

INTEGRALI SU SUPERFICI

1

1 Sia $f: I \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione di classe C^1 ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo limitato o illimitato), il cui grafico viene visto come un sottoinsieme del semipiano $y > 0$.

a) Scrivere le formule per A_f delle superfici ottenute ruotando il grafico di f attorno all'asse x ;

b) Scrivere le formule per il volume V_f del solido ottenuto ruotando il trapezio di f attorno all'asse x ;

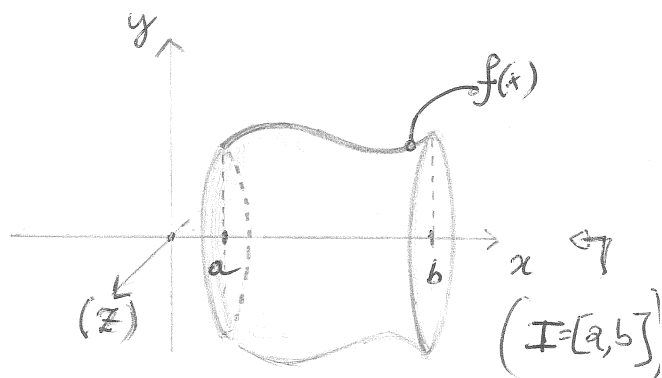
c) Mostrare che se $f(x) = \frac{1}{x}$ su $[1, +\infty[$ allora $V_f < +\infty$, $A_f = +\infty$.

Soluzione (è un ripasso di calcolo di aree e volumi di solidi di rotazione).

La curva è parametrizzata da

$$\gamma(t) = (t, f(t), 0) \quad (\text{immaginiamola giacente nel piano } xy, \text{ i.e. } z=0).$$

$$t \in I$$



Una parametrizzazione delle superfici di rotazione è:

$$\varphi(t, \theta) = (t, f(t) \cos(\theta), f(t) \sin(\theta)), \quad t \in I, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\varphi'(t, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t) \cos(\theta) & -f(t) \sin(\theta) \\ f'(t) \sin(\theta) & f(t) \cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad \text{i det. dei minori di ordine due sono:}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -f(t) \sin(\theta) & f(t) \cos(\theta) \\ f'(t) f(t) \end{vmatrix} \Rightarrow |\wedge \varphi'| = \\ & = \sqrt{f(t)^2 \sin^2(\theta) + f(t)^2 \cos^2(\theta) + f'(t)^2 f(t)^2} = |f(t)| \sqrt{1 + f'(t)^2} \end{aligned}$$

Per cui $A_f = \int_{\mathbf{I} \times [0, 2\pi]} |f(t)| \sqrt{1 + f'(t)^2} dt d\theta = \int_{\mathbf{I} \times [0, 2\pi]} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt d\theta = \boxed{2\pi \int_{\mathbf{I}} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt}$

1) Per quanto riguarda il volume, sfruttiamo il principio di Cavalieri:

$$V_f = \pi \int_{\mathbf{I}} f(t)^2 dt.$$

2) Consideriamo $f: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$V_f = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\pi}{x} \Big|_{x=1}^{x=+\infty} = \pi$$

Per quanto riguarda l'area, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, per cui

$$A_f = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx. \text{ L'integrande } \sim 0 \text{ vicino } x=1, \text{ per cui } \text{è integrabile in } 0.$$

Invece $\frac{1}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$, che non è integrabile per $x \sim +\infty$. Per cui $A_f = +\infty$.

2] Nelle stesse notazioni dell'esercizio precedente, mostriamo che non può capitare $A_f < +\infty$ e $V_f = +\infty$.

Supponiamo dunque $A_f < +\infty$.

- mostrare che $f \in L^1(I)$;
- mostrare che $ff' \in L^1(I)$;
- Sia $x \in I$, $c \in I$. Esprimere $f^2(x) - f^2(c)$ in funzione di ff' . Dedurre che f^2 è limitata (allora pure f);
- Concludere che $V_f < +\infty$.

Soluzione:

a) Ricordiamo (è stato fatto in un altro foglio di esercizi) che se una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) è Riemann-integrabile, allora è Lebesgue integrabile con lo stesso integrale.

