

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

1

Facciamo un riepilogo dei metodi con cui calcolare il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie in $\mathbb{R}^3$. Riprendiamo gli esercizi 12.7 e 10.8 (che è anche il 12.9 del De Lorenz-Horionda) dei fogli precedenti.

I casi che incontreremo si ridurranno fondamentalmente ai tre seguenti: superficie parametrizzata cartesianamente, sfera e cilindro. Quindi riepiloghiamo queste tre situazioni e come ci si comporta.

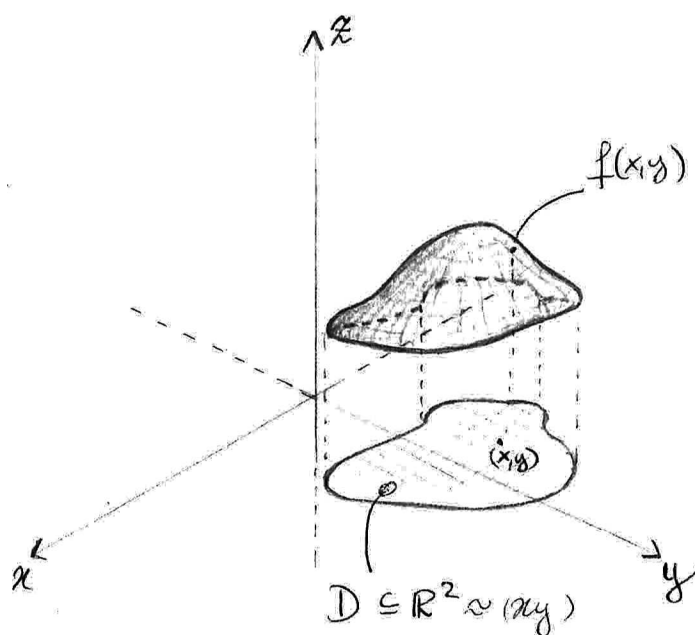
1) Superficie cartesiana: Si tratta del grafico di una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è una regione di $\mathbb{R}^2$.

Una superficie cartesiana è quindi parametrizzata come

$$(x, y, f(x, y)), \text{ con } (x, y) \in D.$$

A volte (spesso) si usano i parametri (u, v) per (x, y) .

Per cui la parametrizzazione è $(u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



Per cui quando ci si trova di fronte a una parametrizzazione del tipo $\varphi(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$, con $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, siamo di fronte ad una superficie che è il grafico di una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Per quanto riguarda il vettore ortogonale alla superficie cartesiane, la scelta canonica (ricordiamo che sono due, ^(le possibilità) e differiscono per il segno) è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = e_1 \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \right) - e_2 \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) + e_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(quindi è il prodotto vettoriale in cui il primo fattore è $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ (cioè quello "rispetto a x ") e il secondo è $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ (cioè quello "rispetto a y ").

Normalizzato è:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

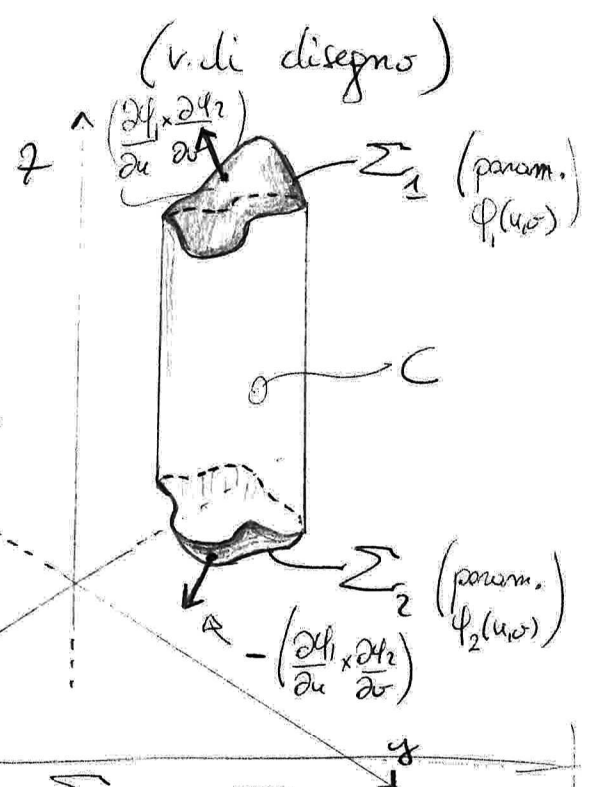
"Questo vettore punta verso l'alto". Quindi è importante ricordare che, data una superficie parametrica $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$, il vettore ortogonale alla superficie dato da $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ è quello che "punta verso l'alto".

