

FLUSSI. FORMULA DI GREEN.

1

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

(DA FOGLI "PALESTRA DI ESERCIZI").

18 Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} x^3 dy$

dove γ è il bordo dell'insieme $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ orientato positivamente, verificando il risultato con la formula di Green.

Soluzione:

L'insieme D è una corona circolare nel piano, centrata nell'origine, di raggi 1 e 2. Il bordo γ di D è composto da due curve: la circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 e quella centrata nell'origine di raggio 2. Chiamiamole γ_1 e γ_2 .

Per calcolare l'integrale nel modo in cui ci viene chiesto, dobbiamo parametrizzare la curva γ rispettando l'orientazione positiva. Ricordiamo di cosa si tratta:

"La frontiera ∂D di un dominio si dice orientata positivamente rispetto al dominio se percorrendo la curva ∂D in senso crescente del parametro

(ricordiamo che una curva è data da una parametrizzazione $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, " $\alpha(t)$ ", quindi ha senso parlare di "senso crescente del parametro")

il dominio resta a sinistra."

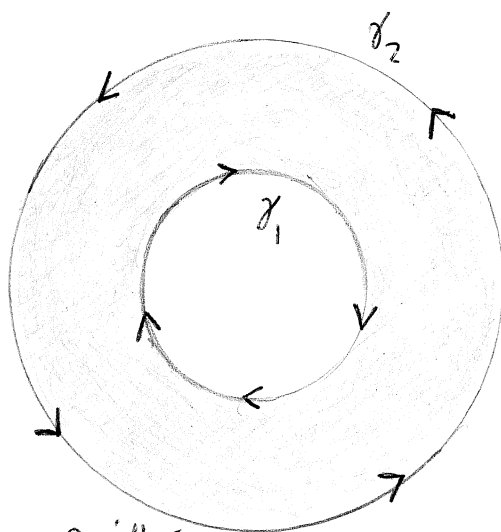
Nel nostro caso

$$\partial D = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

la frontiera è composta

le due curve, che dobbiamo

parametrizzare in modo opportuno
per preservare questa orientazione positiva.



Il primo punto riguarda γ_2 (la circonferenza più esterna),

vediamo che se la percorriamo in senso antiorario,

il dominio "resta a sinistra". Quindi ci serve

una parametrizzazione che faccia percorrere la curva
in senso antiorario quando il parametro avanza.

Questa è la solita parametrizzazione delle circonferenze

in $\mathbb{R}^2$ col parametro ϑ : (chiamiamo $\gamma_2(\vartheta)$ anche la parametr.)

$$\gamma_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\vartheta) \\ 2 \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]: \text{effettivamente}$$

per ϑ che cresce in $[0, 2\pi]$, stiamo percorrendo γ_2 in senso
antiorario, e D resta "a sinistra".

Passiamo a γ_1 . Per far sì che percorrendo γ_1 , D resti
"a sinistra", dobbiamo percorrere γ_1 in senso orario!

Ci serve una parametrizzazione del fascio punto.

2

Ad esempio (chiamiamo $\gamma_1(\vartheta)$ questa parametrizzazione)

$$\gamma_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]. \text{ Non \u00e8 difficile verificare}$$

che, partendo da $\vartheta=0$, c'\u00e8 il punto $(1, 0)$,

e facendo crescere ϑ , ci si sposta in sens orario:

(es. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, il punto \u00e8 $(0, -1)$, ecc.).

Quindi abbiamo descritto le curve con due parametrizzazioni che rispettano l'orientazione richiesta. Poniamo al posto dell'integrale:

$$\int_{\gamma} x^3 dy = \int_{\gamma_1} x^3 dy + \int_{\gamma_2} x^3 dy; \quad \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ hanno due diverse}$$

parametrizzazioni; calcoliamo prima $\int_{\gamma_1} x^3 dy$

(per calcolare $\int_{\gamma} f dy$ (dx)), quando abbiamo una parametrizzazione $\gamma(t)$,

$$\text{formalmente scriviamo } \int_{\gamma} f(x,y) dy \text{ (dx)} = \int_I f(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt \text{ (risp. } \gamma_1'(t) dt),$$

dove $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} (=x) \\ (=y) \end{matrix}$, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$; nel nostro caso

$$\boxed{\gamma_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \Rightarrow dy = -\cos(\vartheta) d\vartheta;}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} x^3 dy &= - \int_0^{2\pi} \cos^4(\vartheta) d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) (1 - \sin^2 \vartheta) d\vartheta = - \int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) d\vartheta + \int_0^{2\pi} (\cos \vartheta \sin \vartheta)^2 d\vartheta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \right) d\vartheta + \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(2\vartheta)}{2} \right)^2 d\vartheta = -\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(4\vartheta)}{2} \right) d\vartheta = \end{aligned}$$

$$= -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Calcoliamo $\int_{\gamma_2} x^3 dy$; $\gamma_2(\vartheta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\vartheta) \\ 2\sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \vartheta \in [0, 2\pi]$

$$dy = 2\cos(\vartheta) d\vartheta$$

$$\int_{\gamma_2} x^3 dy = 16 \int_0^{2\pi} \cos^4(\vartheta) d\vartheta = 12\pi \quad (\text{dal primo integrale, } -\int_0^{2\pi} \cos^4(\vartheta) = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \dots)$$

