intersezioni $(\frac{1}{x} \text{ e } \frac{2}{x})$, $(\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ e } \sqrt{\frac{2}{x}})$ non si intersecano.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, x>0 \Leftrightarrow x=1 (\Rightarrow y=1)$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}}, x>0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} (=y=2)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, x>0 \Leftrightarrow x=4 (=y=\frac{1}{2})$$

$$\frac{2}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}}, x>0 \Leftrightarrow x=2 (=y=1)$$

$$\text{inoltre: } \sqrt{\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x>0, \quad \frac{2}{x} > \frac{1}{x} \quad \forall x>0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x}, \quad x > 1,$$

$$\sqrt{\frac{2}{x}} < \frac{2}{x}, \quad 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{2}{x}} > \frac{2}{x}, \quad x > 2$$

Descrivere R è un po' macchinoso:

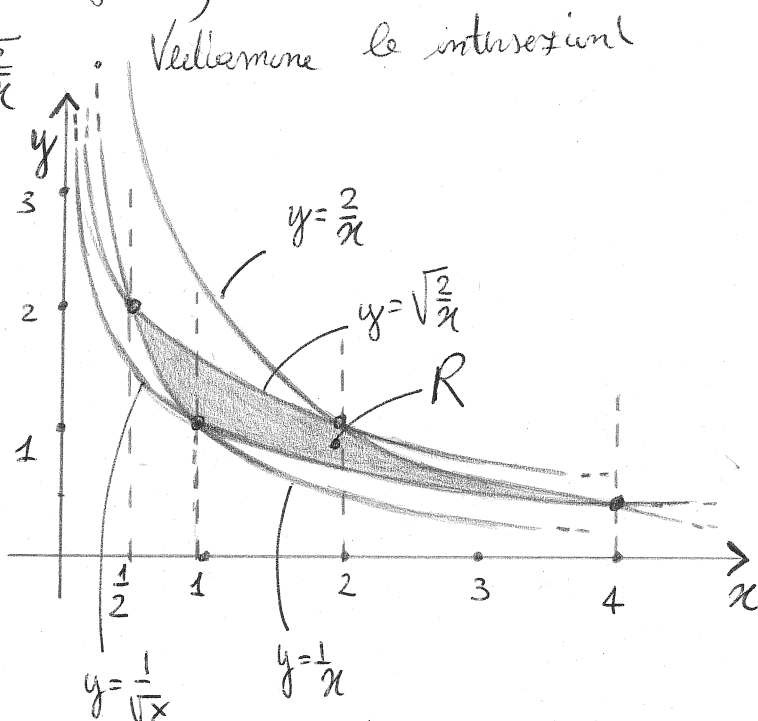
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \frac{1}{2} \leq x \leq 4; \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \text{ per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{x}} \text{ per } 1 \leq x \leq 2;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{2}{x} \text{ per } 2 \leq x \leq 4\}.$$

Vediamo se col nuovo cambio di variabile la descrizione di $\varphi^{-1}(R)$ è più semplice:

$$\text{abbiamo detto: } x = \frac{u^2}{v}, \quad y = \frac{v}{u};$$

$$u = xy, \quad v = xy^2;$$



Si come R è delimitata da $xy=1$, $xy=2$, $xy^2=1$, $xy^2=2$, 13

Questo significa che $\varphi^{-1}(R)$ sarà delimitata da $u=1$, $u=2$,

$v=1$, $v=2$. Allora $\varphi^{-1}(R)$ è il quadrato $[1,2] \times [1,2]$.

La descrizione di $\varphi^{-1}(R)$ è immediata!

Per quanto riguarda l'integrale avremo:

$$\int_R y^2 dx dy = \int_{\varphi^{-1}(R)} \frac{v^2}{u^2} \cdot \frac{1}{v} du dv = \int_1^2 \int_1^2 \frac{v}{u^2} dv du =$$

$$= \left(\int_1^2 v dv \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2} du \right) = \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v=1}^{v=2} \cdot \left[-\frac{1}{u} \right]_{u=1}^{u=2} = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

□

Es. 8.42

Disegnare il solido

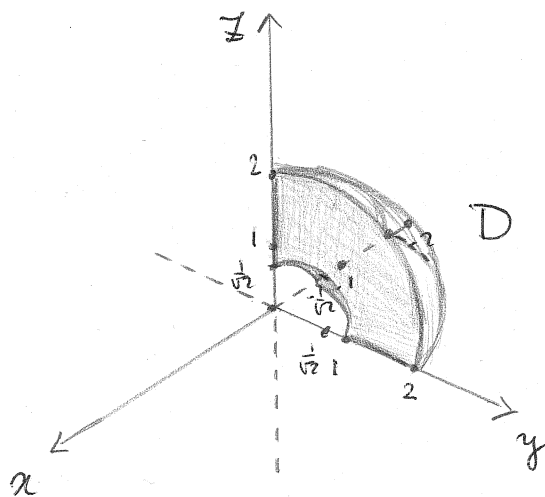
$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

e calcolare l'integrale triplo

$$\int_D \frac{\ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

Soluzione:

La condizione $\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ indica quella porzione di $\mathbb{R}^3$ compresa tra le due sfere centrate in $(0,0,0)$ e di raggi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 2. Quindi abbiamo un "guscio". Inoltre di questo guscio dobbiamo considerare solo un ottante: la porzione compresa nell'ottante di piano $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$.



Vediamo che nell'integrale compaiono $2(x^2+y^2+z^2)$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, che

suggeriscono il passaggio a coordinate sferiche. Anche il dominio, essendo una porzione di sfera, si presta bene a questo cambio di coordinate.

Ricordiamo che abbiamo due angoli ϕ, ϑ ed il raggio r .

$(r, \phi, \vartheta) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. La trasformazione è

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \vartheta \\ y &= r \sin \phi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned} \quad ; \quad \varphi(r, \phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \vartheta \\ r \sin \phi \sin \vartheta \\ r \cos \phi \end{pmatrix} ;$$

$$\varphi'(r, \phi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \vartheta & r \cos \phi \cos \vartheta & -r \sin \phi \sin \vartheta \\ \sin \phi \sin \vartheta & r \cos \phi \sin \vartheta & r \sin \phi \cos \vartheta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{pmatrix} ;$$

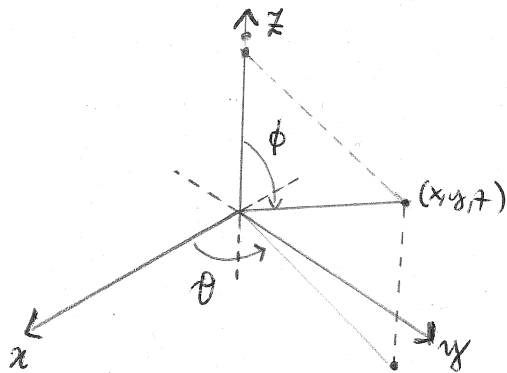
$$\det \varphi'(r, \phi, \vartheta) = r^2 \sin(\phi) (> 0 \text{ poich\'e } \phi \in]0, \pi[).$$

Ricordiamo che, dato $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, (r, ϕ, ϑ) corrispondono a:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza di (x, y, z) da $(0, 0, 0)$ ($r > 0$).

ϕ e ϑ sono i due angoli che descrivono la posizione del punto (x, y, z) , una volta fissata la sua distanza dall'

origine:



• ϑ è l'angolo formato dalla proiezione del segmento $[(0, 0), (x, y, z)]$ sul piano xy con l'asse x ; $\vartheta \in]0, 2\pi[$

• ϕ è l'angolo formato dal segmento $[(0, 0, z), (x, y, z)]$ con l'asse z . $\phi \in]0, \pi[$.

Se il disegno è stato fatto correttamente, si può subito vedere, da come è definito il cambio di variabile, che $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 2$ (i punti in D hanno distanza dall'origine, ovvero modulus, compresi tra $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e 2).

In più $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\vartheta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Altrimenti lo si può sempre ricavare dalla descrizione di D .

Ricordiamo che $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Allora

$$\frac{1}{2} \leq r^2 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 2.$$

$z \geq 0$ implica $\cos \phi \geq 0$; in generale $\phi \in]0, \pi[$; siccome deve essere positivo, $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Per $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \phi, \sin \phi > 0$.
 $y \geq 0$ implica $r \sin \phi \sin \vartheta \geq 0$; sappiamo già $r \sin \phi > 0$.

Allora deve essere $\sin \vartheta \geq 0$. In generale $\vartheta \in]0, 2\pi[$. Siccome $\sin \vartheta \geq 0$, $\vartheta \in]0, \pi[$.