Questo torna poi utile nel calcolo di flussi di campi vettoriali attraverso superfici, siccome è importante sapere che flusso vogliamo calcolare, se quello entrante, o quello usante: la direzione delle normali è fondamentale.

Solitamente si avrà a che fare con regioni $C \subseteq \mathbb{R}^3$, e del calcolo del flusso usante. Di solito una superficie chiusa costituisce il "coperchio" o "la base" di queste regioni.

Siccome per una superficie parametrica chiusa $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(u,v) \end{pmatrix}$ il vettore

$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ è quello che punta verso l'alto,



Se la superficie parametrica è "il coperchio" del solido (es. C nel disegno), allora $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ sarà il vettore usante; se invece è la base, $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ sarà quello entrante, per cui $-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)$ sarà quello usante.

Σ_1 e Σ_2 sono due superfici parametriche chiuse, rispettivamente il "coperchio" e "la base" del solido C

Vedremo l'applicazione in seguito. Vediamo le altre due situazioni:

2) Superficie sferica di raggio R ($x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$ fissato).
 La parametrizzazione (in coordinate sferiche) "standard" della superficie sferica è $\varphi(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \phi \\ R \sin \vartheta \sin \phi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$,
 $\vartheta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

(ϑ l'angolo "verticale" formato con l'asse z , ϕ quello che fa il "giro completo" sul piano xy). Il vettore ortogonale uscante della superficie sferica è

$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$ (quindi prima ^{fattore} $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}$, secondo fattore $\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$), cioè

$$\begin{pmatrix} e_1 & R \cos \vartheta \cos \phi & -R \sin \vartheta \sin \phi \\ e_2 & R \cos \vartheta \sin \phi & R \sin \vartheta \cos \phi \\ e_3 & -R \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} = e_1 (R^2 \sin^2 \vartheta \cos \phi) - e_2 (R^2 \sin^2 \vartheta \sin \phi) + e_3 (R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)$$

$$= \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \vartheta \cos \phi \\ R^2 \sin^2 \vartheta \sin \phi \\ R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}; \text{ il vettore } \underline{\text{normale}} \text{ uscente (quello unitario)}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \cdot \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \vartheta \cos \phi \\ R^2 \sin^2 \vartheta \sin \phi \\ R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix};$$

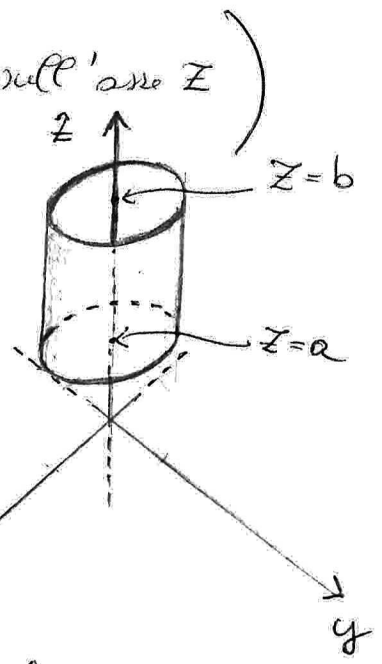
③ Cilindro (di asse z e base la circonferenza di raggio R : $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ fissato).

