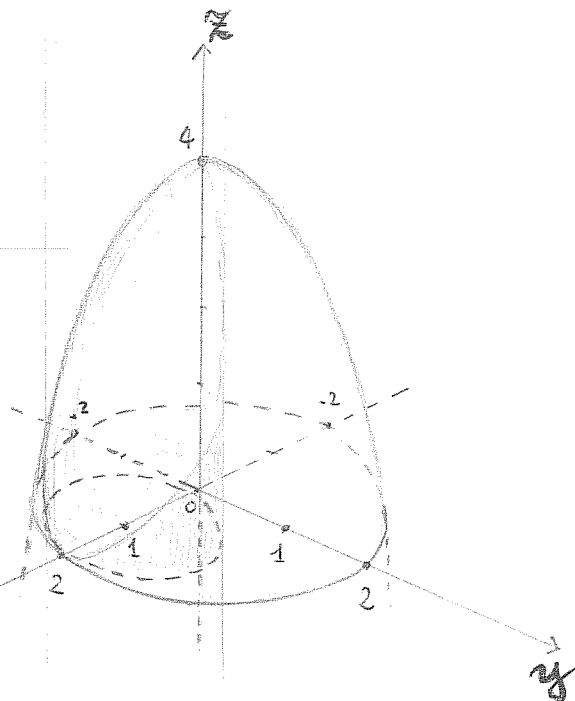


ES. 8 (Ancora un calcolo di volume)

Calcolare il volume del solido che giace sotto la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$, sopra il piano xy e dentro il cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Soluzione:

L'equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ è quella di un paraboloide di vertice $(0, 0, 4)$. Essi è rivolto verso il basso, e interseca il piano xy (cioè $z=0$) formando una circonferenza (sul piano xy) di centro O e raggio 2 ($x^2 + y^2 = 4, z=0$).



Il piano xy è semplicemente il piano $z=0$. Quindi il solido è tale che $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Invece il luogo $(x-1)^2 + y^2$ individua un cilindro che ha come "base" la circonferenza (sul piano xy) di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Il solido è dentro al cilindro, per cui è t.c. $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Chiamiamo D questo solido:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Il dominio D si presta ad un' integrazione per fili paralleli all'asse z : infatti conosciamo già la proiezione di D sul piano xy e il disco in xy di centro $(1,0)$ e raggio 1 , e le xy sezioni sono già scritte: $V(xy)$, $0 \leq z \leq 4-x^2-y^2$. Per cui

$$V(D) = \int_{E:=\{(x,y): (x-1)^2+y^2 \leq 1\}} \left(\int_0^{4-x^2-y^2} dz \right) dx dy = \int_E (4-x^2-y^2) dx dy.$$

Per calcolare questo integrale possiamo passare a coordinate polari (r, ϑ) . E è un disco, però non è centrato in $(0,0)$.

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta; \quad |\det \varphi(r, \vartheta)| = r; \quad \text{Quali } (r, \vartheta) \text{ descrivono } E?$$

$$E := \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}, \text{ per cui } x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x \leq 0.$$

$$\text{Nelle nuove coordinate: } r^2 - 2r \cos \vartheta \leq 0.$$

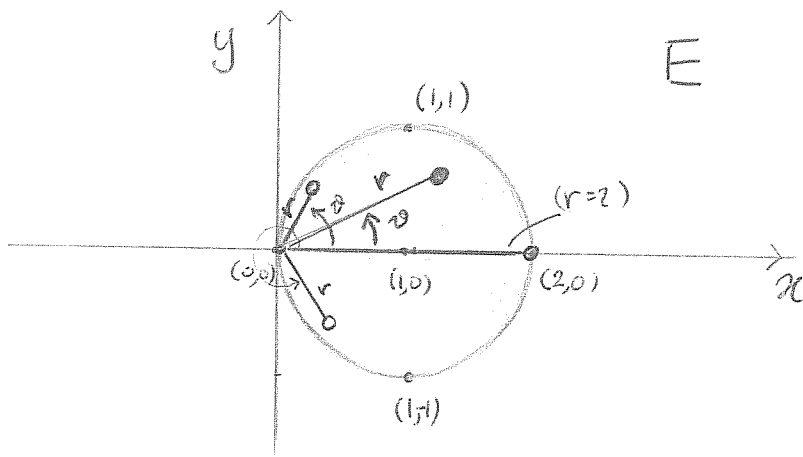
Più $r(r - 2 \cos \vartheta) \leq 0$. Ricordiamo $r \geq 0$ (è la distanza del punto da $(0,0)$), è non-negativa. Per cui la condizione è

$$r - 2 \cos \vartheta \leq 0, \text{ cioè } r \leq 2 \cos \vartheta \text{ (e } r \geq 0).$$

È siccome $0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta$, deve essere $0 \leq 2 \cos \vartheta$, ovvero $\vartheta \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. In definitiva, nelle nuove coordinate

$$E = \{(r, \vartheta) : 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta, \vartheta \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\}$$

(oss. $0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta \leq 2$, che infatti è coerente col fatto che la massima distanza di un punto di E da $(0,0)$ può essere 2)



E

1 2

Si vede meglio graficar
de i punti $(x,y) \in E$
sono rappresentati da
valori di $r \leq 2$
(la loro distanza da $(0,0)$)

e da valori di θ compresi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (1° quadrante)
e tra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π (4° quadrante).

Nel calcolo di $\int_E 4-x^2-y^2 dx dy$, in coordinate polari, la funzione
integranda è semplicemente $4-r^2$. Abbiamo dunque

$$\int_E 4-x^2-y^2 dx dy = \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]} \left(\int_0^{2\cos\theta} (4-r^2) r dr \right) d\theta; \text{ infine notiamo}$$

che per questioni di simmetria, questo integrale è il doppio
dell'integrale fatto solo nel 1° (o solo nel 4°) quadrante
(Stiamo integrando una funzione del solo raggio, e infatti
il dominio è simmetrico rispetto all'asse x). Perciò
ci basta calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} 4r-r^3 dr \right) d\theta$ (e poi prenderne il doppio).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=2\cos\theta} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta) d\theta =$$

$$= \left(\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \right) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} d\vartheta - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \right)^2 d\vartheta =$$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{4} + 4 \frac{\sin(2\vartheta)}{2} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos^2(2\vartheta)}{4} + \cos(2\vartheta) \right) d\vartheta =$$

$$\stackrel{||}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\vartheta) d\vartheta = 0$$

(perché $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\vartheta) d\vartheta = 0$)

= 0 (per il conto di prima)

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2\vartheta) d\vartheta - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\vartheta) d\vartheta =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(4\vartheta)}{2} \right) d\vartheta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\sin(4\vartheta)}{8} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} =$$

($\stackrel{||}{=} 0$)

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{5\pi}{4}. \quad \text{Questo è l'integrale}$$

fatto solo su metà disco.

$$Vol(D) = 2 \cdot \frac{5\pi}{4} = \boxed{\frac{5\pi}{2}}$$

□

ES. 10 Calcolare l'integrale curvilineo

3

$$I = \int_{\gamma} f ds, \text{ dove}$$

a) $f(x,y,z) = \frac{x^2 y}{z}$, γ param. da $r(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [1, 2]$

b) $f(x,y,z) = -2x e^z$, γ param. da $r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$

c) $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$, γ il segmento che congiunge $(1,0,1)$ a $(0,2,3)$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{1-xy}$, γ l'intersezione tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e il piano $x+y+z=1$ (rispetto al testo ho scambiato x e z , ma è lo stesso!)

