SOLUZIONE 1° COMPITINO

ANALISI 2B

ESERCIZIO 1

Determinare e^{At}, con $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

scriviamo il polinomio caratteristico $P_\lambda(A)$: $\det(-\lambda \mathbb{1} + A) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(3+\lambda)(1-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0.$$

A ha un autovalore doppio $\lambda = -1$. Per Hamilton-Cayley, A soddisfa la sua equazione caratteristica: $(A + \mathbb{1})^2 = 0$.

Quindi $A + \mathbb{1}$ è matrice nilpotente di ordine due.

$A = (A + \mathbb{1}) - \mathbb{1}$, per cui, siccome $-\mathbb{1}$ e $A + \mathbb{1}$ commutano,

$$e^{At} = e^{(A+\mathbb{1})t} e^{-\mathbb{1}t} = e^{-t}\mathbb{1} e^{(A+\mathbb{1})t} = e^{-t} e^{(A+\mathbb{1})t} \quad \left(\text{poiché } e^{-\mathbb{1}t} = e^{-t}\mathbb{1}\right).$$

Dalla definizione di matrice esponenziale,

$$e^{(A+\mathbb{1})t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((A+\mathbb{1})t)^k}{k!} = \mathbb{1} + (A+\mathbb{1})t + \mathbb{0} + \dots = \mathbb{1} + (A+\mathbb{1})t =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t & -4t \\ t & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{pmatrix}; \text{ infine}$$

$$\boxed{e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t & -4t \\ t & 1+2t \end{pmatrix}}$$

$\square$

ESERCIZIO 2

Sia $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2 < 4 ,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$.

a) mostrare che M è varietà; determinare lo spazio vettoriale normale ad M in $(1,1,\sqrt{2})$

b) Determinare i massimi e i minimi assoluti di $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + (z-1)^2$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$$

Soluzione.

a) M è varietà: essa è ad esempio definita localmente come luogo degli zeri di $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$. Essa è varietà di dimensione due. Siccome le disuguaglianze $0 < x^2+y^2 < 4$ sono strette, il punto $(0,0,0)$ e l'insieme $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4 ,\ z=2\}$ non sono in M.

$$Dg = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$ ha rango massimo (1) su tutti i punti di M (notiamo che il punto $(0,0,0) \notin M$, in questo punto Dg non sarebbe definito, ma non è un problema).

(Nota)

Alternativamente, possiamo notare che M è data dal grafico di una funzione $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, e h è definita su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < 4\}$, cioè il disco ~~di~~ aperto di centro $(0,0)$ e raggio 2, privato dell'origine. D è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

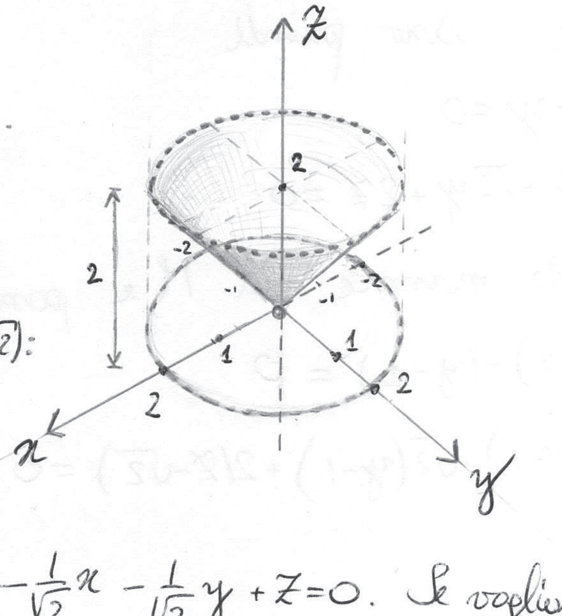
$M = \{(x,y,h(x,y)) : (x,y) \in D\}$. La funzione $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\tilde{h}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix}$ è tale che

$$D\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

M è una varietà differenziale se $D\tilde{h}$ ha rango massimo (2) (ed è ovviamente definito) per ogni $(x,y) \in D$. Chiaramente $D\tilde{h}$ ha rango massimo per ogni $(x,y) \in D$. Esso non è definito in $(0,0)$, che però non è in D.