La parametrizzazione "standard" del cilindro è

$$\varphi(\vartheta, \xi) = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \\ R \sin \vartheta \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad \xi \in [a, b]$$

(a, b sono la quota minima e quella massima sull'asse z)

Il vettore ortogonale uscente dalla superficie cilindrica è



$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} e_1 & -R \sin \vartheta & 0 \\ e_2 & R \cos \vartheta & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e_1(R \cos \vartheta) - e_2(-R \sin \vartheta) + e_3(0) = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \\ R \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ il vettore}$$

normale (unitario) uscente è $\frac{1}{R} \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \\ R \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix};$

Es: provare a scrivere la parametrizzazione e riconoscere la normale uscente nei casi dei cilindri con asse x ed y ($y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$)

Ricordiamo cosa vuol dire flusso di un campo $\vec{F}(x,y,z)$ attraverso una superficie Σ parametrizzata da

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in D. \quad \underline{\text{Il flusso dipende dalla}}$$

parametrizzazione! Infatti esso è per definizione

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{\varphi} d\sigma = \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \end{pmatrix} du dv$$

$d\sigma$
 "elemento di superficie"

$\equiv \vec{\nu}_{\varphi}$

Questo è il flusso attraverso una superficie parametrizzata quando ci viene già data la parametrizzazione $\varphi(u,v)$.

Invece, se abbiamo una regione $D \subset \mathbb{R}^3$, il cui bordo ∂D è costituito da un'unione di superfici, e ci viene chiesto di calcolare il flusso di un campo $\vec{F}(x,y,z)$

uscente dal bordo ∂D di D , dobbiamo riconoscere

le varie superfici che compongono ∂D , parametrizzarle opportunamente e trovare il vettore ortogonale uscente:

infatti vorremmo calcolare $\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma \rightarrow$ elemento di superficie

$\downarrow$
 vettore normale "uscente"

Abbiamo imparato a riconoscere l'orientamento di un vettore ortogonale date le "parametrizzazioni standard" di ① superficie cartesiana, ② sfera, ③ cilindro.

Cercheremo quindi di ricondurrei sempre e questi tre casi

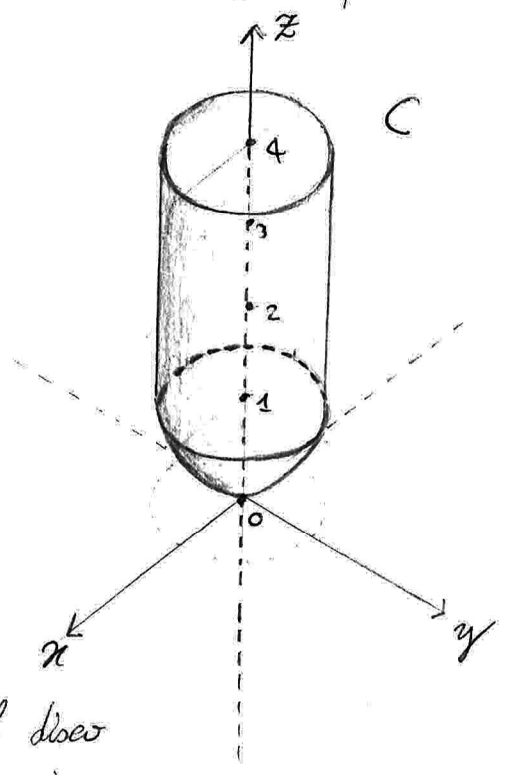
ES. 12.7 $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4, x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1\}$

- i) Disegnare C ; dire se è compatto;
- ii) $\text{Vol}(C)$;
- iii) $\vec{F}(x, y, z) = e_z x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da C ;
- iv) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da C attraverso le singole porzioni di frontiera di C .
- v) Area della frontiera di C .

Sol:

i) C è compatto: $C \subseteq \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$
 il cilindro di base il disco unitario e $0 \leq z \leq 4$; è chiuso: intersezione di tre chiusi ($z \leq 4$, $x^2 + y^2 \leq z$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, le disuguaglianze sono larghe).

