# INTEGRALE DI LEBESGUE



ESERCIZIO 10.31 Calcolare, se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$$

<u>Soluzione</u>: si tratta del limite di un integrale di una <u>successione di funzioni</u> $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

scriviamolo meglio: $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)\,dx$

[(quando ci troviamo di fronte a situazioni simili, cercare di esprimere l'integrale come integrale su tutto $\mathbb{R}$ – o $\mathbb{R}^N$ – e "scaricare" tutte le dipendenze da $n$ sull'integranda)] SUGGERIMENTI

in questo modo abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx, \quad \text{dove } f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)$$

$\left[\ \chi_{[0,n]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,n]\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}\ \right]$. Si tratta di un problema di <u>convergenza di integrali</u>. Abbiamo che:

- $f_n(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}, (\forall n\in\mathbb{N})$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x e^{-2x} = \boxed{e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}}$ siccome la successione $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$ (es. limite notevole) e $\chi_{[0,n[}\to\chi_{[0,+\infty[}$.

quindi <u>puntualmente</u> $f_n(x)\to f(x):=\boxed{e^{-x}\chi_{[0,+\infty[}(x)}$ (cioè per (quasi) ogni $x$).

- inoltre $(f_n)_n$ è monotona crescente:

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x)$$

$$f_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x) \ ;$$

- $x \notin [0, n+1] \Rightarrow f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$

  $x \in ]n, n+1] \Rightarrow f_n(x) = 0$, $f_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} \geq 0$, quindi $f_{n+1} \geq f_n$

- $x \in [0, n]$ ; qui ricordiamo il fatto che $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge <u>crescendo</u> ad $e^x$, quindi qui dentro, essendo

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \\ f_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$$

Allora possiamo utilizzare il <u>T. delle Convergenze Monotona</u> (tutte le ipotesi sono verificate). Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.}$$

---

= Ripasso = mostriamo che $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ è crescente. Si usa la Disuguaglianza di Bernoulli : $\boxed{(1+\xi)^n \geq 1 + n\xi \ , \forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \geq -1.}$

(si mostra immediatamente per induzione).

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ crescente vuol dire $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$ ; cioè (*)

$$\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^{-1}, \text{ cioè}$$

$$\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right).$$

In pratica mostrare quest'ultima è equivalente a mostrare (*), cioè la crescenza.

Ora, $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)^n = \left(\frac{n^2+nx-n-x}{n^2+nx-n}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n^2+nx-n}\right)^n \geq 1 - \frac{nx}{n^2+nx-n} = \boxed{1 - \frac{x}{n+x-1}}$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Bernoulli con $\xi = -\frac{x}{n^2+nx-n}$ (si vede che è $\geq -1$). Si conclude osservando che

$$\boxed{1 - \frac{x}{n+x-1} = \frac{n-1}{n-1+x}} \ . \qquad =$$

Nota: si poteva concludere più velocemente e senza le considerazioni sulle positività e crescenza di $f_n$ grazie al Teorema di Convergenza Dominata.
Es: Rifare l'esercizio dopo che sia stato fatto questo Teorema.

$\square$

ESERCIZIO 10.34 (Esempio di $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ con $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ non continua in un punto).

Sia $u \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continua e con integrale non nullo.
Si definisca $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}\, u(xy).$$

Provare che $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e che $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ non è continua in 0

Soluzione:

Il testo ci dice che $u(\xi)$ (usiamo $\xi$ come variabile per non fare confusione poi) è t.c. $\int_{\mathbb{R}} |u(\xi)|\,d\xi < +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}} u(\xi)\,d\xi = c \neq 0$.

Se $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}\, u(xy)\,dy = \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} \int_{\mathbb{R}} u(xy)\,dy \underset{\substack{xy=\xi \\ x\,dy = d\xi}}{=} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(\xi)}{|x|}\,d\xi \;(*)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{|x|}\,(1+x^2)}\,; \quad (\text{forma di } \varphi(x) \text{ per } x \neq 0).$$

Se $x=0$, allora $f(0,y)=0 \ \forall y \in \mathbb{R}$, e quindi $\varphi(0)=0$.

Ma $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$. Per cui $\varphi$ non è continua in $x=0$.

Però $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx = |c| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|x|}\,(1+x^2)}\,dx < +\infty$$ : infatti

- per $x \to 0$, l'integrale è asintotico a $\frac{|c|}{\sqrt{|x|}}$ che è integrabile "in 0"
- per $x \to \pm\infty$, l'integrale è asintotico a $\frac{|c|}{|x|^{2+\frac{1}{2}}}$, che è integrabile "al $\infty$".