Soluzione:

a) $r'(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$; $|r'(t)| = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = \sqrt{(3+6t)^2} = 3+6t$

$$I = \int_1^2 \frac{9t^2 \cdot 3t^2}{2t^3} (3+6t) dt = \frac{27}{2} \int_1^2 (3t + 6t^2) dt = \frac{81}{2} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_{t=1}^{t=2} =$$

$$= \frac{81}{2} \left(2 + \frac{16}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{81}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{14}{3} \right) = \boxed{\frac{37 \cdot 27}{4}} = \boxed{\frac{999}{4}}$$

b) $r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$; $|r'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$

$$I = \int_0^{\pi} -2 \cos t e^t \cdot \sqrt{2} dt = -2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t e^t dt = -2\sqrt{2} \sin t e^t \Big|_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} 2\sqrt{2} \sin t e^t dt =$$

$$= -2\sqrt{2} \cos t e^t \Big|_0^{\pi} + 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t e^t dt = 2\sqrt{2} e^{\pi} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t e^t dt \Rightarrow$$

$$-4\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t e^t dt = +2\sqrt{2} e^{\pi} + 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{2}(1+e^{\pi})}$$

c) Dobbiamo scrivere prima una parametrizzazione di γ .

γ è il segmento che congiunge $(1,0,1)$ con $(0,2,3)$. Una parametrizzazione è ad esempio la combinazione convessa dei due punti

$$\lambda(1,0,1) + (1-\lambda)(0,2,3), \quad \lambda \in [0,1],$$

cioè

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2-2\lambda \\ \lambda+3-3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2-2\lambda \\ 3-2\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1].$$

$$=: r(s)$$

$$r'(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad |r'(s)| = \sqrt{9} = 3$$

$$I = \int_0^1 \ln(5-3s) \cdot 3 \, ds = 3 \int_0^1 \ln(5-3s) \, ds \stackrel{\substack{f=5-3s \\ df = -3 \, ds}}{=} -\frac{3}{3} \int_{f(0)}^{f(1)} \ln(f) \, df =$$

$$= - \int_5^2 \ln(f) \, df = \int_2^5 \ln(f) \, df = f(\ln f - 1) \Big|_{f=2}^{f=5} = \boxed{5(\ln(5)-1) - 2(\ln(2)-1)}$$

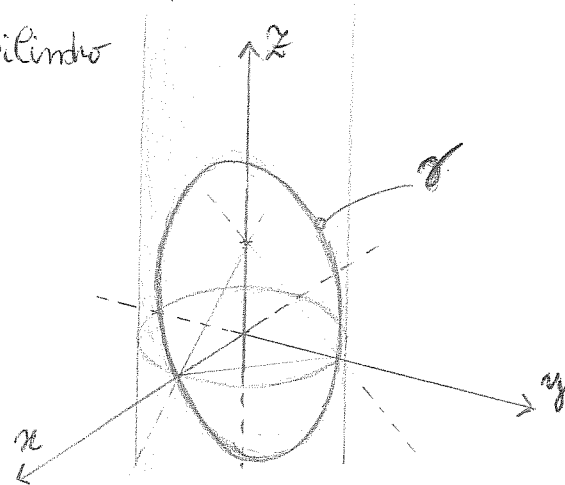
d) Dobbiamo prima scrivere una parametrizzazione per γ .

Siccome la curva è sulla superficie di un cilindro

(Nb. sulla superficie!), chiaramente l'ascissa e

l'ordinate delle curve possono essere parametrizzate dall'angolo ϑ che forma

il punto (x,y) con l'asse x :



$x = \cos \vartheta$ ($r=1$ è fisso: si muove sulla superficie del cilindro di raggio di base di raggio 1)

$$y = \sin \vartheta$$

La coordinata z dipenderà anch'essa dall'angolo ϑ :

$$z = 1 - x - y = 1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta.$$

Per cui una parametrizzazione $r(\vartheta)$ è data da

$$r(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$r'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta - \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad |r'(\vartheta)| = \sqrt{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - 2\sin \vartheta \cos \vartheta} = \sqrt{2(1 - \sin \vartheta \cos \vartheta)}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin \vartheta \cos \vartheta} \cdot \sqrt{2(1 - \sin \vartheta \cos \vartheta)} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} (1 - \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2\pi - \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 2\sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\vartheta) d\vartheta =$$

$\sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{\sin(2\vartheta)}{2}$

$$= 2\sqrt{2}\pi + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4} \cos(2\vartheta)}_{=0} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} = \boxed{2\sqrt{2}\pi}$$

□

ES. 11 Un filo γ di densità lineare di massa costante, è disposto lungo la cicloide di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad \text{Calcolare le coordinate del baricentro di } \gamma$$

Soluzione: le coordinate $\bar{x}, \bar{y}$ del baricentro di una curva sono date da

$$\bar{x} = \frac{\int_{\gamma} x \mu ds}{\int_{\gamma} \mu ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\gamma} y \mu ds}{\int_{\gamma} \mu ds}, \quad \text{dove } \mu \text{ è la densità del filo.}$$

Poiché $\bar{x}$ è costante, possiamo portarlo fuori dagli integrali e semplificare. Per cui

$$\bar{x} = \frac{\int x ds}{\int ds} ; \quad \bar{y} = \frac{\int y ds}{\int ds}$$

$$\bullet \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} |r'(t)| dt ; \quad r'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} ; \quad |r'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t} \\ = \sqrt{2(1 - \cos t)} ;$$

ricordando $\sin^2(\frac{t}{2}) = \frac{1 - \cos(t)}{2}$, allora $|r'(t)| = 2|\sin(\frac{t}{2})|$;

per $t \in [0, 2\pi]$, $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$; il seno è positivo su $[0, \pi]$;

per cui possiamo rimuovere il modulo.

$$\int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{t}{2}) dt = -4\cos(\frac{t}{2}) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 8 ;$$

$$\bullet \int_{\gamma} x ds = \int_0^{2\pi} 2(t - \sin t) \sin(\frac{t}{2}) dt = 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} t \sin(\frac{t}{2}) dt}_{(1)} - 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(t) \sin(\frac{t}{2}) dt}_{(2)}$$

Si vedrà (*) che $\int_0^{2\pi} t \sin(\frac{t}{2}) dt = 4\pi = (1)$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t) \sin(\frac{t}{2}) dt = 0 = (2)$$

Quindi $\int_{\gamma} x ds = 2 \cdot (1) - 2 \cdot (2) = 8\pi$.

Poniamo a calcolo $\int_{\gamma} y ds$

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{2\pi} 2(1-\cos t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \underbrace{2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt}_{(1)} - \underbrace{2 \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt}_{(2)}$$

Si verifica (*) che $\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4 = (1)$

$$\int_0^{2\pi} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -\frac{4}{3} = (2)$$

Quindi $\int_{\gamma} y ds = 2 \cdot (1) - 2 \cdot (2) = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$

In definitiva $\left| \bar{x} = \frac{8\pi}{8} = \pi; \bar{y} = \frac{32}{3 \cdot 8} = \frac{4}{3} \right|$; il baricentro ha coordinate $\left(\pi, \frac{4}{3} \right)$

Calcoliamo gli integrali (*)

$$\int_0^{2\pi} t \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) t \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4\pi + 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt &= \underbrace{-\cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{=0} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} dt = \underbrace{-\frac{\sin(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4} dt \Rightarrow \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 4$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \underbrace{\sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\neq 0} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} dt =$$

$$= \frac{\cos(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{4} dt \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{\cos(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \Big|_0^{2\pi} = -1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -\frac{4}{3}$$



ES. 13 Data la curva piana γ di equazione polare

6

$$r = f(\vartheta), \quad a \leq \vartheta \leq b, \quad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a, b]),$$

verificare che $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f(\vartheta)^2 + f'(\vartheta)^2} d\vartheta$ ($L(\gamma)$ = lunghezza di γ)