ii) C è dato dal volume del cilindro di base il disco unitario e con $1 \leq z \leq 4$ (quindi di altezza 3) e del volume della regione che è interna al paraboloide, fino a quota $z=1$.
 Il volume della parte di cilindro è 3π . Per quanto riguarda il paraboloide questa parte di C è data da: $\{(x, y, z) : z \geq x^2 + y^2, z \leq 1\} =: P$,
 cioè $\int_P dx dy dz$



$$\int_P dx dy dz = \int_{\substack{\uparrow \\ \text{fil. paralleli} \\ \text{a } z}} \left(\int_{\substack{\uparrow \\ \text{proiet. di } P \text{ nel piano } xy; \text{ la } xy\text{-sezione \(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 \leq 1\)}}} \int_{\vec{x}^2 + \vec{y}^2}^1 dz \right) dx dy =$$

$$= \int_{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 \leq 1} (1 - \vec{x}^2 - \vec{y}^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dx dy = r dr d\theta \end{cases}$

$$Vol(C) = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

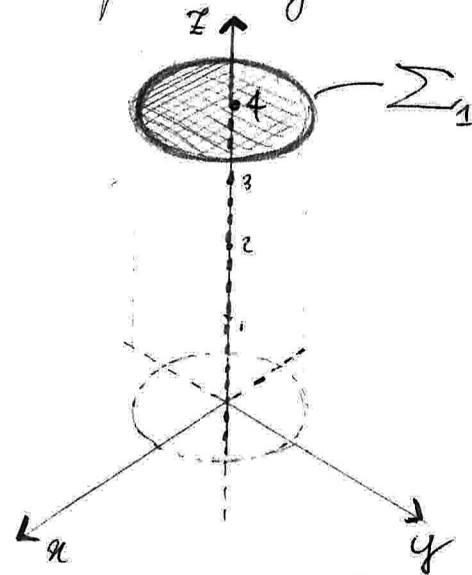
iii) Usiamo il Teorema della Divergenza.

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \text{div } \vec{F} = 1.$$

$$\int_{\partial C} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = \int_C \text{div } \vec{F} dx dy dz = \int_C dx dy dz = Vol(C) = \frac{7\pi}{2}$$

iv) Calcoliamo il flusso uscente dalle singole parti di ∂C .

Sia Σ_1 il disco unitario parallelo al piano xy e a quota $z=4$ (il "coperchio")



Riconosciamo Σ_1 come superficie

parametrica: essa è il grafico della funzione $f_1: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$f_1(x, y) \equiv 4 \quad (\text{la funzione costante } 4,$$

definita su $D \subseteq \mathbb{R}^2$, dove D è il disco unitario in $\mathbb{R}^2$).

Come al solito, per prendere familiarità con le notazioni delle superfici parametriche cartesiane, scriviamo la parametrizzazione φ_1 di Σ_1 con i parametri u, v

$$x=u$$

$$y=v$$

5

$z=f(u,v)=4$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, allora

$$\varphi_1(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u,v \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}. \quad (\text{Caso 1})$$

Allora, come abbiamo detto, il vettore ortogonale

della superficie che punta in "alto" è

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1(0) - e_2(0) + e_3(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(che tra l'altro è già normalizzato: $|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}| = 1$).

Siccome Σ_1 è il "coperchio" di C , e $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ punta in "alto", esso è uscendo dalla superficie ∂C .

Per cui il flusso uscente da ∂C attraverso Σ_1 è:

$$\int_D \vec{F}(\varphi_1(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}|} \, d\text{udv} = \int_D \vec{F}(\varphi_1(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, d\text{udv}$$

d'ora in poi non lo scriveremo più dovendo (per sottinteso)

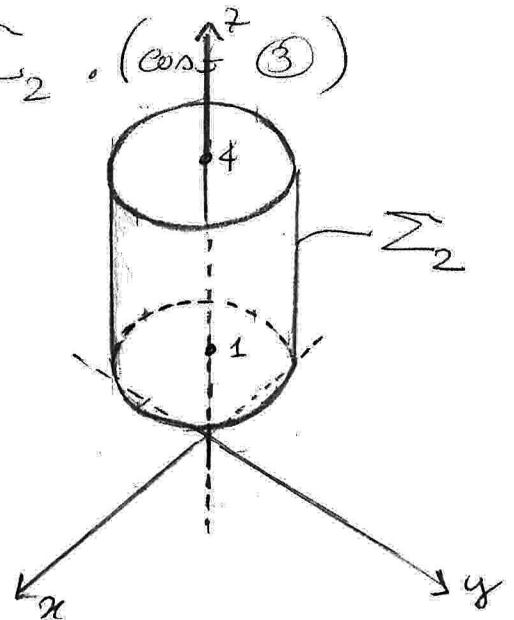
$$= \int_{D=\{u^2+v^2 \leq 1\}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, d\text{udv} = \int_{D=\{u^2+v^2 \leq 1\}} 0 \, d\text{udv} = 0;$$