In più nel nostro caso $f \in C^1(I)$ ed $f \geq 0$ su I

(Ricordiamo che $f \in L^1(I)$ significa $\int_I |f| d\lambda(x) < +\infty$)
(mis. Lebesgue)

Abbiamo che $A_f = 2\pi \int_I f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx < +\infty$. Per cui

$f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} \in L^1(I)$ ($f \geq 0$). Inoltre, $\forall x \in I$,

$f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} \geq f(x)$ (giusto perché $f \geq 0$ e $\sqrt{1+f'(x)^2} \geq 1$)

per cui, dal criterio del Confronto,

$\int_I f(x) dx \leq \int_I f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx < +\infty$. Da cui $f \in L^1(I)$.

b) Analogamente a quanto fatto prima, siccome $f\sqrt{1+f'^2} \in L^1(I)$, abbiamo che $\sqrt{1+f'(x)^2} \geq \sqrt{f'(x)^2} = |f'(x)|$ per ogni $x \in I$. Quindi, dal principio del confronto,

$$\int_I f(x) |f'(x)| dx \leq \int_I f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx < +\infty.$$

Di nuovo, $ff' \in L^1(I)$ (ricordiamo da questo vuol dire $\int_I |ff'| dx < +\infty$, cioè $\int_I f|f'| dx < +\infty$, siccome $f(x) \geq 0$).

3) Del T. Fondamentale del Calcolo Integrale ($\varphi(x) = \varphi(c) + \int_c^x \varphi'(t) dt$), siccome $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$, abbiamo

$$f^2(x) - f^2(c) = 2 \int_c^x f(t)f'(t) dt, \text{ per cui}$$

$$f^2(x) = f^2(c) + 2 \int_c^x f(t)f'(t) dt \leq$$

$$f^2(c) + 2 \left| \int_c^x f(t)f'(t) dt \right| \leq f^2(c) + 2 \int_c^x f(t)|f'(t)| dt \leq$$

$$\leq f^2(c) + 2 \int_I f(t)|f'(t)| dt < +\infty \quad (f(c) \text{ è il valore}$$

della funzione f , che è continua, in un punto: è un valore finito; $\int_I f|f'| dt$ avremo visto essere finito).

Per cui $f^2(x) \leq C$, dove C è una costante positiva opportuna. Segue immediatamente $f(x) \leq \sqrt{C}$ (e $f(x) \geq 0$),

Per cui f è limitata su I .

Quindi

$$V_f = \pi \int_I f^2(x) dx = \pi \int_I f(x) \cdot f(x) dx \leq \pi \sqrt{C} \int_I f(x) dx < +\infty$$

Quindi: se $A_f < +\infty \Rightarrow V_f < +\infty$

□

DAL FOGLIO DI ESERCIZI

ES. 28 Calcolare i seguenti integrali di superficie
 $\int_{\Sigma} f d\sigma$, dove

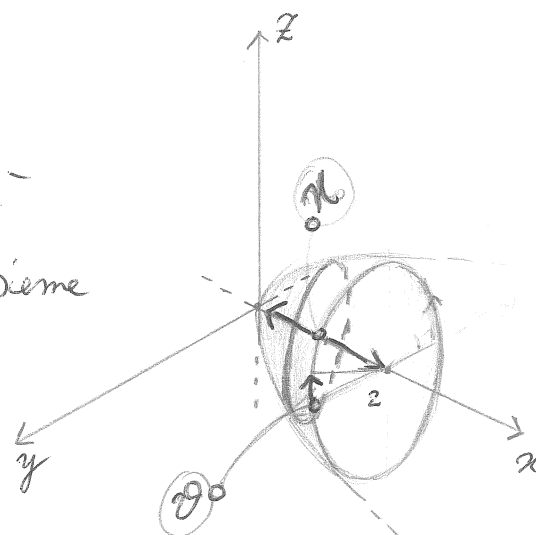
a) Σ è la parte di paraboloide $x = y^2 + z^2$ con $x \leq 2$,
 $f(x, y, z) = z$

Dobbiamo descrivere la superficie come varietà
 parametrica (ci è stata data come insieme
 di vincoli). Per ogni fissato $x \in [0, 2]$

le sezioni di questa superficie sono
 delle circonferenze (parallele al piano yz) di raggio $\sqrt{x}$.

Per cui due parametri che possiamo utilizzare per descrivere
 la superficie sono ad es. l'angolo ϑ , e il "raggio" (o quasi,
 il suo quadrato) x : $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $x \in [0, 2]$.

(Nota: rispetto alla notazione standard, nei disegni ho scambiato l'asse x
 ed u , ma non cambia formalmente nulla. Sussiste la vista)



la superficie è quindi parametrizzata da $\varphi(x, \vartheta)$

$$\varphi(x, \vartheta) = (x, \sqrt{x} \cos \vartheta, \sqrt{x} \sin \vartheta), \quad x \in [0, 2], \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(x, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\cos \vartheta}{2\sqrt{x}} & -\sqrt{x} \sin \vartheta \\ \frac{\sin \vartheta}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \text{l'el. di superficie}$$

$|\wedge \varphi'|$ è

$$|\wedge \varphi'| = \sqrt{x \sin^2 \vartheta + x \cos^2 \vartheta + \frac{\cos^2 \vartheta}{4} + \frac{\sin^2 \vartheta}{4}} =$$