Calcolare poi la lunghezza delle spirali esponenziali $r = e^\vartheta$,
con $-\infty < \vartheta \leq 0$

Soluzione: ogni punto del sostegno della curva è tale che
la sua distanza da $(0,0)$ sia una funzione dell'angolo
che forma con l'asse delle x :

Scriviamo una parametrizzazione di questa curva:

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta \quad (\text{coord. polari}). \text{ Però } r \text{ dipende da } \vartheta,$$

per cui (essendo $r = f(\vartheta)$),

$$x = f(\vartheta) \cos \vartheta$$

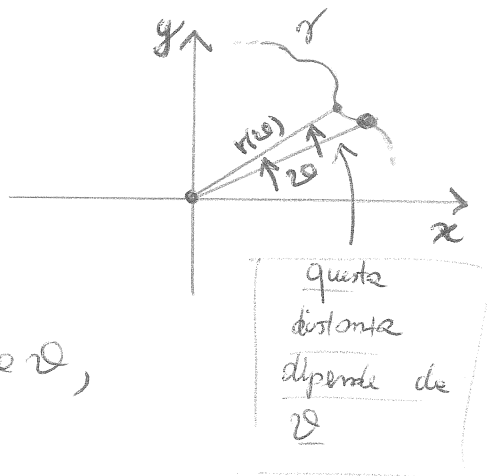
$$y = f(\vartheta) \sin \vartheta; \text{ la parametrizzazione (chiamiamola } \alpha(\vartheta)) \text{ è}$$

$$\alpha(\vartheta): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(\vartheta) = \begin{pmatrix} f(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ f(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\alpha'(\vartheta) = \begin{pmatrix} f'(\vartheta) \cos \vartheta - f(\vartheta) \sin(\vartheta) \\ f'(\vartheta) \sin \vartheta + f(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix};$$

$$|\alpha'(\vartheta)| = \sqrt{f'^2(\vartheta) \cos^2(\vartheta) + f^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) - 2f(\vartheta)f'(\vartheta)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + f'^2(\vartheta) \sin^2(\vartheta) + f^2(\vartheta) \cos^2(\vartheta) + 2f(\vartheta)f'(\vartheta)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)} =$$

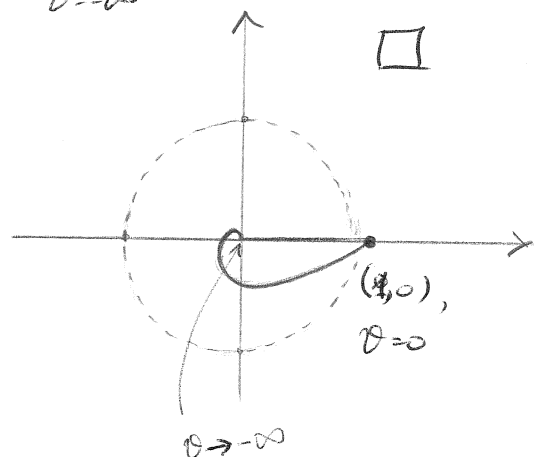
$$= \sqrt{f'^2(\vartheta)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) + f^2(\vartheta)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)} = \sqrt{f'^2(\vartheta) + f^2(\vartheta)}$$



Calcoliamo ora la lunghezza di $r = e^\vartheta$, (param. $\begin{pmatrix} e^\vartheta \cos \vartheta \\ e^\vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix}$).

$\vartheta \in]-\infty, 0]$. Abbiamo già una formula:

$$L(\gamma) = \int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{2\vartheta} + e^{2\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{2} \int_{-\infty}^0 e^\vartheta d\vartheta = \sqrt{2} e^\vartheta \Big|_{\vartheta=-\infty}^{\vartheta=0} = \sqrt{2}$$



ES. 15

Riparametrizzare la curva assegnata secondo l'ascissa curvilinea

a) $r(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}t \\ 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$; b) $r(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-4t \\ \sqrt{8}t \end{pmatrix}$; $r(t) = \begin{pmatrix} e^{t\cos t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{t\sin t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{t\sin t} \end{pmatrix}$

Soluzione: dobbiamo cercare di trovare una nuova parametrizzazione della curva dove il nuovo parametro è s , ovvero la lunghezza della curva a partire da un certo punto a fissato. L'esercizio non specifica qual è il dominio delle parametr. data. Diciamo che esso sarà un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Fissiamo $a \in I$.

a) $s(t) = (\text{lunghezza della parte di curva che è parametrizzata per } a \leq t' \leq t)$

$$= \int_a^t |r'(t')| dt' = \int_a^t \sqrt{5 + 4\sin^2 t' + 4\cos^2 t'} dt' = \int_a^t 3 dt' = 3(t-a)$$

per cui $s(t) = 3(t-a)$. Dobbiamo invertire questa relazione: da $s = s(t)$ a $t = t(s)$: $s = 3t - 3a \Rightarrow t = \frac{s+3a}{3}$.

Sostituiamo questa relazione nella parametrizzazione originaria:

7

$$r(t(s)) =: \tilde{r}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \left(\frac{s+3a}{3} \right) \\ 2 \cos \left(\frac{s+3a}{3} \right) \\ 2 \sin \left(\frac{s+3a}{3} \right) \end{pmatrix}$$

(nuova parametrizzazione)

$$b) r'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}; |r'(t)| = \sqrt{1+16+8} = 5$$

$$s(t) = \int_a^t 5 dt' = 5(t-a). \quad \text{Per cui} \quad \frac{s}{5} + a = t, \text{ e la}$$

$$\text{nuova parametrizzazione } \tilde{r}(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{5} + a \\ 3 - 4a - \frac{4}{5}s \\ \sqrt{8} \left(a + \frac{s}{5} \right) \end{pmatrix}$$

$$c) r'(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (e^t \sin t + e^t \cos t) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (e^t \sin t + e^t \cos t) \end{pmatrix} \Rightarrow |r'(t)| = \sqrt{e^{2t} - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} + 2e^{2t} \cos t \sin t} = \sqrt{2} e^t$$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{2} e^{t'} dt' = \sqrt{2} e^{t'} \Big|_{t'=a}^{t'=t} = \sqrt{2} (e^t - e^a);$$

$$s = \sqrt{2} e^t - \sqrt{2} e^a \Rightarrow e^t = \frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \right)$$

Una nuova parametrizzazione è

$$\tilde{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \cdot \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \frac{s + \sqrt{2} e^a}{2} \cdot \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ \left(\frac{s + \sqrt{2} e^a}{2} \right) \cdot \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2} e^a}{\sqrt{2}} \right) \right) \end{pmatrix}$$

□

ES. 3.6 (De Ferro-Horvath) | Disegnare la curva (asteroide)

$$I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}, a > 0\}.$$

Calcolarne la lunghezza.

Soluzione: Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$. (quindi $|\bar{x}|^{2/3} + |\bar{y}|^{2/3} = a^{2/3}$)

Allora $(-\bar{x}, \bar{y}) \in A$, perché $|-\bar{x}| = |\bar{x}|$; ma anche $(\bar{x}, -\bar{y}), (-\bar{x}, -\bar{y}) \in A$.

Quindi A è simmetrica rispetto all'asse x ed all'asse y .

In più, se $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, anche il punto in cui scambiamo i valori di ascissa e ordinata, cioè $(\bar{y}, \bar{x}) \in A$; ma anche $(\bar{y}, -\bar{x}) \in A$. Per cui A è simmetrica anche rispetto alle bisettrici del $1^{\circ}/3^{\circ}$ e $2^{\circ}/4^{\circ}$ quadrante ($x=y, x=-y$).