Per Tonelli, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

$\square$

=Nota= $\circledast$, perché $|x|$?

Abbiamo
$$\int_{\mathbb{R}} u(xy)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(xy)\,dy \underset{\substack{xy=\xi \\ x\,dy = d\xi}}{=} \int_{\text{"}\xi=-\infty\cdot x\text{"}}^{\text{"}\xi=+\infty\cdot x\text{"}} \frac{u(\xi)}{x}\,d\xi \quad \text{(☆)}$$ ; se $x<0$,

allora
$$\text{(☆)} = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{u(\xi)}{x}\,d\xi = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{x}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{|x|}\,d\xi; \quad \left(-x=|x| \text{ per } x<0\right)$$

se $x>0$, allora
$$\text{(☆)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{x}\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{|x|}\,d\xi \quad \left(x=|x| \text{ per } x>0\right)$$

perciò compare quel $|x|$ in $\circledast$.

$\square$

ESERCIZIO 10.32

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è sommabile, ed $\alpha > 0$, mostrare che $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$ (scritto anche $\{|f| > \alpha\}$) ha misura finita. Calcolare $\lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}_n(E_j)$.

Soluzione:

osserviamo che $\alpha \chi_{E_\alpha} \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$:

infatti, se $x \in E_\alpha$, per definizione di $E_\alpha$, $|f(x)| \geq \alpha$;
se $x \notin E_\alpha$, $\alpha \chi_{E_\alpha}(x) = 0$, mentre $|f(x)| \geq 0 \Rightarrow |f(x)| \geq \alpha \chi_{E_\alpha}$.

Per cui, dal criterio del confronto ($\alpha \chi_{E_\alpha} \geq 0$),
si ha $\alpha \chi_{E_\alpha} \leq |f|$, quindi è sommabile.

Quindi $E_\alpha$ ha necessariamente misura finita:

$$\mathcal{L}_n(E_\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_\alpha} \, dx \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < +\infty \quad \left(f \text{ sommabile}, \ \alpha > 0\right)$$

Nel caso in cui $\alpha = j$ ($j \in \mathbb{N}$), questo ci dice

$$\mathcal{L}_n(E_j) \leq \frac{1}{j} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$$

. Questo modo è più rapido.

Si poteva anche vedere nel modo seguente:
da $j \chi_{E_j} \leq |f|$ segue $\chi_{E_j} \leq \frac{|f|}{j} \leq |f| \quad (j \geq 1, j \in \mathbb{N})$.

Consideriamo la successione di funzioni $f_j(x) = \chi_{E_j}(x)$. Puntualmente $\lim_{j \to +\infty} \chi_{E_j}(x) = 0$ (cioè puntualmente per q.ogni $x \in \mathbb{R}^n$)

(Ricordiamo infatti che se $f \geq 0$ è sommabile, l'insieme $\{x : f(x) = +\infty\}$ ha misura nulla; quindi per q.o. $x$, esisterà $j = j_x \in \mathbb{N}$ grande abbastanza t.c. $f(x) \leq j_x$. Per cui $\chi_{E_j}(x) = 0 \quad \forall j > j_x$ ).

Inoltre ogni $f_j = \chi_{E_j}$ è dominata da $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

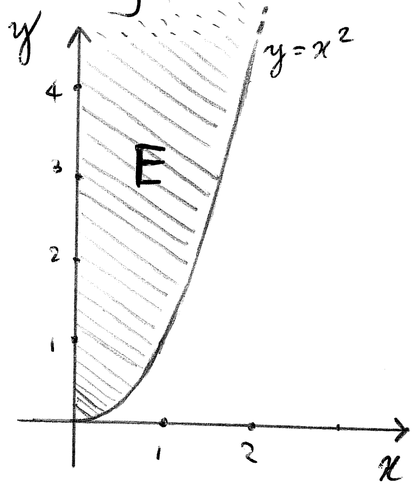
Per cui, il T. della Convergenza Dominata ci assicura che

$$\lim_{j \to +\infty} \mathcal{L}_n(E_j) = \lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_j}(x)dx = \lim_{j \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \to +\infty} f_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0.$$

$\square$

**ESERCIZIO 10.33** Dire se esiste finito

$$* \int_E \frac{\sin^3(x)}{x^4+y^2}dxdy, \quad \text{dove } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, \ x > 0\}$$




Soluzione: Consideriamo l'integrale iterato

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_{x^2}^{+\infty} \frac{|\sin^3(x)|dy}{x^4+y^2} \right) dx \quad (\text{importante il } |\cdot|)$$

se esso esiste finito, allora esisterà finito l'integrale $*$ desiderato, per Tonelli.