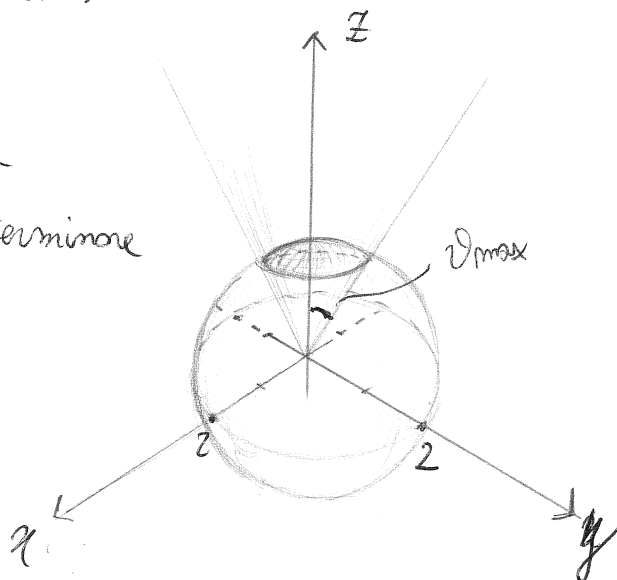
$$= \sqrt{x + \frac{1}{4}}; \quad \text{la funzione è } f(x, y, z) = z$$

$$\Rightarrow f(\varphi(x, \vartheta)) = \sqrt{x} \sin(\vartheta) (=z). \quad \text{Per cui}$$

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{x(x + \frac{1}{4})} \sin(\vartheta) d\vartheta \right) dx = \left(\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \right) \left(\int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{x}{4}} dx \right) = 0 \quad \square$$

b) Σ è la parte di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ che giace sopra al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, e $f(x, y, z) = x^2 z$.

Σ è semplicemente una calotta sferica di cui dobbiamo determinare parametri.



La ^{Superficie} sferica S di centro $(0,0,0)$ e raggio 2
 (cioè $x^2 + y^2 + z^2 = 4$) è parametrizzata dagli angoli (ϑ, ϕ) : 4

$$S = (2 \sin \vartheta \cos \phi, 2 \sin \vartheta \sin \phi, 2 \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi],$$

dove ϑ è l'angolo formato con l'asse z a partire dal polo nord, ϕ è l'angolo formato sul piano xy a partire dall'asse x , in senso antiorario. Ora, la calotta sferica avrà la stessa parametrizzazione, però $\vartheta \in [0, \vartheta_{\max}]$, e questo $\vartheta_{\max}$ dobbiamo determinarlo. Invece $\phi \in [0, 2\pi]$ ("il giro attorno all'asse z è invece completo", v.d. figura).

Determiniamo l'intersezione tra il cono e la sfera

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2; \quad z = \sqrt{2}. \quad \text{Quindi i}$$

punti $(x, y, z) \in \Sigma$, donde al di sopra del cono, hanno

$$\sqrt{2} \leq z \leq 2. \quad \text{Quindi (siccome } z = 2 \cos \vartheta) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \vartheta \leq 1 \Rightarrow$$

$$\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad (\vartheta_{\max} = \frac{\pi}{4}). \quad \Sigma \text{ è parametrizzato da } \varphi(\vartheta, \phi):$$

$$\varphi(\vartheta, \phi) = (2 \sin \vartheta \cos \phi, 2 \sin \vartheta \sin \phi, 2 \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}], \phi \in [0, 2\pi].$$

$$\varphi'(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \vartheta \cos \phi & -2 \sin \vartheta \sin \phi \\ 2 \cos \vartheta \sin \phi & 2 \sin \vartheta \cos \phi \\ -2 \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori di ordine 2 sono:

$4 \sin \vartheta \cos \vartheta$; $-4 \sin^2 \vartheta \sin \phi$; $-4 \sin^2 \vartheta \cos \phi$; L'el. di superficie è

$$|\Lambda \varphi'| = \sqrt{16 (\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta \sin^2 \phi + \sin^4 \vartheta \cos^2 \phi)} =$$

$$= 4 \sqrt{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta} = 4 \sqrt{\sin^2 \vartheta} = 4 |\sin \vartheta|;$$

Siccome $\vartheta \in [0, \pi/4]$, $\sin \vartheta > 0$; per cui $|\Lambda \varphi'| = 4 \sin \vartheta$

$$f(x, y, z) = x^2 z \Rightarrow f(\varphi(\vartheta, \phi)) = 8 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \phi$$