Ma ora Σ_2 la superficie cilindrica che chiude C lateralmente. Essa ha per asse l'asse z , e per base la circonferenza di raggio 1; l'altezza è compresa tra $z=1$ e $z=3$. Siamo nel caso di superficie cilindrica.

Per $\phi_2(\vartheta, \bar{z})$ la parametrizzazione di Σ_2 . (così ③)

Come abbiamo visto, il cilindro
di asse z , raggio $R=1$ e $1 \leq z \leq 4$
si parametrizza

$$\phi_2(\vartheta, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \bar{z} \in [1, 4]$$



Il vettore $\frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}}$ è uscente dalla superficie cilindrica

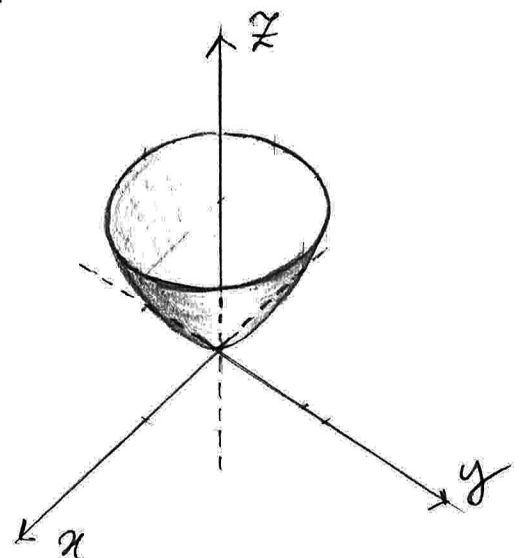
$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{z}} = \begin{pmatrix} e_1 & -\sin \vartheta & 0 \\ e_2 & \cos \vartheta & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1(\cos \vartheta) - e_2(\sin \vartheta) + e_3(1) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{v}_e d\omega = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 1 \end{pmatrix} d\bar{z} d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^4 \cos^2 \vartheta d\bar{z} d\vartheta = 3\pi ;$$

Possiamo infine a Σ_3 la superficie della piramide di
paraboloide, avere la "base" di C .

Possiamo riconoscere questa superficie
come una superficie cartesiana
(quindi così ①)



Toss: prima di proseguire, facciamo la seguente osservazione: 6
 nella descrizione di C con disuguaglianze, se prendiamo
 le uguaglianze, otteniamo delle equazioni che descrivono
 delle superfici, (parti delle) quali andranno a costituire il bordo
 ∂C . Nel nostro caso avremo in particolare $Z=4$, $Z=x^2+y^2$.
 In generale, se abbiamo $Z=f(x,y)$, allora quella parte di
 superficie può essere vista come superficie cartesiana,
 ovvero grafico di una $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con D da determinare:
 è il luogo dei punti $(x,y, f(x,y))$; nel nostro caso, per
 Σ_3 , abbiamo $Z=x^2+y^2$. In generale, se riamociamo
 $Z=f(x,y)$ nella descrizione di una parte del bordo di una
 regione, esso può essere parametrizzato come superficie
 cartesiana

Vediamo che $\Sigma_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2+y^2 \leq 1, z=x^2+y^2\}$;
 in particolare Σ_3 è il grafico di una $f_3: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq 1\}$, $f_3(x,y) = x^2+y^2$. Per cui (almeno $x=u, y=v$)
 una parametrizzazione di questa superficie cartesiana è $\varphi_3(u,v)$:
 $\varphi_3(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}: (u,v) \in D$. Il vettore ortogonale
 che punta in 'alto' è

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} = e_1(-2u) - e_2(2v) + e_3 = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ma siccome Σ_3 è la base di C , allora $\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial v}$, che punta "in alto", sta puntando verso l'interno di C .