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_{x^2}^{+\infty} \frac{|\sin^3(x)|dy}{x^4+y^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} |\sin^3(x)| \cdot \left[ \frac{\arctan(y/x^2)}{x^2} \right] \Bigg|_{y=x^2}^{y=+\infty} dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin^3(x)|}{x^2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin^3(x)|}{x^2} dx \ ;$$

Quest'ultimo integrale è finito:
per $x \to 0$ (ad es., $x < \frac{\pi}{2}$, $x \to 0$ cosicché $\sin(x) \geq 0$),
si ha che l'integrando è $\frac{\sin^3(x)}{x^2} = \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \sin(x)$;
ricordando che $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$ (allora anche $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$),
dato che poi $\sin(x) \to 0$ per $x \to 0$, l'integrando va a $0$
per $x \to 0$.

Invece, per $x \to +\infty$, $|\sin^3(x)| \leq 1$ (questo sempre, è limitata!),
quindi $\frac{|\sin^3(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, che è sommabile per $x \to +\infty$.

Quindi l'integrale $*$, per Tonelli, esiste finito. $\square$

($*$ fa $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{3\ln(3)}{4} = \frac{3\pi \ln(3)}{16}$)

## ESERCIZIO 10.36

1. Provare che $e^{-(x^2+y^2)} \in L^1(\mathbb{R}^2)$;
2. Calcolare esplicitamente, motivando i passaggi, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{n}\right) dx\,dy$$

Soluzione

1. (già vista a lezione) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \geq 0$;

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$$ (anche se non sapessimo $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$, comunque si vede che $e^{-y^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}$);

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi < +\infty.$$ Per Tonelli, $f \in L^1$ e per Fubini,

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} (f(x,y))\,dx\,dy = \pi}$$

Consideriamo la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_n(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(1 + \frac{x^2+y^2}{n}\right). \quad f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

In più $f_n(x,y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ poiché

$$f_n \leq e^{-x^2-y^2}(1+x^2+y^2) \text{ e quest'ultima è in } L^1(\mathbb{R}^2).$$

Infatti, $e^{-x^2-y^2}(1+x^2+y^2) \geq 0$; $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}(1+x^2+y^2)\,dy\right)dx =$

$= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} + x^2e^{-y^2} + y^2e^{-y^2}\,dy\right)dx$ ; l'integrale su $\mathbb{R}$

di $y^2e^{-y^2}$ è $<+\infty$, e si vedrà valere $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; per cui si ha

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left((1+x^2)\sqrt{\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)dx = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\pi}\, e^{-x^2}\left(\frac{3}{2} + x^2\right)dx$ ; anch'esso è

finito (stesse considerazioni di su). In particolare si vedrà valere

$2\pi$. Per Tonelli, la funzione $(x,y) \mapsto e^{-x^2-y^2}(1+x^2+y^2)$ è

in $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Quindi $f_n$ è in $L^1(\mathbb{R}^2)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ed è dominata da una funzione in $L^1(\mathbb{R}^2)$. Vediamo cosa accade puntualmente.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Allora siamo nelle ipotesi del Teorema di Convergenza Dominata. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\left(1 + \frac{x^2+y^2}{n}\right)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi$$

$\square$

# ESERCIZIO 10.38



Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1+x^2 e^{|y|}}$

1. Si provi che $f$ è sommabile in $\mathbb{R}^2$.
2. Calcolare $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ (Sugg. riconoscere ad un certo punto la $\Gamma$ di Eulero)
3. Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$.

## Soluzione:

($|f|$ importante!)

1. Consideriamo l'integrale iterato $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^3}{1+x^2 e^{|y|}}\,dx\right)dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}} |y|^3 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{|y|}(e^{-|y|}+x^2)}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}|y|^3\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{-|y|}+x^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}|y|^3 \left[ e^{\frac{|y|}{2}} \arctan\left(x e^{\frac{|y|}{2}}\right)\right]\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty} dy = \pi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|}{2}} |y|^3\,dy\ ;$$

l'integrale di $e^{-\frac{|y|}{2}}|y|^3$ su $\mathbb{R}$ è finito. Per Tonelli, $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

2. La norma $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ è $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |f|\,dx\,dy$. Da 1., esso esiste finito. Per cui, per Fubini, esso coincide con uno dei due integrali iterati (che sono uguali). Proseguiamo il conto del punto 1.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^3}{1+x^2 e^{|y|}}\,dx\right)dy = \pi\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|}{2}}|y|^3\,dy = (\text{la funzione è pari}) =$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^3\,dy \underset{\uparrow}{=} 4\pi \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot 8t^3\,dt = 32\pi\int_0^{+\infty} e^{-t} t^3\,dt.$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \tfrac{y}{2} \\ dy &= 2\,dt \end{aligned}}$$

Ricordiamo come è definita la $\Gamma$ di Eulero: $\displaystyle\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$; $(z>0)$

in più $\Gamma(n+1) = n!$ se $n \in \mathbb{N}$. Nel nostro caso $z-1 = 3 \Rightarrow z = 4$.