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = 32 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \phi d\vartheta \right) d\phi =$$

$$= 32 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right) =$$

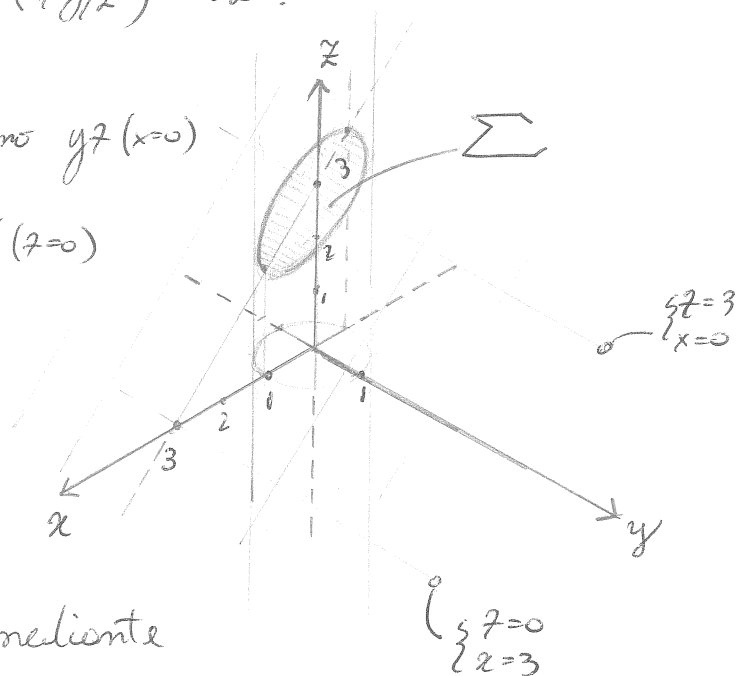
$\nearrow \sin \vartheta = f \Rightarrow \cos \vartheta d\vartheta = df$

$$32 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi \right) \left(\int_{f(0)}^{f(\pi/4)} f^3 df \right) = 32 \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^3 df = 32 \pi \left(\frac{f^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{32 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{4}{16} = \boxed{2\pi}$$

c) Σ è la parte di piano $z+x-3=0$ interna al cilindro $x^2+y^2=1$ e $f(x,y,z)=xz$.

il piano $z+x-3$ interseca il piano yz ($x=0$)
 nella retta $\begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$, e il piano xy ($z=0$)
 nella retta $\begin{cases} x=3 \\ z=0 \end{cases}$



Come al solito, dobbiamo creare la parametrizzazione Σ mediante due parametri.

Ad esempio, siccome i punti $(x,y,z) \in \Sigma$ sono tali che $x^2+y^2 \leq 1$ (sono interni al cilindro), possiamo parametrizzare

x ed y come $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, $r \in [0,1]$,

$\vartheta \in [0, 2\pi]$. Per quanto riguarda z , da $z = 3 - x$,

segue che possiamo parametrizzare z come $z = 3 - r \cos \vartheta$.

Per cui Σ è parametrizzata da $\varphi(r,\vartheta)$

$$\varphi(r,\vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, 3 - r \cos \vartheta), \quad r \in [0,1], \quad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

$$\varphi'(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \\ -\cos \vartheta & r \sin \vartheta \end{pmatrix} \text{ i determinanti dei minori di ordine 2 sono: } r; r; 0;$$

$$\text{per cui } |\wedge \varphi'| = \sqrt{2} r$$

$$f(x,y,z) = xz \Rightarrow f(\rho(r,\vartheta)) = r \cos \vartheta (3 - r \cos \vartheta) = 3r \cos \vartheta - r^2 \cos^2 \vartheta$$

$$\int_{\Sigma} f d\sigma = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^2 \cos \vartheta - r^3 \cos^2 \vartheta) d\vartheta dr =$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \right) - \sqrt{2} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta \right) =$$

$$= -\sqrt{2} \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) \pi = \boxed{-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}}$$

d) Σ è la regione triangolare di vertici $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$ e $f(x,y,z) = xz$.

Σ è una porzione di un certo piano (la porzione contenuta nel 1° ottante: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Dobbiamo determinare il piano.

il piano sarà del tipo

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = c;$$

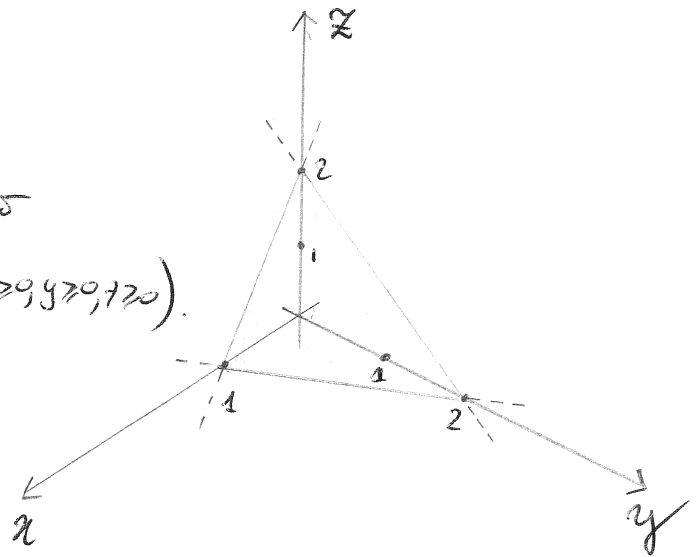
conosciamo le rette che questo piano forma quando interseca i piani coordinati:

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x+z=2 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ z+y=2 \end{cases}; \begin{cases} z=0 \\ 2x+y=2 \end{cases}. \text{ Possiamo ricavare l'equazione}$$

del piano: $\boxed{2x+y+z=2}$; dobbiamo parametrizzare Σ

mediante due parametri; ad esempio $\underline{x, y}$:

$x \in [0,1]$, $y \in [0, 2-2x]$ L'equazione del piano ci darà $z = 2-2x-y$;



Quindi $\varphi(x, y) = (x, y, 2-2x-y)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 2-2x]$ 6

$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; i determinanti dei minori sono:

$1; 2; -1$;

$|\varphi'| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$f(x, y, z) = x \Rightarrow f(\varphi(x, y)) = x$

$\int_{\Sigma} f d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \sqrt{6} x dy \right) dx = \sqrt{6} \int_0^1 x(2-2x) dx = \sqrt{6} \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$

$= \sqrt{6} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

oss. Stiamo prendendo (x, y) sul triangolo che giace sul piano xy , proiezione della superficie su xy . Ogni punto su Σ avrà (x, y) su questo triangolo e z in funzione di x, y .

□

ES. 29 Trovare il baricentro di una lamina sottile di densità costante che ha la forma della parte di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ che giace sotto al piano $z = 1$

Soluzione: lo svolgimento è del tutto analogo a quello del punto b) dell'esercizio precedente (le porte delle parametrizzazioni): la lamina è

parametrizzata da $\varphi(\vartheta, \phi) = (2 \sin \vartheta \cos \phi, 2 \sin \vartheta \sin \phi, 2 \cos \vartheta)$,

con $\vartheta \in [\vartheta_{\min}, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$. $\vartheta_{\min}$ lo dobbiamo

determinare (stavolta siamo sotto al un piano)

$$z = 2\cos\vartheta; \text{ siccome}$$

$$-2 \leq z \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos\vartheta \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vartheta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right];$$

$$\text{per cui } \vartheta_{\min} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Abbiamo visto che } |\Lambda\varphi'| = 4\sin\vartheta.$$

Calcoliamo l'area delle superficie A :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4\sin\vartheta \, d\vartheta \right) d\phi = 8\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = -8\pi \cos\vartheta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= 8\pi + \frac{8\pi}{2} = 12\pi. \end{aligned}$$

Le coordinate del baricentro sono date da:

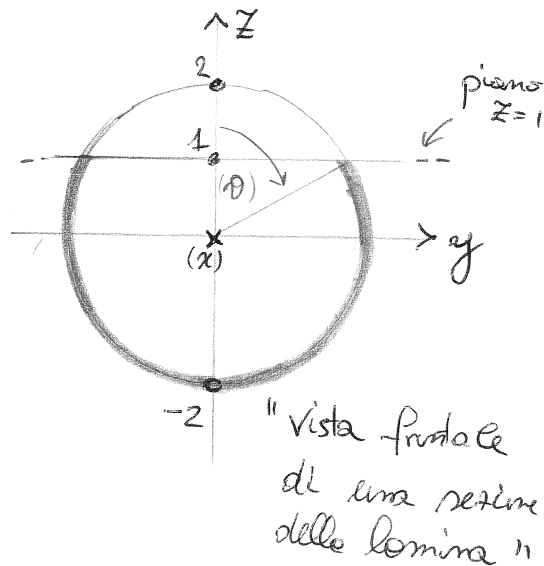
$$\bar{x} = \frac{\int \sum x \, d\sigma}{A}; \quad \bar{y} = \frac{\int \sum y \, d\sigma}{A}; \quad \bar{z} = \frac{\int \sum z \, d\sigma}{A}; \quad \text{quindi}$$

$$\begin{aligned} \int \sum x \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4\sin\vartheta \cdot 2\sin\vartheta \cos\phi \, d\vartheta \right) d\phi = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi \right) \left(8 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) = 0 \quad \left(\text{poich\'e } \int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0;$$

$$\int \sum y \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4\sin\vartheta \cdot 2\sin\vartheta \sin\phi \, d\vartheta \right) d\phi = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi \right)}_{=0} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 8\sin^2\vartheta \, d\vartheta \right) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0;$$



$$\int_{\Sigma} z \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4 \sin \vartheta \cdot 2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\phi = 16\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \boxed{7}$$