Per cui è il vettore entrante. A noi serve quello uscite, che sarà dunque $\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma &= \int_{D=\{u^2+v^2 \leq 1\}} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix} du dv = \int 2u^2 du dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \cos^2 \vartheta dr d\vartheta = 2 \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{passiamo a coord. polari} \\ u = r \cos \vartheta \\ v = r \sin \vartheta \\ du dv = r dr d\vartheta \end{array} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

In definitiva: $\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = 0$; $\int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = 3\pi$; $\int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = \frac{\pi}{2}$,

$$\int_{\partial C} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$\partial C = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$

v) Calcoliamo l'area di ∂C . $\partial C = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$;
l'area di Σ_1 è π (disco unitario)

l'area di Σ_2 è $6\pi (= 3 \cdot 2\pi)$ (superficie laterale di un cilindro di base la circonferenza unitaria e altezza 3)

Calcoliamo l'area di Σ_3 : $\text{Area}(\Sigma_3) = \int_{\Sigma_3} d\sigma$

Del punto iv) abbiamo la parametrizzazione $\phi_3(u,v)$ di Σ_3 ; 7

abbiamo che $\frac{\partial \phi_3}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_3}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \right| =$

(e' il modulo,
quindi va bene una qualsiasi
dei due vettori, quello entrante o uscente!)

$$= \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)};$$

Per cui $\text{Area}(\Sigma_3) = \int_{D=\{u^2+v^2 \leq 1\}} \sqrt{1+4(u^2+v^2)} du dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \sqrt{1+4r^2} dr \right) d\theta$
coord. polari

$$= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1+4r^2} dr = \pi \int_{f(0)=0}^{f(1)=1} \sqrt{1+4f} df = \frac{2\pi}{3 \cdot 4} (1+4f)^{\frac{3}{2}} \Big|_{f=0}^{f=1} =$$

$r^2 = f$
 $2r dr = df$

$$= \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \text{ Quindi}$$

$$\text{Area}(\partial C) = \text{Area}(\Sigma_1) + \text{Area}(\Sigma_2) + \text{Area}(\Sigma_3) = \pi + 6\pi + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

□

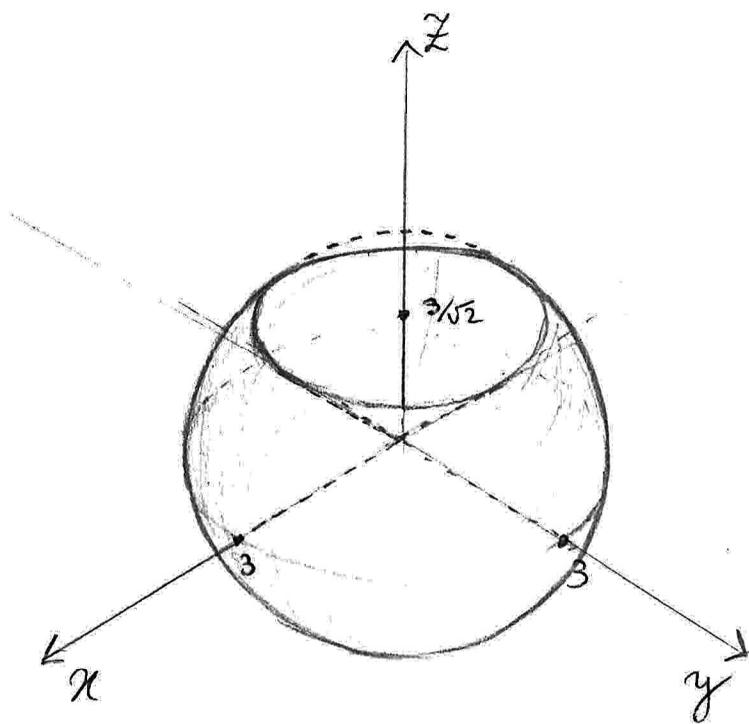
ES. 12.9 Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9, z < \sqrt{x^2 + y^2}\}$

i) Calcolare il volume $\text{Vol}(E)$. (descrivere E)

ii) Sia $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcolare il flusso di $\nabla u(x, y, z)$ uscente dalle singole parti di E

Sol.

i) E è una sfera a cui si è tolto il semicono superiore (vedi immagine).