$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 32\pi\Gamma(4) = 32\pi\, 3! = 192\pi$.

3. Siccome $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ da 1., per Fubini $\int_{\mathbb{R}^2} f\,dxdy$ esiste finito e coincide con uno dei due (uguali!) integrali iterati:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{y^3}{1+x^2 e^{|y|}}\,dx\right)dy = \pi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|}{2}} y^3\,dy \quad (\star)$$ . L'integranda è

$g = e^{-\frac{|y|}{2}} y^3$ ; $g = g^+ - g^-$, $g^+ = e^{-\frac{y}{2}} y^3 \chi_{[0,+\infty[}$,

$g^- = -e^{\frac{y}{2}} y^3 \chi_{[-\infty,0[}$ ;

infatti $g \geq 0$ per $y \geq 0$ e $g \leq 0$ per $y \leq 0$; $g^+, g^- \geq 0$.

e sono sommabili (ricordiamo che $|g|$ sommabile $\Leftrightarrow g^+, g^-$ sommabili, e nel nostro caso $|g|$ è sommabile, visto in 1. e 2.)

$$\int_{\mathbb{R}} g\,dy = \int_{\mathbb{R}} g^+ dy - \int_{\mathbb{R}} g^- dy \;;\; \int_{\mathbb{R}} g^+ dy = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^3\,dy = 96$$

$$\int_{\mathbb{R}} g^- = \int_{-\infty}^{0} -e^{\frac{y}{2}} y^3\,dy \underset{\substack{\xi=-y \\ d\xi=-dy}}{=} \int_{\xi=-(-\infty)}^{\xi=-(0)} e^{-\frac{\xi}{2}}(-\xi^3)\,d\xi = -\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^3\,d\xi = +\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^3\,d\xi = 96$$

Quindi $\int_{\mathbb{R}} g\,dy = 96 - 96 = 0$, per cui $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 0$.

---

Questo è il modo "rigoroso" di calcolare $\int_{\mathbb{R}^2} f\,dxdy$. Più velocemente, sapendo già che $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, è necessario solo guardare in $(\star)$ all'integrale generalizzato $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|y|}{2}} y^3\,dy = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{|y|}{2}} y^3\,dy$ ; e $\int_{-r}^{r} e^{-\frac{|y|}{2}} y^3\,dy = 0$ poiché l'integranda è dispari. Ma questo ragionamento è corretto a patto di avere già informazioni sulla convergenza dell'integrale $\square$

ESERCIZIO 10.30 | Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fissata. 

i) Mostrare che la successione di funzioni $f_n(x) = f(x)e^{-n\sin^2(x)}$ converge puntualmente q.o. ad una $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; determinare $g$.

ii) Discutere l'esistenza e il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$$

Soluzione:

i) se $\sin(x) \neq 0$ $\quad f_n(x) = f(x)e^{-n\sin^2(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ; questo nei punti dove $\sin(x)\neq 0$, ovvero se $x \neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, cioè su tutto $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ (cioè su tutto $\mathbb{R}$ tranne nei punti che sono multipli interi di $\pi$).

se $x = k\pi$ per qualche $k$ (cioè nei punti che sono multipli interi di $\pi$), si ha $f_n(x) = f(x)e^0 = f(x)$.

Per cui $\begin{cases} f_n(x) \to 0 & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \\ f_n(x) \equiv f(x) & \forall x\in\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

L'insieme $\{x\in\mathbb{R} : x = k\pi, k\in\mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z}$, è numerabile, quindi ha misura di Lebesgue nulla. Quindi possiamo dire che $f_n(x)\to 0$ su tutto $\mathbb{R}$ a meno di un insieme di misura nulla, cioè $\boxed{f_n(x)\to 0 \text{ per quasi ogni } x\in\mathbb{R}}$

ii) siccome $0 < e^{-n\sin^2(x)} \leq 1$, si ha che $|f_n(x)| = |f(x)|e^{-n\sin^2(x)} \leq |f(x)|$, quindi per ogni $x\in\mathbb{R}$ e ogni $n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x)|\leq|f(x)|$. $f_n(x)\to 0$ q.o. ed è dominata da $|f|$ che è in $L^1$

quindi per il T. della convergenza Dominata,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0 .$$