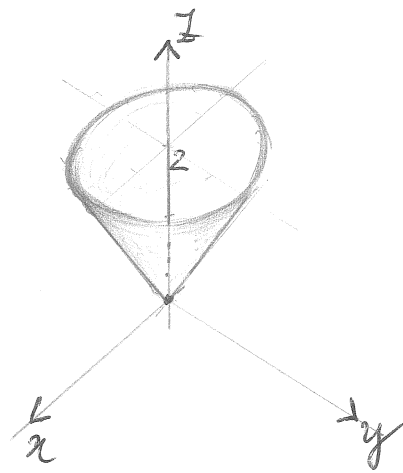
$\uparrow$
 $\sin \vartheta = f$
 $\cos \vartheta \, d\vartheta = df$

$$= 16\pi \int_{f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}}^{f(\pi)=0} f \, df = 16\pi \left(\frac{f^2}{2} \Big|_{f=\frac{\sqrt{3}}{2}}^{f=0} \right) = -\frac{16\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} = -6\pi ;$$

per cui $\bar{z} = -\frac{6\pi}{12\pi} = -\frac{1}{2}$; il baricentro ha coordinate $(0, 0, -\frac{1}{2})$.

□

ES. 30 Trovare il momento di inerzia rispetto all'asse z di una lamina sottile in forma della superficie conica $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$;



Una parametrizzazione è $\varphi(r, \vartheta)$

$$(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, r), \quad r \in [0, 2], \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

i det. dei minori di ordine 2 sono: r ; $-r \cos \vartheta$; $r \sin \vartheta$;

$|\varphi'| = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2} r$. Il momento di inerzia rispetto

all'asse z è

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sqrt{2} r \, dr \right) d\vartheta = 2\sqrt{2}\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=2}$$

$$= \boxed{8\sqrt{2}\pi}$$

□

ES. 12.7]

Sia $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 4, x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

i) Disegnare C ; dire se C è compatto.

ii) Calcolare il volume $\text{Vol}(C)$ di C .

iii) Sia $\vec{F}(x, y, z) = \vec{e}_1 x (= (x, 0, 0))$. Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da C .

iv) Trovare il flusso di $\vec{F}$ uscente da C attraverso le singole parti di frontiera di C .

v) Calcolare l'area della frontiera di C .

Soluzione:

i) C è compatto: è chiuso
(ci sono disuguaglianze larghe) e

limitato: $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1,$
 $0 \leq z \leq 4$.

ii) Il solido è racchiuso da
una parte di paraboloide

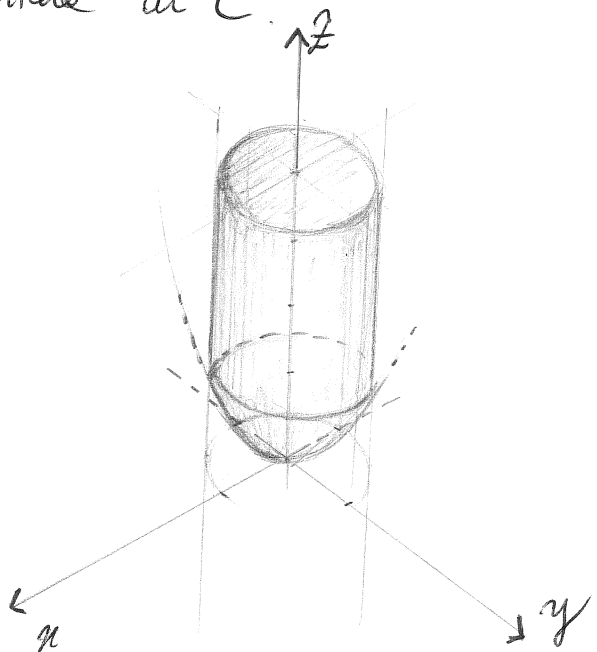
$z = x^2 + y^2$, per $z \geq 0$ e finché il paraboloide non interseca
il cilindro $x^2 + y^2 = 1$, quindi per $z = 1$; per $1 \leq z \leq 4$
il solido è all'interno del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Il volume è quello della regione

$z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 1$ (la parte "in basso", nel
paraboloide e sotto il cilindro), più quello del cilindro

Sovrapponete: $x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 4$. Il volume di quest'ultimo

però è immediato: 3π (area di base per altezza: $\pi \cdot 3$).