(termine nota)

Abbiamo visto che M è una varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. In particolare, vediamo che si tratta della porzione di cono compresa tra i piani $z=0$ e $z=2$. Disegnamola:



Il punto $(1,1,\sqrt{2}) \in M$;

Lo spazio vettoriale tangente ad M in $(1,1,\sqrt{2})$ è dato da $\ker Dg(1,1,\sqrt{2})$:

$$Dg(1,1,\sqrt{2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Quindi sarà il piano di equazione $-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + z = 0$. Se vogliamo il piano tangente a M in $(1,1,\sqrt{2})$, esso sarà lo spazio affine "parallelo" a $\ker Dg(1,1,\sqrt{2})$ e passante per $(1,1,\sqrt{2})$. Esso sarà dunque

$$\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) + (z-\sqrt{2}) = 0}.$$

Lo spazio vettoriale normale sarà una retta e sarà perpendicolare allo spazio vettoriale tangente $\ker Dg(1,1,\sqrt{2})$.

Dall'equazione dello spazio tangente (ma si vede anche dalla forma di $\ker Dg(1,1,\sqrt{2})$), lo spazio normale sarà la retta di direzione $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$.
La retta normale ad M in $(1,1,\sqrt{2})$ sarà quindi la retta di direzione $\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1\right)$ passante per $(1,1,\sqrt{2})$.

Possiamo cercare la sua equazione. Per far questo ad esempio, cerchiamo due vettori ortogonali tra loro, ed ortogonali a $\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1\right)$ (completiamo $\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1\right)$ a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$). Essi sono $(1,-1,0)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ (sono una base dello spazio vettoriale tangente ad M in $(1,1,\sqrt{2})$; le equazioni della retta si ottengono imponendo che essa sia ortogonale a tale spazio). Le equazioni dello spazio (retta) normale sono quindi

$$\begin{cases} x-y=0 \\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2z=0 \end{cases};$$

la retta normale ad M e passante per $(1,1,\sqrt{2})$ è data da

$$\begin{cases} (x-1)-(y-1)=0 \\ \sqrt{2}(x-1)+\sqrt{2}(y-1)+2(z-\sqrt{2})=0 \end{cases}.$$

b) Ω è il solido delimitato dal semi-cono superiore $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e il piano $z = 2$. La ricerca dei massimi e minimi assoluti va effettuata nel suo interno, e sui suoi bordi. Innanzitutto, essendo f continua ed Ω compatto (poiché chiuso e limitato), essa ammette punti di massimo e minimo assoluti. Essi possono essere ~~estremi~~ punti critici locali per f (ovvero dove $\nabla f = 0$), o punti critici vincolati al bordo di Ω.
Il bordo di Ω è l'unione di diverse varietà:

- M costituisce una parte del bordo;
- B, il disco $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 4,\ z=2\}$ è il bordo superiore. Anch'essa è una varietà di dimensione 2.
- Γ, la curva $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 4,\ z=2\}$ è il "raccordo" tra M e B. Essa è una varietà di dimensione 1.
- $P=(0,0,0)$ è il vertice del cono. Esso non è in M. È una "varietà di dimensione 0". Dovremmo vedere il valore della funzione pure qui.

---

1) Iniziamo cercando punti critici locali per f.
$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$ Esso è nullo nel punto $(0,0,1)$ che è un punto di Ω. Un primo candidato è quindi $(0,0,1)$.
(Nb: imponendo $\nabla f=0$ cerchiamo punti critici locali per f su tutto il suo dominio di definizione. In questo caso è $\mathbb{R}^3$. Poi prenderemo quelli che si trovano in Ω)

2) Cerchiamo punti critici su M. M è data dagli zeri di

$z - \sqrt{x^2+y^2}$, però consideriamo i punti t.c. $0 < x^2+y^2 < 4$.

Ad ogni modo il vincolo, per utilizzare il T. dei moltiplicatori di Lagrange è $g(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$; ∇g e ∇f sono linearmente dipendenti nei

punti critici : $\begin{pmatrix} 2x & -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -2y & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2(z-1) & 1 \end{pmatrix}$. Imponiamo che tutti i

minori di ordine due siano nulli e che il punto stia su M:

$$\begin{cases} \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2x\left(1 + \frac{z-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \\ -2y\left(1 - \frac{(z-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \end{cases}$$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$, è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{4xy}{z} = 0 \\ 2x\left(2 - \frac{1}{z}\right) = 0 \\ -2y\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \end{cases}$$; $z \neq 0$, se $x = 0$, deve essere $y = 0$ e allora $z = 0$,

ma questo punto non è di M ! (z appare al denominatore!) ;

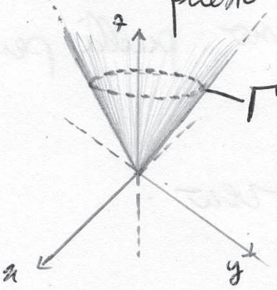
se $y = 0$, l'eventualità $x = 0$ non può presentarsi (come su), allora $x \neq 0$ e $z = \frac{1}{2}$; quindi da $\frac{1}{2} = \sqrt{x^2}$, segue $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

punti critici di f su $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sono

$\left(\pm\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Ed in più essi sono su M! ($x^2+y^2 = \frac{1}{4} < 4$)