Infine $x \leq 0$. Questo implica $r \sin \phi \cos \vartheta \leq 0$. Già sappiamo $r \sin \phi > 0$. Per cui deve essere $\cos \vartheta \leq 0$. Abbiamo già $\vartheta \in]0, \pi[$,

per cui, per avere $\cos \vartheta \leq 0$, deve essere $\vartheta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

In conclusione:

$$\varphi^{-1}(D) = \left\{ (r, \phi, \vartheta) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \right\}.$$

Passiamo al calcolo dell'integrale.

$$\int_D \frac{\ln(2x^2+2y^2+2z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz = \int_{\varphi^{-1}(D)} \frac{\ln(2r^2)}{r} \cdot r^2 \sin \phi \, dr d\phi d\theta =$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\pi} \ln(2r^2) r \sin \phi \, dr d\theta d\phi =$$

$$= \left(\int_0^2 \ln(2r^2) r \, dr \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\pi} \sin \phi \, d\phi \right) =$$

$$= \left[-\cos \phi \right]_{\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\phi=\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 \ln(2r^2) 4r \, dr \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_{f(\frac{1}{\sqrt{2}})=1}^{f(2)=8} \ln(f) df =$$

$f = 2r^2$
 $df = 4r dr$

$$= \frac{\pi}{8} \left[f(\ln f - 1) \right]_{f=1}^{f=8} = \frac{\pi}{8} \left[8(\ln 8 - 1) + 1 \right] = \pi \left(\ln 8 - 1 + \frac{1}{8} \right) =$$

$$= \boxed{\pi \left(\ln 8 - \frac{7}{8} \right)}$$

□

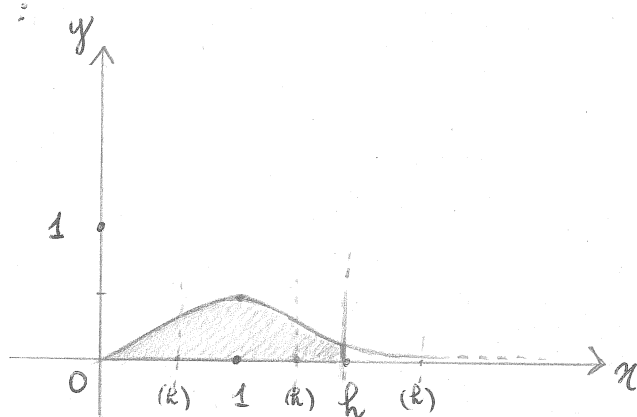
Per ogni $h > 0$ sia

$$E_h = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq \frac{x}{1+x^2} \right\}$$

- i) Disegnare E_h e calcolarne l'area
- ii) Trovare l'ordinata y_h del baricentro di E_h .
- iii) Trovare il volume del solido S_h facendo ruotare E_h attorno all'asse x

Soluzione:

i)



$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; \quad f' > 0 \text{ per } -1 \leq x < 1, \quad f' < 0 \text{ per } x > 1$$

$$f' = 0 \text{ in } x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Calcoliamo l'area di E_h :

$$\int_{E_h} dx dy = \int_0^h \left(\int_0^{\frac{x}{1+x^2}} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^h \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^h \frac{1}{2} \frac{df}{1+f} \quad \begin{matrix} f=x^2 \\ df=2x dx \end{matrix} \quad \begin{matrix} f(h)=h^2 \\ f(0)=0 \end{matrix} = \frac{1}{2} \ln(1+f) \Big|_0^{f=h^2} = \frac{\ln(1+h^2)}{2}$$

ii) L'ordinata y_h del baricentro è data da

$$y_h = \frac{\int_{E_h} y dx dy}{\int_{E_h} dx dy} = \frac{\int_{E_h} y dx dy}{\text{Area}(E_h)}; \quad \text{l'area Area}(E_h)$$

è stata calcolata al punto (i).

Calcoliamo

$$\int_{E_h} y \, dx \, dy = \int_0^h \left(\int_0^{\frac{x}{1+x^2}} y \, dy \right) dx = \int_0^h \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\frac{x}{1+x^2}} dx =$$

$$= \int_0^h \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^h \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot x \, dx = \text{(per parti, calcolando le primitive)} \int_0^h \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \int_0^{h^2} \frac{df}{(1+f)^2} = \left[-\frac{1}{1+f} \right]_0^{h^2} = \left(-\frac{1}{1+h^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{x}{1+x^2} \right]_{x=0}^{x=h} + \frac{1}{4} \int_0^h \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{h}{4(1+h^2)} + \frac{1}{4} \arctan(h), \quad ; \text{ per cui}$$

$$\boxed{y_h = \frac{1}{2\ln(1+h^2)} \left(\arctan(h) - \frac{h}{(1+h^2)} \right)}$$

iii) Siccome l'insieme E è sul piano xy e lo stiamo facendo ruotare attorno all'asse x di un angolo di 2π ($\alpha=0$ e $\beta=2\pi$ nel T. di Guldino), si ha

$$\boxed{\text{Vol}(S_h) = 2\pi y_h \text{Area}(E_h) = \frac{\pi}{2} \left(\arctan(h) - \frac{h}{(1+h^2)} \right)}$$

□