Il volume del solido racchiuso tra il paraboloide e il piano $z=1$ si calcola al es. per fili paralleli all'asse z ; le proiezioni del solido sul piano xy è il disco $x^2+y^2 \leq 1$; le xy -sezioni sono gli intervalli (fili) $z \in [x^2+y^2, 1]$; quindi il volume è

$$\int_{(x^2+y^2 \leq 1)} \left(\int_{x^2+y^2}^1 dz \right) dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x^2-y^2) dx dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coord. polari}}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2) r dr d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Il volume $\text{Vol}(C) = \frac{\pi}{2} + 3\pi$.

iii) (da vedere dopo aver fatto il T. della Divergenza!!)

$\text{div } \vec{F} = 1$; L'interno di C è un aperto Stokiano, dove vale il T. della Divergenza:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_C \text{div } \vec{F} dx dy dz = \int_C 1 dx dy dz = \frac{\pi}{2} + 3\pi$$

iv) Calcoliamo il flusso uscente su ogni ~~parte~~ della frontiera.

Partiamo dalla parte di frontiera $z=1, (x^2+y^2 \leq 1)$, cioè il piano che racchiude in alto il solido (sia Σ_1).

Si vede subito che il flusso uscente è nullo: la normale uscente a questa parte di bordo è $(0,0,1)$, mentre il flusso è a lei ortogonale: è $(x,0,0)$.

Quindi $\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_{\Sigma_1} 0 d\sigma = 0$.

† L'abbiamo ricavato subito, senza alcun conto, poiché si vede immediatamente. Al più moho $\Sigma_1 := \{z=4, x^2+y^2 \leq 1\}$

si può parametrizzare come $\varphi(r) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, 4)$, $r \in [0,1]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0) ; \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (-r \sin \vartheta, r \cos \vartheta, 0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} e_1 & \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ e_2 & \sin \vartheta & r \cos \vartheta \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1(0) - e_2(0) + e_3(r)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} ; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = r^2 \Rightarrow \boxed{\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \nu \, d\sigma = 0}$$

~~$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sin \vartheta \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta = 2 \left(\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta) \, d\vartheta \right) \left(\int_0^1 r \, dr \right) = \left(-2 \cos(\vartheta) \Big|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 0.$$~~

Calcoliamo il flusso uscente dalla superficie cilindrica

laterale: l'ene è parametrizzata da $\varphi(\vartheta, \xi)$ (sia Σ_2)

$$\varphi(\vartheta, \xi) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, \xi) , \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad \xi \in [1, 4].$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) ; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} e_1 & -\sin \vartheta & 0 \\ e_2 & \cos \vartheta & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1(\cos \vartheta) - e_2(-\sin \vartheta) + e_3(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\vec{F}(\varphi(\vartheta, \xi)) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{F}(\varphi(\vartheta, \xi)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) =$$

$$= \cos^2 \vartheta ; \text{ per cui}$$

$$\int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^4 \cos^2 \vartheta d\tilde{r} \right) d\vartheta = 3\pi ;$$

$$\Sigma_2 := \{x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 4\}$$

Calcoliamo infine il flusso uscente dalle superficie del paraboloide: $\Sigma_3 := \{z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$; esse si parametrizza come

$$\varphi(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, r^2); \quad r \in [0, 1], \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 2r); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (-r \sin \vartheta, r \cos \vartheta, 0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} e_1 \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ e_2 \sin \vartheta & r \cos \vartheta \\ e_3 & 2r \end{pmatrix} = e_1 (2r^2 \cos \vartheta) - e_2 (2r^2 \sin \vartheta) + e_3 (r)$$

$$= r \begin{pmatrix} 2r \cos \vartheta \\ -2r \sin \vartheta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\varphi(r, \vartheta)) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{F}(\varphi(r, \vartheta)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) = -2r^3 \cos^2 \vartheta$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \cos^2 \vartheta dr d\vartheta = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{in realtà: punto è})$$

il flusso entrante: quello uscente è $\left(\frac{\pi}{2}\right)!$ è importante
 creare di capire quale vettore normale abbiamo considerato:

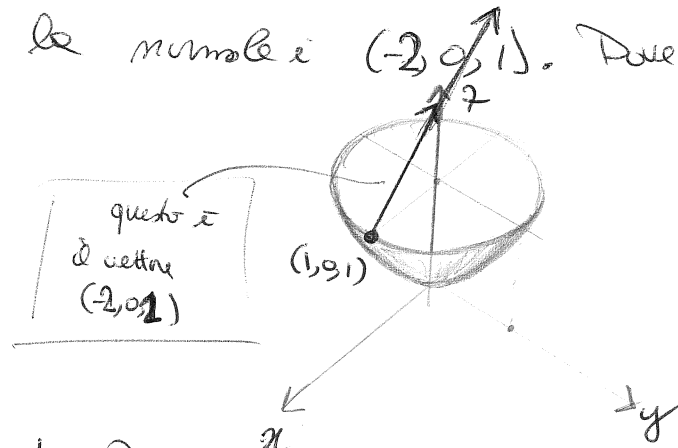
ne abbiamo trovato uno, ma può essere sia quello che punta "in dentro" che quello che punta "in fuori".