$\square$

ESERCIZIO 10.29

Calcolare il limite

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} \cos(z/j)\,dx\,dy\,dz .$$

Soluzione: Definiamo $f_j(x,y,z): \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ come $f_j(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}\cos(z/j)$

siccome $0 < |\cos(z/j)| \leq 1$, si ha che $|f_j| \leq e^{-x^2-y^2-z^2}$;

la funzione $e^{-x^2-y^2-z^2} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ (si vede analogamente al caso in $\mathbb{R}^2$ visto nell'es. 10.36, e l'integrale vale $\pi\sqrt{\pi}$). Quindi

$f_j \in L^1(\mathbb{R}^3)$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Vediamo il limite puntuale:

$$\lim_{j\to+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2}\cos(z/j) = e^{-x^2-y^2-z^2}, \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$ Siamo

nelle ipotesi del T. della Convergenza Dominata:

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} f_j = \int_{\mathbb{R}^3}\lim_{j\to+\infty} f_j = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz = \pi\sqrt{\pi}$$

$\square$

## ESERCIZIO 11.3

Sia $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt)\,dt$

i) Provare che $F$ è di classe $C^1$, e che la derivata si ottiene derivando sotto il segno di integrale.

ii) Applicando a tale derivata la formula di integrazione per parti, ottenere per $F$ un'equazione differenziale (lineare del primo ordine); integrarla ed ottenere $F$ mediante una formula in cui non compaiono integrali

iii) Dai risultati precedenti, ottenere l'integrale di Laplace

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cos(bt)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a} \quad , a>0, b\in\mathbb{R}$$

Soluzione:

i) Chiaramente, $\forall x\in\mathbb{R}$, l'integrale che definisce $F$ è convergente: $\left|e^{-t^2}\cos(2xt)\right| \le e^{-t^2}$ che è sommabile su $\mathbb{R}$. Quindi $F$ è ben definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $x\in\mathbb{R}$ (addirittura, è globale qui: non è solo $\forall x\in U_x$, dove $U_x$ è intorno di $x$)

$\left|e^{-t^2}\cos(2xt)\right| \le e^{-t}$ (e quest'ultima non dipende da $x$! l'enunciato del T. di continuità per integrali dipendenti da parametro richiede che esista $\forall x$, un intorno $U_x$ di $x$ e una funzione $\gamma_x(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall x\in U_x$ con $\left|e^{-t^2}\cos(2xt)\right| \le \gamma_x(t)$ $\forall x\in U_x$, q.o. $t\in\mathbb{R}$. Addirittura qui abbiamo una $\gamma_x(t)$ che non dipende da $x$ e va bene $\forall x\in\mathbb{R}$!)

Inoltre la funzione $s \mapsto e^{-t^2}\cos(2st)$ è continua in $s = x$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per cui

$$x \longmapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt \quad \text{è continua.}$$

Passiamo ora a studiare la derivabilità di $F$. La funzione $s \mapsto e^{-t^2}\cos(2st)$ è derivabile nella variabile $s$ e $\partial_s\left(e^{-t^2}\cos(2st)\right) = -2te^{-t^2}\sin(2st)$. Notiamo che essa è maggiorata in modulo: $\left|-2te^{-t^2}\sin(2st)\right| \leq 2te^{-t^2}$, che è sommabile su $\mathbb{R}$.
Quindi (identiche considerazioni di prima), $x \mapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$ è di classe $C^1$ e si ha (ii)

per parti, integrando $-2te^{-t^2}$

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2te^{-t^2}\sin(2xt)\,dt = \left[e^{-t^2}\sin(2xt)\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\,e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt =$$

$$= -2x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt = -2x\,F(x)$$

Quindi $F$ soddisfa all'eq. differenziale $F'(x) = -2x\,F(x)$; inoltre $F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ (dato iniziale del problema di Cauchy).

Integriamo l'equazione: $\dfrac{F'(x)}{F(x)} = -2x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = -2\int x$,

cioè $\ln(F(x)) = -x^2 + C \Rightarrow F(x) = e^C e^{-x^2}$; chiamiamo il coefficiente (da determinare) $e^C := \alpha$; $F(x) = \alpha e^{-x^2}$; $\alpha$ deriva da $F(0) = \sqrt{\pi}$:

$F(0) = \alpha = \sqrt{\pi}$; Quindi $\boxed{F(x) = \sqrt{\pi}\,e^{-x^2}}$

iii) Dobbiamo ricondurre $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\cos(bt)\,dt$ a una forma del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)$ $(=F(x))$, che sappiamo in forma esplicita.