Ad ogni modo, possiamo restringerci al 1° quadrante, e poi completare il disegno grazie a queste considerazioni di simmetria. Sono $x > 0$ e $y > 0$

$$A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}, \text{ ovvero}$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3} \Rightarrow y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} =: \gamma(x).$$

Quindi nel 1° quadrante la curva è data dal grafico di una funzione $y = \gamma(x)$. Vediamo il dominio di questa

funzione: siccome c'è un esponente $\frac{1}{2}$ (una radice quadrata), deve essere $a^{2/3} - x^{2/3} \geq 0 \Rightarrow x \leq a$. (poi siccome siamo nel 1° quadrante, $x \geq 0$) Quindi $x \in [0, a]$

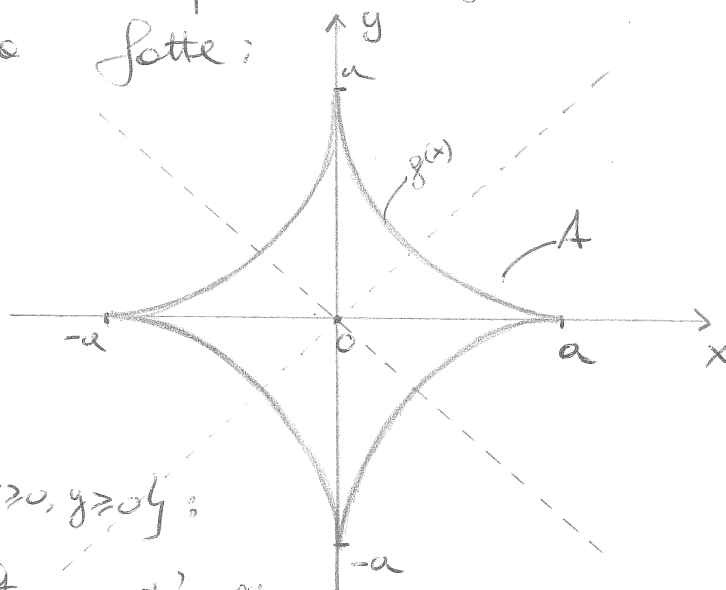
Calcoliamo la derivata:

$$g'(x) = \frac{3}{2} (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-x)^{-1/3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{x^{1/3}} \cdot (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2};$$

g non è derivabile in $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$. g è derivabile su $]0, a[$.

$g'(a) = 0$. Infine $g(0) = a$, $g(a) = 0$, e $g'(x) \leq 0 \ \forall x \in]0, a[$.

Possiamo disegnare il grafico di g e ottenere tutte le curve disegnandole negli altri quadranti grazie alle considerazioni di simmetria fatte:



È chiaro che per trovare la lunghezza di A basta trovare la lunghezza di $A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$: quello di A sarà quattro volte quest'ultima.

Una parametrizzazione di $A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ è $\alpha(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$, $x \in [0, a]$

$$\alpha'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix}; |\alpha'(x)| = \sqrt{1 + g'(x)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} = a^{1/3} x^{-1/3}$$

$$\mathcal{L}(A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}) = a^{1/3} \int_0^a x^{-1/3} dx = a^{1/3} \left[\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{3}{2} a^{1/3} a^{2/3} = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Quindi } \mathcal{L}(A) = 4 \cdot \frac{3a}{2} = \boxed{6a}.$$

288. $g \notin \mathcal{C}^1([0, a])$. In realtà non possiamo applicare le formule della lunghezza con questa parametrizzazione.

Sia $x = a \cos^3(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(per $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\vartheta) \in [0, 1] \Rightarrow a \cos^3(\vartheta) \in [0, a]$, e si vede che $\tilde{\alpha}$ è un omeomorfismo tra $[0, a]$ e $[0, \frac{\pi}{2}]$)

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} = (a^{2/3}(1 - \cos^2(\vartheta)))^{3/2} = a \sin^3(\vartheta).$$

Quindi mediante questo omeomorfismo, abbiamo subito una nuova parametrizzazione di $A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$:

$$\tilde{\alpha}(\vartheta) = \begin{pmatrix} a \cos^3(\vartheta) \\ a \sin^3(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]; \quad \tilde{\alpha}'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta) \\ 3a \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ma $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}^1[0, \frac{\pi}{2}]$. Per cui

$$\begin{aligned} L(A \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2(\cos^4(\vartheta) \sin^2(\vartheta) + \sin^4(\vartheta) \cos^2(\vartheta))} d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} d\vartheta = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\vartheta) \sin(\vartheta)| d\vartheta \stackrel{\text{tra } 0 \text{ e } \frac{\pi}{2} \text{ } \cos \vartheta \geq 0 \text{ } \sin \vartheta \geq 0}{=} 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\vartheta) d\vartheta = \frac{3a}{2} \left[-\frac{\cos(2\vartheta)}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \end{aligned}$$

Quindi, di nuovo, $L(A) = \frac{4 \cdot 3a}{2} = \boxed{6a}$

□

Poniamo ora al calcolo di integrali di campi vettoriali lungo curve γ .

Un campo vettoriale è $F: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, dove $X \subseteq \mathbb{R}^m$ (è definito su tutto $\mathbb{R}^m$ ess è $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$).

Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una curva, definiamo l'integrale del campo F lungo γ come

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Gli integrali lungo curve di funzioni scalari che abbiamo visto in precedenza ($\int_{\gamma} f ds$) e gli integrali lungo curve di campi vettoriali ($\int_{\gamma} F$) sono due concetti leggermente diversi. Per fissare le idee, facciamo questo paragone:

a) quando consideriamo $\int_{\gamma} f ds$, ad esempio con $f \geq 0$

($f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare) possiamo pensare ad $f(\gamma(t))$ come alla densità che ha il "filo" (o curva) γ nel punto $\gamma(t)$ (se $f \equiv c$ diremo che γ ha densità costante).

In analogia col fatto che, dato un segmento $[a, b]$ (un "filo diritto" con densità costante c), la sua massa è chiaramente

$$(b-a)c = \int_a^b c dx \quad (\text{massa} = \text{densità (lineare)} \times \text{lunghezza})$$

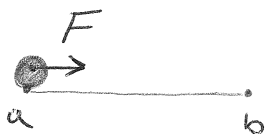
Diciamo che le masse di γ con densità f è

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt: \text{ la } f \text{ è peso lungo } \gamma$$

con il peso (Nb. positivo) $|\gamma'(t)|$. Si sta tenendo conto di quanto e partire da $[a, b]$ si sta "dilatando e curvando" questo segmento, in ogni t . Si integra tenendo conto anche di questo peso, che è appunto in valore assoluto (è una descrizione intuitiva, ma può essere utile questa interpretazione).

b) Nel caso di un integrale di un campo vettoriale lungo una curva possiamo considerare il seguente parallelismo:

$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un campo di forze: ad ogni $x \in \mathbb{R}^m$ associa $F(x) \in \mathbb{R}^m$ il vettore della forza che agisce su quel punto. Ricordiamo cos'è il lavoro di una forza lungo uno spostamento:



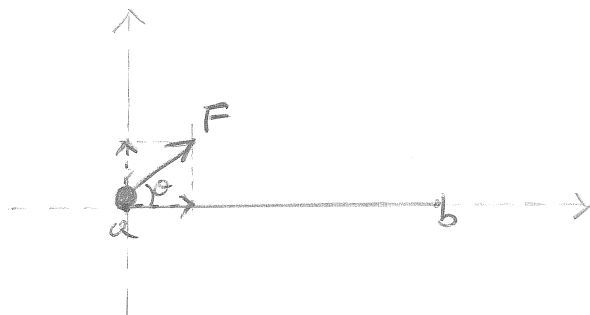
Supponiamo che F sia costante, e lo spostamento compiuto da questa forza avvenga lungo la linea (il segmento) $[a, b]$, e supponiamo che la forza agisca nella direzione dello spostamento ($F(x)$ è un vettore parallelo a $[a, b] \forall x \in [a, b]$).