Per cui $\int_{\gamma} x^3 dy = \frac{45\pi}{4}.$

Tra, verifichiamo il risultato con la formula di Green.

Noi abbiamo $\int_{\gamma} x^3 dy$; vogliamo scrivere

$$\int F_1 dx + F_2 dy, \text{ dove } F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \text{ è un campo vettoriale.}$$

$\gamma (= \partial D, \text{ orientata positivamente!})$

chiaramente nel nostro caso $F_1(x, y) \equiv 0, F_2(x, y) = x^3.$

Per cui $\int_{\gamma} x^3 dy = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = (F. \text{ Green}) =$

$$= \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx dy = \int_D 3x^2 \, dx dy ;$$

Dobbiamo calcolare

$$\int_D 3x^2 dx dy, \text{ dove } D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Poniamo a coordinate polari $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, $(x,y) = \varphi(r,\vartheta)$
 $r \in [1,2]$, $\vartheta \in [0,2\pi]$, e $|\det \varphi'| = r$. (φ è il c.d. di coordinate).

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 3r^3 \cos^2 \vartheta dr \right) d\vartheta = 3 \left(\int_1^2 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) =$$

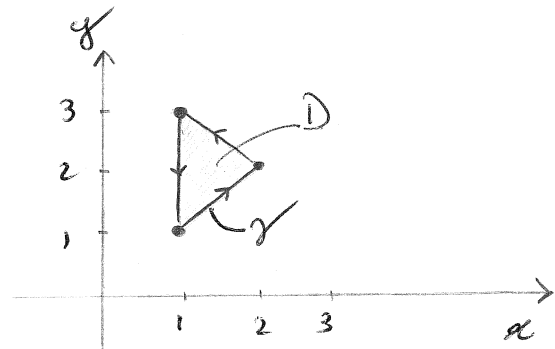
$$= \left(3 \frac{r^4}{4} \Big|_{r=1}^{r=2} \right) \cdot (\pi) = \left(12 - \frac{3}{4} \right) \pi = \boxed{\frac{45\pi}{4}}$$

□

ES. 19 | Applicando la formula di Green calcolare

$$\oint_{\gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x+y)^2 dy, \text{ dove } \gamma \text{ è il perimetro}$$

del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,2)$ e $(1,3)$, percorso in verso antiorario. Verificare il risultato calcolando direttamente l'integrale.



Soluzione:

Il bordo γ è percorso in senso antiorario:

vediamo subito che significa orientazione positiva del bordo

(che è quella richiesta nello test del T. di Green): infatti

percorrendo in senso antiorario γ , il dominio D che racchiude (il triangolo)

$$\int_{\gamma_1} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy,$$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}, t \in [0,1];$$

$$dx = dt; dy = dt; \text{ per cui}$$

$$\int_0^1 2(2(1+t)^2)dt + (2(1+t))^2 dt = \int_0^1 4(1+t)^2 + 4(1+t)^2 dt = \int_0^1 8(1+t)^2 dt =$$

$$= \frac{8(1+t)^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{56}{3}};$$

$$\int_{\gamma_2} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy,$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2+t \end{pmatrix}, t \in [0,1];$$

$$dx = -dt; dy = dt; \text{ per cui}$$

$$\int_0^1 -2((2-t)^2 + (2+t)^2) + 4 dt = \int_0^1 -4t^2 dt = -\frac{4t^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=1} = \boxed{-\frac{4}{3}};$$

$$\int_{\gamma_3} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy,$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-2t \end{pmatrix}, t \in [0,1]$$

$$dx = 0 dt; dy = -2dt; \text{ per cui}$$

$$\int_0^1 -2(1-2t)^2 dt = -2 \int_0^1 (16 + 4t^2 - 16t) dt = -8 \int_0^1 (t^2 - 4t + 4) dt =$$

$$= -8 \int_0^1 (t-2)^2 dt = -\frac{8}{3}(t-2)^3 \Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{8}{3}(-1 + 8) = \boxed{-\frac{56}{3}};$$

Sommando i contributi, si ha:

$$\oint_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

□