Siccome $a>0$, se poniamo $\xi=\sqrt{a}\,t \Rightarrow d\xi=\sqrt{a}\,dt$; operiamo il cambio di variabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\xi\right)\frac{d\xi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\left(2\cdot\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\xi\right)d\xi=\boxed{\frac{1}{\sqrt{a}}F\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}$$

e noi sappiamo che $F(x)=\sqrt{\pi}\,e^{-x^2}$, quindi $\boxed{\frac{1}{\sqrt{a}}F\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}}$

## ESERCIZIO 11.5

Sia $f: ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

i) Provare che $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$

ii) È vero che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$? perché?

iii) Trovare un'equazione differenziale del primo ordine di cui $f$ è soluzione

v) Ricavare da iii) un'espressione per $f$

### Soluzione

i) dobbiamo innanzitutto verificare che $f$ è definita su $]0,+\infty[$, poi che è continua. Infine che è $\mathcal{C}^1$.

Per ogni $x\in]0,+\infty[$, $\left|\frac{e^{-xt}}{1+t}\right|=\frac{e^{-xt}}{1+t}\in L^1([0,+\infty[)$ (importante, $x>0$, stretto!)

inoltre la funzione $x\mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ è continua per ogni $t\in[0,+\infty[$.

Quindi $f$ è ben definita su $]0,+\infty[$ e continua.

Calcoliamo $\partial_x\left(\frac{e^{-xt}}{1+t}\right) = \frac{-te^{-xt}}{1+t}$; Fissiamo ora $x_0 > 0$ e consideriamo un intorno $U_{x_0}$ di $x_0$ del tipo $]x_0-\delta, +\infty[$, con $\delta$ tale che $x_0 - \delta > 0$ (siccome $x_0 > 0$, riusciamo sempre a trovare un tale $\delta$, ad es. $\delta = \frac{x_0}{2}$)

per $x \geq x_0 - \delta$, $0 < e^{-xt} \leq e^{-(x_0-\delta)t}$, per cui

$\left|\frac{-t\,e^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{t\,e^{-(x_0-\delta)t}}{1+t}$; quest'ultima funzione è sommabile

(N.b. questo stesso ragionamento è "sottointeso" anche nella parte in cui abbiamo mostrato la continuità. Non l'abbiamo riportato per brevità.
In questo caso non siamo riusciti, come nell'es. precedente, a trovare una maggiorante in $L^1_t$ (nel senso che la variabile di integrazione è la $t$) che andasse bene per ogni $x \in ]0,+\infty[$. Abbiamo dovuto definire maggioranti per ogni $x_0$ in intorno opportuno $(]x_0-\delta,+\infty[)$.
Ad esempio, potevamo pensare a $\left|\frac{-te^{-xt}}{1+t}\right| \leq \frac{t}{1+t}$, ma questa, seppur non dipendente da $x$, non è in $L^1(\mathbb{R})$. Quindi NON ci va bene).

Siamo comunque nelle ipotesi del T. di derivabilità sotto segno di integrale. $f \in C^1(]0,+\infty[)$ e

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t}\,dt .$$

ii) Consideriamo una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di numeri reali $>0$ tali che $\lim_{j\to+\infty} x_j = +\infty$. Consideriamo $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_j t}}{1+t}\,dt \;\left(= f(x_j)\right)$

Definiamo $g_j(t) := \frac{e^{-x_j t}}{1+t}$. Esse è una successione di funzioni che sono in $L^1(\mathbb{R})$ (avevamo visto in i) che $\forall x>0$ $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}$ è definito).

Puntualmente (N.b. le $g_j$ sono funzioni di $t$; $x_j$ è un parametro che definisce le $g_j$)

$$\lim_{j\to+\infty} g_j(t) = \lim_{j\to+\infty} \frac{e^{-x_j t}}{1+t} \underset{\boxed{\substack{x_j\to+\infty \\ \text{per } j\to+\infty}}}{=} 0 \quad ; \text{ quindi } g_j(t) \underset{j\to+\infty}{\to} 0 \text{ per ogni } t\in(0,+\infty)$$

Ora noi vogliamo studiare il comportamento di questa successione per $x_j \to +\infty$. Quindi non è restrittivo assumere che $x_j \geq 1$ $\forall j$ (consideriamo una successione di $g_j = \frac{e^{-x_j t}}{1+t}$ dove le $x_j \to +\infty$ e sono $\geq 1$, e noi serve il comportamento all'infinito)

per cui $g_j = \frac{e^{-x_j t}}{1+t} \leq \frac{e^{-t}}{1+t}$ $\forall j$ ed $\frac{e^{-t}}{1+t} \in L^1(\mathbb{R})$.