Il lavoro di questa forza è $L = F(b-a) = \int_a^b F dx$

Supponiamo ora che F sia costante e fermi
con $[a, b]$ un angolo ϑ .

Il lavoro è dato da

$$L = F \cdot \cos \vartheta \cdot (b-a)$$



Se pensiamo a $[a, b]$ come un segmento sull'asse x di un
piano cartesiano, e se descriviamo F in coordinate cartesiane

$$F = \begin{pmatrix} F \cos \vartheta \\ F \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

quello che stiamo dicendo è che ideiamo

le componenti di F lungo la direzione dello spostamento,
cioè, in questo caso, lungo la direzione $e_1 = (1, 0)$. In altre
parole $F \cdot e_1$. Dunque $L = \int_a^b F \cdot e_1 dx$.

Infine, supponiamo che una forza (di modulo) costante
 F e sempre parallela all'asse della x produca uno spostamento
prima da a a b e poi da b a c , con $c < a < b$.

$$L = F(b-a) + F(c-b) =$$

$$= \int_a^b F dx - \int_c^b F dx = - \int_c^a F dx,$$

quindi bisogna considerare



la direzione (quindi il segno dell'integrale).

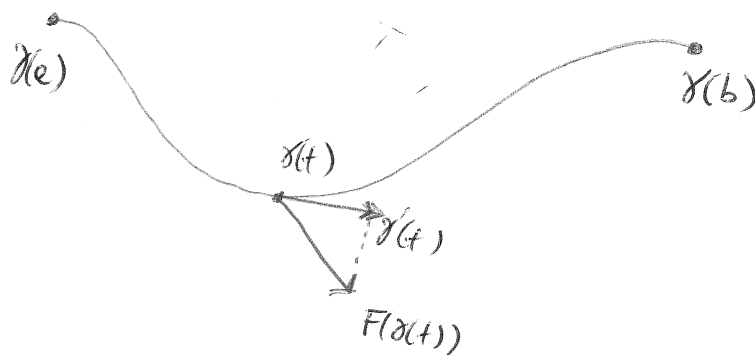
Ora, se una forza agisce lungo una curva γ ,

e noi vogliamo calcolarne il lavoro che ha compiuto la
forza lungo tutta la curva γ , consideriamo

per l'appunto

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

F in generale varia in ogni punto di $\gamma(t)$. $\gamma'(t)$ è il ettore tangente a γ in $\gamma(t)$ (quindi stiamo facendo il prodotto scalare tra F e γ' per trovare le componenti di F lungo γ).



oss. Prima consideravamo $F \cdot e_1$, il versore che dà la direzione; in questo caso il versore è $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$.

Quindi stiamo calcolando $\int_a^b \left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) |\gamma'(t)| dt =$

$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} ds. \quad (\text{Quindi vediamo come siamo tornati$$

all'integrale simile a quello definito al punto a); in realtà bisogna tener presente che i concetti sono un po' differenti: quello che qui siamo "integrando in ds " dipende da γ !).

Stiamo quindi integrando la componente della forza lungo lo spostamento $\left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right)$ moltiplicato per il peso $|\gamma'(t)|$ (che tiene conto di curvatura, dilatazione etc. di $[a, b]$ in γ).

Passiamo al calcolo di alcuni di questi integrali

ES. 6.16 | Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

11

Calcolare $\int_{\gamma} \vec{F}$, dove γ è il circolo positivamente orientato di centro $(0,0)$ e raggio 1

Soluzione. Scriviamo una parametrizzazione di γ . Siccome è importante l'orientazione, essa deve essere rispettata: positivamente orientato vuol dire che si considera in senso antiorario (il punto di partenza è indifferente).

Quindi $\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ è una buona parametrizzazione ($\vartheta \in [0, 2\pi]$).

$$\vec{F}(\gamma(\vartheta)) = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta \\ -2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \gamma'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} -\sin \vartheta (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) + \cos \vartheta (-2 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta = \quad (*)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos(2\vartheta) - \cos \vartheta \sin(2\vartheta) d\vartheta = 0 \quad (\text{si può vedere anche integrando per parti}); \quad \text{oppure } (*) =$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin \vartheta (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta + 2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} -\sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

□

ES. 7.2 Calcolare l'integrale di linea del campo

$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$$

i) lungo l'arco α di spirale di Archimede $r = a\vartheta$,
 $\vartheta \in [0, 2m\pi]$, dove $a > 0$, $m > 0$ intero;

ii) lungo il segmento $[(0,0), (2am\pi, 0)]$

Soluzione:

i) α è parametrizzato da $\alpha(\vartheta) = \begin{pmatrix} a\vartheta \cos \vartheta \\ a\vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix}$, $\vartheta \in [0, 2m\pi]$.

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow F(\alpha(\vartheta)) = \begin{pmatrix} -a\vartheta \sin \vartheta \\ a\vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \alpha'(\vartheta) = \begin{pmatrix} a \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta \\ a \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\int_{\alpha} \vec{F} = \int_0^{2m\pi} -a\vartheta \sin \vartheta (a \cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta) + a\vartheta \cos \vartheta (a \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta =$$

$$a^2 \int_0^{2m\pi} -\vartheta \sin \vartheta \cos \vartheta + \vartheta^2 \sin^2 \vartheta + \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta + \vartheta^2 \cos^2 \vartheta d\vartheta =$$

$$= a^2 \int_0^{2m\pi} \vartheta^2 d\vartheta = a^2 \frac{\vartheta^3}{3} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=2m\pi} = \frac{a^2}{3} (2m\pi)^3$$

ii) il segmento può essere parametrizzato come $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2am\pi t \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $t \in [0, 1]$; $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2am\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2am\pi t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

$$\text{Per cui } \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

□

Sia $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus Z$, dove $Z = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ è l'asse z ,
e sia $\vec{F}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\vec{F}_\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r^\alpha} \\ \frac{x}{r^\alpha} \\ z \end{pmatrix}, \text{ dove } r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ è}$$

la distanza dall'asse z , $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il cammino definito da

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), u(t)), \text{ dove } u \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R}) \text{ e}$$

t.c. $u(0) = a, u(2\pi) = b$.

Calcolare

$$\int_\gamma \vec{F}$$

Soluzione: $\vec{F}$ è ben definito su γ , infatti γ non
interseca mai l'asse z , dove $\vec{F}$ non è definito.

(Si vede che la curva γ sta sulla superficie del cilindro
di base la circonferenza unitaria di centro $(0,0)$ sul
piano xy).

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (\text{siccome } r = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1, 1^\alpha = 1)$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 1 + u(t)u'(t).$$

per cui $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} (1 + u(t)u'(t)) dt =$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} u(t)u'(t) dt = 2\pi + \int_{f(0)=u(0)=a}^{f(2\pi)=u(2\pi)=b} f df = 2\pi + \left. \frac{f^2}{2} \right|_{f=a}^{f=b}$$

$\uparrow$
 $f = u(t)$
 $df = u'(t) dt$

$$= \left[2\pi + \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

□

Finora abbiamo considerato curve γ (in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$)
e ne abbiamo calcolato la lunghezza, grazie al fatto
che avevamo una parametrizzazione $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$).

In effetti una curva può essere pensata come una varietà
unidimensionale, e quindi dotata di una parametrizzazione (locale).