— (Nota) ——

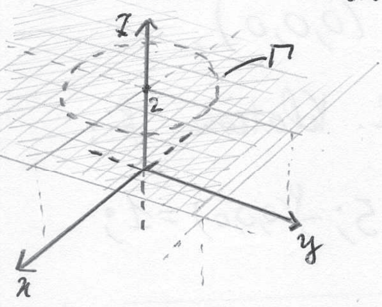
Abbiamo cercato i punti critici per f sull'insieme $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, che è la superficie del cono "intero" (non tagliato ad altezza $z=2$). Questo è il modo in cui si applica il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange. Per questo sono esclusi da questo studio eventuali punti critici locali sulla curva Γ



Γ, ma stiamo cercando punti critici vincolati su tutta questa superficie conica. Γ non è "privilegiata", per cui dovremo studiarla in seguito. Potremmo aver trovato punti critici vincolati che non soddisfano a $0<x^2+y^2<4$; in quel caso non li avremmo tenuti in considerazione.

3) Anche qui, cerchiamo punti critici vincolati al disco B. Il vincolo è $z=2$, ovvero il piano a quota $z=2$. È qui che cercheremo i nostri estremi vincolati; in questo caso è più semplice considerare $f_2 := f|_{z=2} = x^2-y^2+1$. Essa è una funzione definita su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{R}$. I punti critici si trovano imponendo $\nabla_{\mathbb{R}^2} f_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = 0$. Succede in $x=0, y=0$. Siamo nel piano $z=2$. Il punto è $(0,0,2)$ che è in Ω.

— Anche qui, abbiamo cercato punti critici vincolati sul piano $z=2$. La curva Γ non è "privilegiata";



4) passiamo finalmente a considerare Γ, che è l'intersezione tra il piano $z=2$ e la superficie conica $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Γ è una varietà 1-dimensionale. Descritta come zeri di una funzione $k: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, essa è ad esempio

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4, z=2\}.$$

$k = \begin{pmatrix} k_1 = x^2+y^2-4 \\ k_2 = z-2 \end{pmatrix}$; I punti critici su Γ sono quelli per cui $\nabla f, \nabla k_1$ e ∇k_2 sono linearmente dipendenti, ovvero:

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 2x & 0 \\ -2y & 2y & 0 \\ 2(z-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8xy = 0.$$

I casi sono $x=0 \Rightarrow y=\pm 2, (z=2)$;

$y=0 \Rightarrow x=\pm 2, (z=2)$;

Abbiamo quattro punti: $(0,\pm 2,2)$ e $(\pm 2,0,2)$.

5) Resta $P=(0,0,0)$. Qui semplicemente valuteremo la f.

Ricapitolando abbiamo:

- un estremante locale per f ($\nabla f=0$) in Ω, cioè $(0,0,1)$
- otto punti critici vincolati sulle varietà che definiscono il bordo di Ω: $(\pm\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $(0,0,2)$, $(0,\pm 2,2)$, $(\pm 2,0,2)$, $(0,0,0)$.

I massimi e minimi assoluti devono essere tra questi. Valutiamo f:

$f(\pm\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$; $f(0,0,2)=1$; $f(0,\pm 2,2)=-3$; $f(\pm 2,0,2)=5$; $f(0,0,0)=1$; $f(0,0,1)=0$.

I punti di max assoluto sono $(\pm 2,0,2)$. Il max vale 5; I punti di min. assoluto sono $(0,\pm 2,2)$. Il min vale -3. Essi sono su Γ. $\square$

ESERCIZIO 3

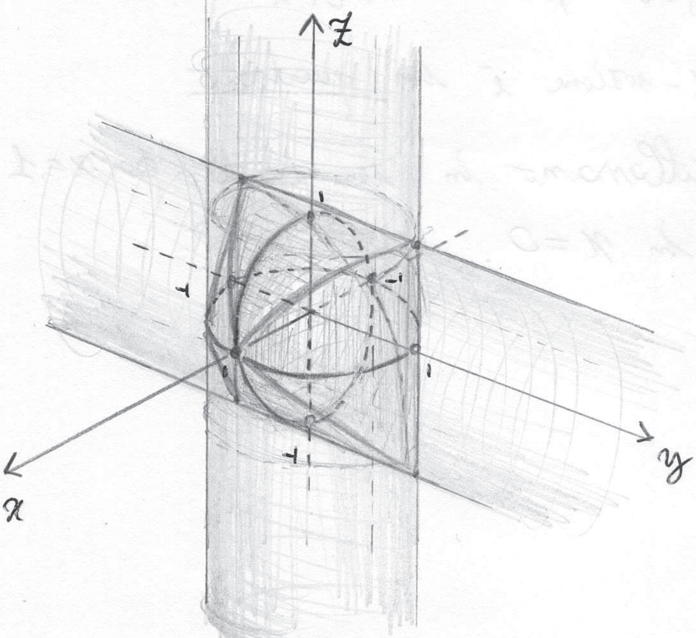
Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, x^2+z^2 \leq 1\}.$$ Calcolare

$$\int_E x^2 \, dx\, dy\, dz$$

Soluzione:

L'insieme $x^2+y^2 \leq 1$ è il cilindro di base il disco $x^2+y^2 \leq 1$ sul piano xy, e parallelo all'asse z.
L'insieme $x^2+z^2 \leq 1$ è il cilindro di base il disco $x^2+z^2 \leq 1$ sul piano xz, e parallelo all'asse y.
L'insieme E è l'intersezione tra i due cilindri.



Cerchiamo una descrizione che ci permetta di calcolare l'integrale;
da $x^2+y^2 \leq 1$ e $x^2+z^2 \leq 1$ segue $x^2 \leq 1$, cioè $-1 \leq x \leq 1$. In più
$y^2 \leq 1-x^2$ e $z^2 \leq 1-x^2$, cioè $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ e
$-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$. E può essere descritto come

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Il nostro integrale diventa

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dz\right)dy\right)dx = \int_{-1}^{1} x^2\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\right)dx =$$

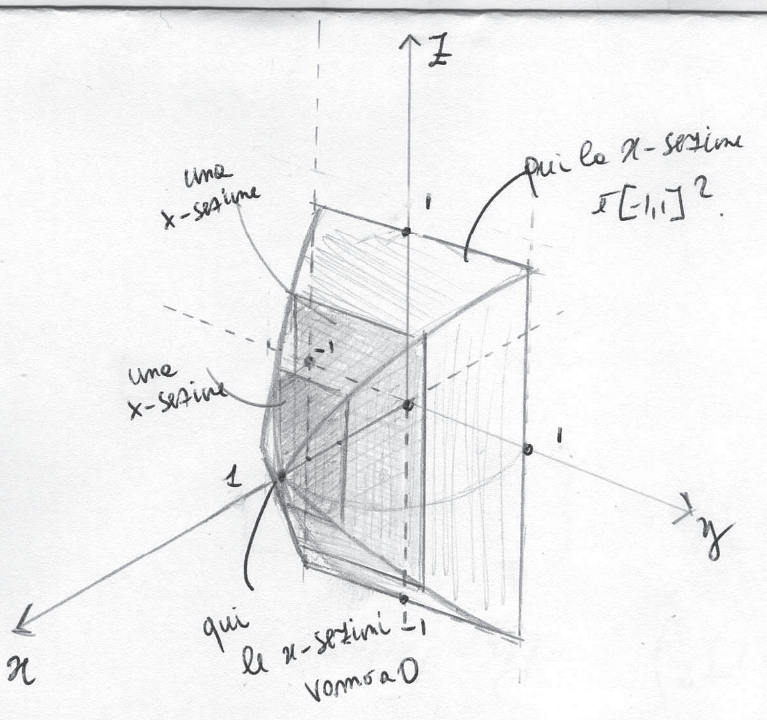
$$= \int_{-1}^{1} 4x^2(1-x^2)\,dx = \text{(siccome } x^2(1-x^2) \text{ è pari in } x \text{ e } [-1,1] \text{ è simmetrico rispetto all'origine)} =$$

$$= 2\cdot\int_0^1 4x^2(1-x^2)\,dx = 8\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx = 8\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 8\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{16}{15}}$$

Disegnamo E. Con la nuova descrizione (quella usata per l'integrale) è più semplice. Scegliamo la parte $x \geq 0$. Il dominio è simmetrico in x, quindi disegnamone metà:

$$E_{\geq} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Fissata una quota $x \in [0,1]$, la x-sezione è un quadrato di lato $2\sqrt{1-x^2}$. Questi quadrati collassano in un punto per $x=1$, e diventano tutto $[-1,1]\times[-1,1]$ in $x=0$.



$\square$

[redacted])

ESERCIZIO 4

Dire se $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \in L^1([0,1]^2)$; calcolare $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dx\,dy$.

Soluzione:

$f \geq 0 \ \forall x,y \in [0,1]^2$.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot 2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{\sqrt{y}}$; e $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{y}}\,dy < +\infty$. Allora

per Tonelli, $f \in L^1([0,1]^2)$. Per Fubini,

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx \right) dy = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{y}}\,dy = \boxed{4}$$

□