Allora per il Teorema della Convergenza Dominata,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_j t}}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{j\to+\infty} g_j(t) = 0 .$$ Siccome la successione $x_j \to +\infty$ ($e$ $x_j \geq 1$) era arbitraria, il risultato vale: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt = 0}$

iii) Se $x>0$, abbiamo trovato $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-xt}}{1+t}\,dt =$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(1-1-t)e^{-xt}}{(1+t)}\,dt = \int_0^{+\infty} -e^{-xt}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt = \left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} + f(x) =$$

$= -\frac{1}{x} + f(x)$. Quindi $f$ per $x>0$ soddisfa l'O.D.E. lineare

$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{x}$ ; moltiplichiamo ambo i membri per $e^{-x}$:

$$e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = -\frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow \left(e^{-x} f(x)\right)' = -\frac{e^{-x}}{x}$$

Quindi $\quad e^{-x} f(x) = -\int_c^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + k$, cioè $\quad$ ($c$ è fissato ad arbitrio!)

$$e^{-x} f(x) = -\int_c^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + k;$$ inoltre vogliamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty} -\int_c^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + k = 0.$$ Deve per forza essere $\int_c^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} = k$

Quindi $$e^{-x} f(x) = \int_c^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_c^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt;$$

per cui $$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt.$$

= Nota =

Si poteva ricavare alternativamente questa formula da

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt$$ con il cambio di variabile $t = \frac{s}{x} - 1$

$dt = \frac{ds}{x}$

($x$ è sempre parametro, $s$ è la nuova variabile). ($s = x(1+t)$)

$$\boxed{f(x) = \int_{s=x}^{s=+\infty} x \cdot \frac{e^{x-s}}{s} \cdot \frac{ds}{x} = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-s}}{s}\, ds}$$

$\square$

ESERCIZIO 11.7

Sia $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt$

i) Trovare il dominio di $f$ (D), e dire se $f$ è continua su D

ii) Calcolare i limiti di $f$ al tendere di $x$ agli estremi superiore ed inferiore del dominio (Sugg. porre $s = tx$)

iii) Mostrare che $f$ è derivabile su $D \setminus \{0\}$

iv) Mostrare che $f$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del primo ordine su $D \setminus \{0\}$. Scrivere tale equazione. Dire se $f$ è derivabile in $x=0$

Soluzione:

i) Cerchiamo le $x$ per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt$.

Per ogni $x, t \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 < \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}\,;$$ la funzione $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ è sommabile

su $[0, +\infty[$. Quindi l'integrale esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre, $x \mapsto \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}$ è continua. Per cui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

continua.

ii) Abbiamo visto che $D = \mathbb{R}$. Si ha $\inf \mathbb{R} = -\infty$, $\sup \mathbb{R} = +\infty$.

$f$ è pari, quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$. Calcoliamo tale

limite:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt \underset{\substack{s=tx\\ ds=x\,dt}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{e^{-s^2}}{1+\frac{s^2}{x^2}}\cdot\frac{ds}{x}=x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s^2}}{x^2+s^2}\,ds.$$

Siccome $x^2+s^2\geqslant x^2$, $0\leqslant f(x)\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2x}\longrightarrow 0$ per $x\to 0$

Per cui (criterio dei due Carabinieri), $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Questo è un modo rapido. Oppure, come visto nel precedente esercizio, si può usare il Teorema della Convergenza Dominata. Si può ragionare per successioni $x_j\to+\infty$ e concludere. Abbiamo però visto che si può ragionare direttamente come segue:

Abbiamo una famiglia di funzioni integrande, $\frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}=:g_x(t)$, ("indicizzate" per così dire, da $x$). Per ogni $t\in[0,+\infty[$,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}=0$ (è equivalente a prendere arbitrarie successioni $x_j\to+\infty$ per $j\to+\infty$

e dire $\lim_{j\to+\infty}\frac{e^{-t^2x_j^2}}{1+t^2}=0$ $\forall t\in[0,+\infty[$).

Inoltre, ognuna delle funzioni $g_x(t)$ di questa famiglia è dominata da $\frac{1}{1+t^2}$ che è sommabile su $[0,+\infty[$, cioè $\forall x$, $|g_x(t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}$.