Se invece consideriamo $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diffeomorfismo,
otteniamo una varietà bi-dimensionale (una superficie) in $\mathbb{R}^3$.

φ è la parametrizzazione (locale) della superficie. Per cui
analogamente al caso di curve, possiamo parlare di
area di una superficie, e integrare su una superficie.

ES. 7.47 Sia $a > 0$ fissato. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ così definito:

$D = \{(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [\alpha, \beta], \alpha < \beta\}$ e sia $p: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$p(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin \vartheta \cos \varphi \\ a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

p parametrizza le porzioni di superficie sferica di raggio a
e i semi-meridiani di longitudine α e β . (Se $\beta - \alpha \geq 2\pi$
è tutta la sfera, e $\beta - \alpha \geq 2\pi m, m \geq 1$, è contata più volte).

i) Calcolare l'area delle superficie D

ii) Calcolare l'area delle calotte sferiche nord (al di sopra del
piano $z = h$), $h < a$.

Soluzione:

$$p'(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \vartheta \cos \varphi & -a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \cos \vartheta \sin \varphi & a \sin \vartheta \cos \varphi \\ -a \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

i minori di ordine due sono

$$a^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos^2 \varphi + a^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin^2 \varphi = a^2 \cos \vartheta \sin \vartheta$$

$$-a^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi$$

$$a^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi$$

$$|\wedge p'(\vartheta, \varphi)| = \sqrt{a^4 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + a^4 \sin^4 \vartheta \sin^2 \varphi + a^4 \sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi} =$$

$$= a^2 \sqrt{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta} = a^2 |\sin \vartheta|$$

Per cui le misure delle superficie e

$$\int_D a^2 |\sin \vartheta| d\varphi d\vartheta = (\vartheta \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \vartheta > 0) = \int_0^\pi \left(\int_\alpha^\beta a^2 \sin \vartheta d\varphi \right) d\vartheta =$$

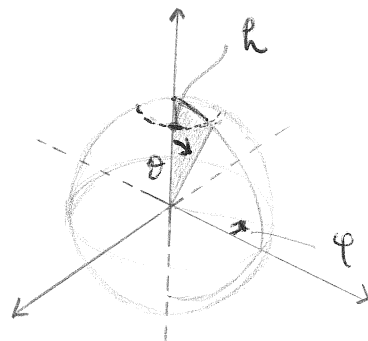
$$= a^2 (\beta - \alpha) \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \underline{2a^2 (\beta - \alpha)}$$

Se vogliamo la ~~colata~~ *colata* ~~mad~~, dobbiamo scrivere le condizioni sull'angolo ϑ (che è appunto la "latitudine" rispetto all'equatore, che è sul piano xy). $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ è la *colata* ~~mad~~; $\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ è la *colata* ~~mad~~.

Vogliamo fumare e parte $h = a \cos \vartheta \Rightarrow$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{h}{a}\right); \text{ per cui } \vartheta \in [0, \arccos(\frac{h}{a})];$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$ (vogliamo tutte le *colate*, l'angolo φ fare tutto il giro)



Per cui l'integrale diventa

$$a^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\arccos(\frac{h}{a})} \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi a^2 \left(-\cos \vartheta \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\arccos(\frac{h}{a})} \right) = \boxed{2\pi a^2 \left(1 - \frac{h}{a} \right)}$$

14

□

Es. 7.49

Trovare l'area laterale del solido

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < (2a)^2, x^2 + y^2 - 2ax < 0 \right\},$$

dove $a > 0$ è una costante

Soluzione:

$x^2 + y^2 + z^2 < (2a)^2$ è la regione interna alla sfera di centro O_0 e raggio $2a$.

$$x^2 + y^2 - 2ax < 0 \iff x^2 - 2ax + z^2 + y^2 - a^2 < 0 \iff (x-a)^2 + y^2 < a^2$$

è la regione interna ad un cilindro con asse parallelo all'asse z e base (sul piano xy) il disco di centro $(a, 0)$ e raggio a . V è l'intersezione delle due regioni

Per calcolare l'area della superficie, serve una parametrizzazione

Conviene passare a coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$V = \left\{ (r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 + z^2 < (2a)^2, r^2 - 2ar \cos \vartheta < 0 \right\}$$

La superficie di cui vogliamo calcolare l'area non può essere descritta da una sola parametrizzazione: una parte di questa superficie è sul cilindro, l'altra è sulla sfera.

Inanzitutto vediamo una descrizione di queste parti di superficie laterali.

Poi cercheremo parametrizzazioni.

Superficie laterale sul cilindro:

$$S_c := \left\{ r^2 + z^2 < (2a)^2, r^2 - 2ar \cos \vartheta = 0 \right\}$$

↓
consideriamo
lo sfera piena
($<$)

↓
consideriamo
la superficie del
cilindro (tutta la parte
è tutto il cilindro, con
 $-\infty < z < \infty$).

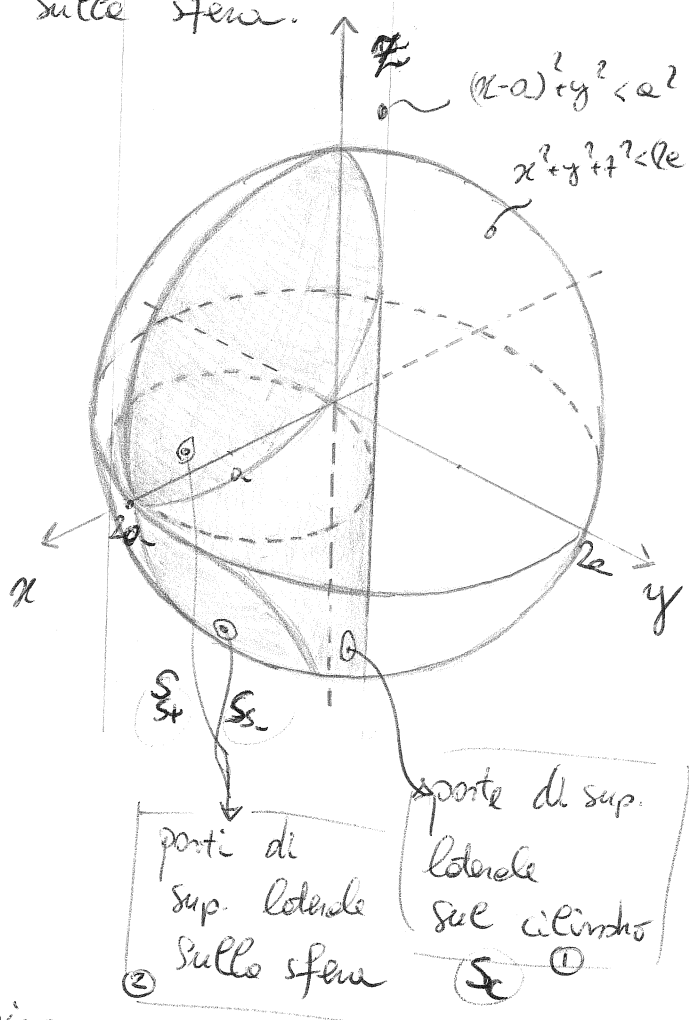
S_c è chiaramente data dall'intersezione
della superficie del cilindro ($r^2 - 2ar \cos \vartheta = 0$, è tutto il cilindro)
con lo sfera piena ($r^2 + z^2 < (2a)^2$). È la parte ① nel disegno:
che è sulla superficie del cilindro e in generale dentro la sfera.

Superficie laterale sulla sfera (② nel disegno). Analogamente

$$S_s := \left\{ r^2 + z^2 = (2a)^2, r^2 - 2ar \cos \vartheta < 0 \right\}$$

↓
superficie della sfera

↓
interno del cilindro.