La superficie laterale di E è formata da una parte della superficie sferica (di raggio 3) e da una parte della superficie del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Notiamo già da ora che la parte della superficie del cono è il "coperchio" di E .

La sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e la superficie conica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ si incontrano a quota $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ricordiamo che tutto lo palla (piena) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, scritta in coordinate sferiche,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \sin \phi \\ y &= r \sin \vartheta \cos \phi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 3].$$

Si vede che siccome $\frac{3}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{4}$, l'angolo ϑ varia da $\frac{\pi}{4}$, fino a π , quindi, in coordinate sferiche,

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = r \sin \vartheta \cos \phi, y = r \sin \vartheta \sin \phi, z = r \cos \vartheta : r \in [0, 3],$$

$$\vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \}. \text{ Ricordiamo del modulo del}$$

det. Jacobiano di questa trasformazione di coordinate, che

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\phi d\vartheta ; \text{ per cui}$$

$$\text{Vol}(E) = \int_E dx dy dz = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi dr = 9 \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos \vartheta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right) =$$

$$= 18\pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 9\pi(\sqrt{2} + 2).$$

$$ii) \vec{\nabla} u = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (è un campo radiale)}. \partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

dove Σ_1 è la superficie sferica, Σ_2 è quello sul cono.

Portiamo da Σ_1 la parametrizzazione "standard" (cos(2)) e

$$\varphi_1(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} 3 \sin \vartheta \cos \phi \\ 3 \sin \vartheta \sin \phi \\ 3 \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

N.b. Σ_1 non è tutta la sfera!

Abbiamo visto (cos(2)) che il vettore normale della superficie sferica con parametrizzata è

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \wedge \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 9 \sin^2 \vartheta \cos \phi \\ 9 \sin^2 \vartheta \sin \phi \\ 9 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}; \text{ per cui}$$

$$\int_{\Sigma_1} \vec{\nabla} u \cdot \vec{e}_z \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \begin{pmatrix} 3 \sin \vartheta \cos \phi \\ 3 \sin \vartheta \sin \phi \\ 3 \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \sin^2 \vartheta \cos \phi \\ 8 \sin^2 \vartheta \sin \phi \\ 8 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \cdot 27 (\sin^3 \vartheta \cos^2 \phi + \sin^3 \vartheta \sin^2 \phi + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 54 (\sin^3 \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 54 \sin \vartheta d\vartheta d\phi =$$

$$= 108\pi (-\cos \vartheta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}) = 54\pi(2 + \sqrt{2}).$$

Possiamo al flusso uscente da Σ_2 ; come abbiamo visto, siccome Σ_2 è descritta da $z = f(x, y)$, possiamo parametrizzare Σ_2 come superficie cartesiana:

$$\phi_2(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix} : (u, v) \in D. \quad D \text{ si vede essere}$$

il disco in $\mathbb{R}^2$ di raggio $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (infatti, essendo $z \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$, allora da $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (sup. conica) segue $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$).

Per cui $\frac{\partial \phi_2}{\partial u} \times \frac{\partial \phi_2}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{pmatrix} = e_1 \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) + e_2 \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) + e_3 =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{è vettore ortogonale che punta "in alto".}$$

Essendo Σ_2 il "coperchio", questo è il vettore uscente.

Per cui

9

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_2} \vec{V} u \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma &= \int_{D=\{u^2+v^2 \leq \frac{\theta}{2}\}} 2 \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) \cdot \left(\frac{-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{-\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}} \right) du dv = \\ &= 2 \int_D \frac{-u^2}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}} + \sqrt{u^2+v^2} \, du dv = 2 \int_D -\sqrt{u^2+v^2} + \sqrt{u^2+v^2} \, du dv = 0. \end{aligned}$$

Quindi il flusso uscite da ∂E è dato dal solo
flusso uscente da Σ_1 .

(Si poteva risolvere più facilmente con delle osservazioni,
si possono trovare nel precedente foglio di esercizi).

□