Per cui $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}g_x(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}0=0$ per il

Teorema della Convergenza Dominata

iii) Deriviamo rispetto a $x$ l'integranda:

$$\partial_x \left( \frac{e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \right) = \frac{-2t^2 x\, e^{-t^2x^2}}{1+t^2}.$$ Dobbiamo mostrare che $f$ è derivabile

in $x \neq 0$. La funzione $f$ è pari, quindi studiamola ad es. per $x > 0$. Sia $x_0 > 0$ fissato. Dobbiamo cercare un intorno $U_{x_0}$ di $x_0$ e una funzione $\gamma_{(x_0)}(t)$ sommabile su $[0, +\infty[$, tali che
(eventualmente dipendente da $x_0$)

$$\left| \frac{(-2t^2x)\, e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \right| \leq \gamma_{(x_0)}(t) \quad \text{per q.o. } t \in [0,+\infty[, \text{ ed ogni } x \in U_{x_0}$$

Si ha

$$\left| \frac{(-2xt^2)\, e^{-t^2x^2}}{1+t^2} \right| \leq 2|x|\, e^{-t^2x^2} \quad \left( \text{poiché } \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \right).$$ Sia $\delta > 0$ t.c.

$x_0 - \delta > 0$ ; sia $U_{x_0} := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Allora

$2|x|\, e^{-t^2x^2} \leq 2(x_0+\delta)\, e^{-(x_0-\delta)^2 t^2}$, che dipende solo da $t$, per ogni $x$ in $U_{x_0}$ (quindi richiediamo che la $\gamma_{x_0}(t)$ sia una funzione della sola $t$, per tutte le $x$ in un intorno di $x_0$, $\gamma$ dipende dall'intorno scelto. Dobbiamo poi farlo $\forall x_0 \in D \setminus \{0\}$, ma $x_0$ era stato scelto arbitrariamente). e $\gamma_{(x_0)}(t)$ è sommabile su $[0,+\infty[$. Quindi $f$ è derivabile e si ha

$$f'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t^2x^2}}{1+t^2}.$$

iv) Abbiamo visto in (iii) che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-2xt^2)e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt = -2x\int_0^{+\infty}\frac{(-1+1+t^2)e^{-t^2x^2}}{1+t^2}\,dt =$$

$$= -2x\int_0^{+\infty}\frac{(-e^{-t^2x^2})}{1+t^2}\,dt \; -2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\,dt =$$

(usiamo nel secondo integrale il cambio di variabile $s=t|x|$ ; $ds=|x|dt$, il modulo serve poiché $x$ può essere sia positiva che negativa. Se lasciamo $s=tx$ dobbiamo esaminare bene i casi per scrivere gli estremi di integrazione: se $x<0$, quando $t=+\infty$, $s$ sarà $-\infty$; alla fine però, se si studiano correttamente, verrà fuori la stessa formula che col cambio di variabile $s=t|x|$).

$$= 2x\,f(x) - 2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{|x|}\cdot e^{-s^2}\,ds =$$

$$= 2x\,f(x) - \frac{2x\sqrt{\pi}}{2|x|} =$$

$$= 2x\left(f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2|x|}\right);$$

Quindi $\boxed{f'(x) - 2x\,f(x) = -\,\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\pi}}$

è l'eq. differenziale soddisfatta da $f$.

Sappiamo che $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Calcoliamo $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ per vedere se $f$ è derivabile anche in $x=0$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 2x\,f(x) - \mathrm{sgn}(x)\sqrt{\pi} = -\sqrt{\pi}$; $(x>0)$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} 2x\,f(x) - \mathrm{sgn}(x)\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$; $(x<0)$. Quindi $f$ non può essere derivabile in $x=0$.

$\square$

ESERCIZIO 3 (del foglio di esercizi) (Disuguaglianza di Chebychev)

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura. Sia $f \in L^1_\mu(X)$, $f \geq 0$.

Provare che per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\mu\{f > \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f \, d\mu$$

Soluzione

$\{f > \alpha\} := \{x \in X : f(x) > \alpha\} = E_\alpha$ ;

$$\int_X f \, d\mu = \int_{E_\alpha} f \, d\mu + \int_{X \setminus E_\alpha} f \, d\mu \geq \alpha \int_{E_\alpha} d\mu$$ , da cui la tesi.

Questo segue perché

- $\alpha \int_{E_\alpha} d\mu = \alpha \, \mu\{f > \alpha\}$ (definizione dell'insieme $E_\alpha$)
- siccome $f \geq 0$, per il criterio del confronto, $\int_{X \setminus E_\alpha} f \, d\mu \geq \int_{X \setminus E_\alpha} 0 \, d\mu = 0$
- sempre dal criterio del confronto, siccome su $E_\alpha$ si ha che $f > \alpha > 0$

$$\int_{E_\alpha} f \, d\mu \geq \int_{E_\alpha} \alpha \, d\mu .$$

$\square$