15

da $r^2 - 2ar \cos \vartheta = 0$ segue $r = 2a \cos \vartheta$.

$$S_C := \begin{pmatrix} (2\cos\vartheta)\cos\vartheta \\ (2\cos\vartheta)\sin\vartheta \\ \zeta \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ \zeta \end{pmatrix}$$
 cond. cylindrique donc $\mu = r$ dépend de ϑ , quindi φ propriis una descrizione
 $\varphi: \underset{\mathbb{R}^2}{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 , dove $(\vartheta, \zeta) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

Le Jacobiane delle parametrizzazioni φ_i dunque

$$\varphi' = \begin{pmatrix} -2a \cos \vartheta \sin \vartheta & 0 \\ 2a (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \sin(2\vartheta) & 0 \\ 2a \cos(2\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2a \cos(\theta/2)$$

$$= 2a \sin(120^\circ)$$

0

$$\Rightarrow |\psi'| = \sqrt{4a^2} = 2a.$$

Per cui $A(S_C) = \int_{S_C} 1 d\omega = \int_{D_1} 2a \, dv d\zeta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-2a|\sin v|}^{2a|\sin v|} 2a \, d\zeta \right) dv =$

motivation: integrale
su una superficie

$\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin v| dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv \right)$ per simmetria di $|\sin v|$

$= 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a |\sin v| dv = 8a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin v| dv = 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = 16a^2.$

Poniamo a calcolo S_S .

$S_S = \{ r^2 + \zeta^2 = (2a)^2, r^2 - 2ar \cos v < 0 \}$; dalla prima

otteniamo $\zeta^2 = (2a)^2 - r^2 \Rightarrow \zeta = \pm \sqrt{(2a)^2 - r^2} \quad (r < 2a)$

dalla seconda $r(r - 2a \cos v) < 0$ (siccome $r \geq 0$) $\Rightarrow$

$r < 2a \cos v$, e sempre da questa, $\cos v > 0 \Rightarrow v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Per cui (stavolta ci torna comodo usare r, v come parametri. ζ dipende da r)

$S_{S\pm} = \psi_{\pm}(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ \pm \sqrt{(2a)^2 - r^2} \end{pmatrix} : (r, v) \in E \subseteq \mathbb{R}^2$, dove
considerando le $\pm > 0$. Il $-$, quelli < 0 . Scegliamo per ora il $+$.

$E = \{ (r, v) \in \mathbb{R}^2 : v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, 0 < r < 2a \cos v \}$.

$\psi'_+ = \begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \\ -\frac{r}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}} & 0 \end{pmatrix}$

Nb. $\|\psi'_+\| = \|\psi'_-\|$. Calcoliamo
solo l'area della parte di superficie
nella sfera che è nel semipiano $z \geq 0$.
L'altra area (sono due "pezzi simmetrici")
sono le stesse.

i minimal di ordine due sono

- r
- $\frac{-r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}}$
- $\frac{r^2 \cos \vartheta}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}}$, per cui

$$|\psi'_+| = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{(2a)^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{(2ar)^2}{(2a)^2 - r^2}} = \frac{2ar}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}}$$

Quindi $A(S_+) = \int_{S_+} 1 \, d\sigma = \int_E \frac{2ar}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}} \, dr \, d\vartheta =$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2a \cos \vartheta} \frac{2ar}{\sqrt{(2a)^2 - r^2}} \, dr \right) d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(- \int_{f(0)=(2a)^2}^{f(2a \cos \vartheta) = (2a)^2(1 - \cos^2 \vartheta)} \frac{a}{f^{1/2}} \, df \right) d\vartheta =$$

$f = (2a)^2 - r^2$
 $df = -2r \, dr$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{(2a \sin \vartheta)^2}^{(2a)^2} a f^{-1/2} \, df \right) d\vartheta = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(f^{1/2} \Big|_{f=(2a \sin \vartheta)^2}^{f=(2a)^2} \right) d\vartheta =$$

$$= 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a - 2a |\sin \vartheta|) d\vartheta = 4\pi a^2 - 4a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \vartheta| d\vartheta = 4\pi a^2 - 8a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= 4\pi a^2 - 8a^2.$$

Quota i metà dell' area $A(S_-)$.

$$A(S_+) = 8\pi a^2 - 16a^2.$$

$$A(S) = A(S_+) + A(S_-) = \boxed{8\pi a^2}$$

□

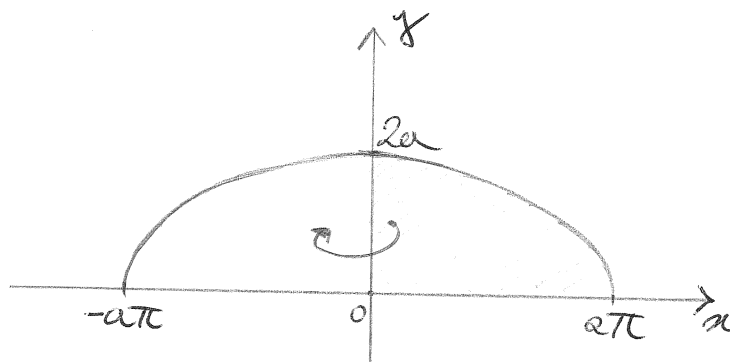
ES. 7.58

Dato l'arco di cicloide di equazioni parametriche

$$x = a(\vartheta + \sin \vartheta)$$

$$y = a(1 + \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [-\pi, \pi],$$

$a > 0$ costante fissata,



trovare il volume del solido S ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte E di piano compresa fra la curva e l'asse x e l'asse delle frontiere dello stesso.

Soluzione: Se facciamo ruotare tutta la figura attorno all'asse y di 2π , otteniamo il doppio del volume (e della superficie) perché "poniamo due volte degli stessi punti". Dobbiamo considerare $E_+ := \{E \cap \{(x, y) : x \geq 0\}\}$ (o anche E_-) e far ruotare questa regione di 2π attorno all'asse y .

Per il T. di Guldinus, $\text{Vol}(S) = 2\pi \cdot x_{E_+} \cdot \text{Area}(E_+)$, dove x_{E_+} è l'orizzonte del baricentro di E_+ (ovvero la distanza di questo dall'asse),

ovvero
$$\text{Vol}(S) = 2\pi \cdot \frac{\int_{E_+} x dx}{\text{Area}(E_+)} \quad \text{Area}(E_+) = 2\pi \int_{E_+} x dx$$

$$\int_{E_t} x dx = \int_0^{\pi a} \left(\int_0^{y(x)} x dy \right) dx = \int_0^{\pi a} x y(x) dx \quad ; y(x) \text{ è la funzione } 17$$

che descrive l'arco di cicloide. Non lo conosciamo esplicitamente, ma non per questo non si può procedere, usiamo il cambio di variabile $x = a(\vartheta + \sin \vartheta) \rightarrow dx = a(1 + \cos \vartheta) d\vartheta$,

quando $x = a(\vartheta + \sin \vartheta)$, chiaramente $y(x)$ corrispondente è $a(1 + \cos \vartheta)$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi a} x y(x) dx &= \int_0^{\pi} a(\vartheta + \sin \vartheta) a(1 + \cos \vartheta) a(1 + \cos \vartheta) d\vartheta = a^3 \int_0^{\pi} (\vartheta + \sin \vartheta)(1 + \cos \vartheta)^2 d\vartheta \\ &= a^3 \int_0^{\pi} (\vartheta + \sin \vartheta)(1 + 2\cos \vartheta + \cos^2 \vartheta) d\vartheta = a^3 \int_0^{\pi} (\vartheta + 2\vartheta \cos \vartheta + \vartheta \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta + 2\cos \vartheta \sin \vartheta + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta \quad (*) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \vartheta = 2; \quad \int_0^{\pi} 2\sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \quad (= \sin(2\vartheta) \dots); \quad \int_0^{\pi} \vartheta = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\int_0^{\pi} 2\vartheta \cos \vartheta = 2\vartheta \sin \vartheta \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin \vartheta d\vartheta = 2\cos \vartheta \Big|_0^{\pi} = -4;$$

$$\int_0^{\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \overset{\substack{\uparrow \\ \cos \vartheta = f \\ -\sin \vartheta d\vartheta = df}}{=} - \int_1^{-1} f^2 df = \int_1^{-1} f^2 df = \frac{f^3}{3} \Big|_1^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \vartheta \cos^2 \vartheta &= \int_0^{\pi} \vartheta \left(\frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} \right) d\vartheta = \int_0^{\pi} \frac{\vartheta}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\vartheta \cos 2\vartheta}{2} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\vartheta \sin 2\vartheta}{4} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(2\vartheta)}{4} d\vartheta = \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\cos(2\vartheta)}{8} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \text{Per cui} \end{aligned}$$

$$(*) = a^3 \left(2 + \frac{\pi^2}{2} - 4 + \frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{4} \right) = a^3 \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{4}{3} \right)$$

Quindi $\text{Vol}(S) = \pi a^3 \left(\frac{3}{2} \pi^2 - \frac{8}{3} \right)$.

L'area delle superficie di rotazione invece è data da

$$A(S_r) = 2\pi x_{\gamma_+} L(\gamma_+), \text{ dove } x_{\gamma_+} \text{ è l'ascissa del baricentro}$$

della curva $\gamma_+ = \gamma \cap \{x \geq 0\}$, dove $\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} a(\vartheta + \sin \vartheta) \\ a(1 + \cos \vartheta) \end{pmatrix}$,

$L(\gamma_+)$ è la lunghezza di γ_+ . γ_+ è parametrizzato per $\vartheta \in [0, \pi]$ ($n \geq 0$)

$$A(S_r) = 2\pi \frac{\int_{\gamma_+} x ds}{L(\gamma_+)} L(\gamma_+) = 2\pi \int_{\gamma_+} x ds$$

$$\gamma'(\vartheta) = \begin{pmatrix} a(1 + \cos \vartheta) \\ -a \sin \vartheta \end{pmatrix}; |\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta} =$$

$$= \sqrt{2a^2(1 + \cos \vartheta)} = 2a \sqrt{\frac{1 + \cos \vartheta}{2}} = 2a \left| \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right|$$

$$\int_{\gamma_+} x ds = \int_0^\pi a(\vartheta + \sin \vartheta) \cdot 2a \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta =$$

$\swarrow$ in $[0, \pi]$, $\cos(\frac{\vartheta}{2}) > 0$

$$= 2a^2 \int_0^\pi \vartheta \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin(\vartheta) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta = 2a^2 \left(\vartheta \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta + \int_0^\pi 2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta \right)$$

$(\sin \vartheta = \sin(2 \frac{\vartheta}{2}) = 2 \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cos(\frac{\vartheta}{2}))$
 $\downarrow$
 $\cos(\frac{\vartheta}{2}) = f$
 $-\frac{\sin(\frac{\vartheta}{2})}{2} d\vartheta = df$

$$= 2a^2 \left(2\pi + 4 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \Big|_0^\pi - \int_{f(0)=1}^{f(\pi)=0} 4f^2 df \right) =$$

$$2a^2 \left(2\pi - 4 + \frac{4f^3}{3} \Big|_0^\pi \right) = 2a^2 \left(2\pi - 4 + \frac{4}{3} \right) = 4a^2 \left(\pi - \frac{4}{3} \right); \text{ Allora}$$

$$A(S_r) = 8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3} \right). \text{ In realtà basta il l'area delle superficie}$$

ottenuta attorno γ_+ . Per avere tutta la superficie, moltiplico l'area delle basi. La base è chiaramente il disco di centro $(0,0)$ e raggio πa ; quindi l'area di base vale $A(S_b) = \pi(\pi^2 a^2) = \pi^3 a^2$.

L'area di tutta la superficie laterale è dunque $A(S) = A(S_\gamma) + A(S_b) = 8\pi a^2(\pi - \frac{4}{3}) + \pi^3 a^2$.

□

ES. 7.50 | Sia aS la sfera in $\mathbb{R}^3$ di centro

l'origine e raggio $a > 0$. Se $d \geq 0$, $d \neq a$.

Calcolare $\int_{aS} \frac{d-z}{(x^2+y^2+(d-z)^2)^{3/2}} d\omega$ per $\begin{cases} 0 \leq d < a \\ a < d \end{cases}$.

Soluzione: Usiamo la stessa parametrizzazione della superficie della sfera in $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin \vartheta \cos \varphi \\ a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi].$$

L'elemento d'area $|\Lambda \alpha'|$ (calcolato già in altri esercizi) è $|\Lambda \alpha'| = a^2 \sin \vartheta$. Quindi abbiamo

$$\int_{aS} \frac{d-z}{(x^2+y^2+(d-z)^2)^{3/2}} d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(d - a \cos \vartheta) a^2 \sin \vartheta}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \vartheta)^{3/2}} d\vartheta d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{a(d-a\cos\vartheta)(2ad\sin\vartheta)/(2d)}{(a^2+d^2-2ad\cos\vartheta)^{3/2}} d\vartheta = \text{(per parti)}$$

$$= \frac{\pi e}{d} \left[-2a \frac{(d-a\cos\vartheta)}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\vartheta}} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} + \frac{2\pi a}{d} \int_0^{\pi} \frac{a\sin\vartheta}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\vartheta}} d\vartheta =$$

$$= -\frac{2\pi a}{d} \left(1 - \frac{d-a}{|d-a|} \right) + \frac{2\pi a}{d^2} \left[\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\vartheta} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} =$$

$$= \frac{2\pi a}{d} \left(\frac{d-a}{|d-a|} - 1 \right) + \frac{2\pi a}{d^2} (d+a - |a-d|);$$

• Se $d < a$, $|d-a| = a-d \Rightarrow$ l'integrale vale

$$\frac{2\pi a}{d}(-2) + \frac{2\pi a}{d^2}(2d) = 0; \text{ • Se invece } d > a,$$

$|d-a| = d-a$, e l'integrale vale

$$\frac{2\pi a}{d^2}(2a) = \frac{4\pi a^2}{d^2}$$

□

ESERCIZIO: un campo radiale è conservativo.

19

Soluzione: (supponiamo g continua, g apparirà nel corso dell'esercizio).

Un campo radiale $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è della forma

$g(|x|) \frac{x}{|x|}$, dove $x \in \mathbb{R}^n$ è il generico elemento di $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, \dots, x_n); |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

In componenti, $\vec{F}(x) = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive come

$$\vec{F}(x) = g(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo mostrare che è conservativo, ovvero che esiste una funzione scalare $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (di classe C^1 ad esempio)

tale che $\vec{F} = \nabla U (= \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{pmatrix})$

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\boxed{f'(t) = g(t)}$
(una qualsiasi primitiva di g). Definiamo allora

$$U(x) = U(x_1, \dots, x_n) := f(|x|) = f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}). \text{ Mostriamo che } \vec{F} = \nabla U.$$

$$\text{Calcoliamo } \frac{\partial U}{\partial x_i}. \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (f(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})) = (\text{regola della catena}) =$$

$$= f'(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) \cdot \frac{\partial (\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})}{\partial x_i} = f'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} = g(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|}.$$

$$\text{or eni } \nabla U = g(|x|) \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x|} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{|x|} \end{pmatrix} = \vec{F}(x).$$

□