~~Per il punto (0,0,0) la normale è~~

↑

IMPORTANTE!

Ad. es. consideriamo un punto $(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 1)$ su Σ_3 , quando $r=1$ (quindi su bordo superiore di Σ_3). La normale che abbiamo calcolato è $(-\cos \vartheta, -\sin \vartheta, 1)$; prendiamo $\vartheta=0$; il punto è $(1, 0, 1)$; la normale è $(-2, 0, 1)$. Dove punta?



quindi punta verso l'interno! Per cui il vettore normale uscente è $r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ -1 \end{pmatrix}$; per cui il flusso uscente è $\frac{\pi}{2}$

(Tu puoi verificare anche per i casi precedenti!) **! IMPORTANTE!**

Per ottenere il flusso, ora basta sommare i vari contributi:

$$\boxed{\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 3\pi + \frac{\pi}{2}}$$

1) L'area di $\Sigma_1 := \{z=4 \cup x^2+y^2 \leq 1\}$ è π (l'area del disco di raggio 1). L'area di $\Sigma_2 := \{x^2+y^2=1, 1 \leq z \leq 4\}$, cioè della superficie cilindrica, è $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. (area laterale di un cilindro di base il disco unitario e altezza 3).

Resta l'area della superficie Σ_3 ;

l'averemo parametrizzata come $\varphi(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, r^2)$,
 $r \in [0, 1]$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

$$\varphi'(r) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \\ 2r & 0 \end{pmatrix}; |\varphi'| = \sqrt{r^2 + 4r^4} = r\sqrt{1+4r^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma_3) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2} dr \right) d\vartheta = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2} dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{f(0)}^{f(1)} \sqrt{f} df = \frac{\pi}{4} \int_1^5 f^{1/2} df = \end{aligned}$$

$1+4r^2 = f$
 $8r dr = df$

~~$$= \frac{\pi}{4} \cdot (-2) \left(f^{-1/2} \right) \Big|_{f=1}^{f=5} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right) = \frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{(\sqrt{5}-1) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5} \right)$$~~

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{3} f^{3/2} \right) \Big|_{f=1}^{f=5} = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)$$

l'area totale è $\boxed{6\pi + \pi + \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)}$

□

ES. 10.8 | Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9, z < \sqrt{x^2 + y^2}\}$

i) Descrivere E , abbozzarne un disegno, mostrare che la frontiera di E , privata di un punto, è contenuta in un'Unione finita di varietà bidimensionali. Quali?

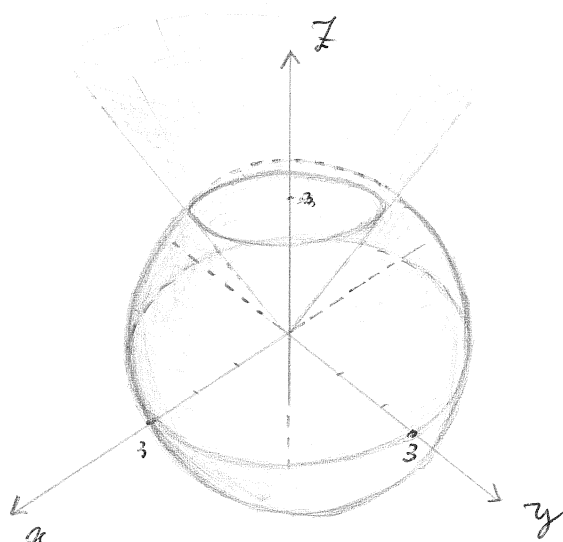
ii) Calcolare il volume $\text{Vol}(E)$

iii) Sia $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcolare il flusso di $\nabla u(x, y, z)$ uscente dalle singole porzioni di frontiera di E

iv) Dedurre dalla precedente risposta l'area delle porzioni di frontiera di E che sta sulla sfera di centro l'origine e raggio 3.

Soluzione:

i) E è la palla euclidea centrata nell'origine e raggio 3, privata del semi-cono superiore che ha vertice l'origine e asse l'asse z (e sta nel semispazio $z > 0$)



La frontiera di E è contenuta sulle superficie della sfera (varietà 2-dimensionale) e sulle superficie del cono privato del vertice (di fatto il cono privato del vertice è una varietà bi-dimensionale).

ii) In coordinate sferiche

$$E = \{(r, \vartheta, \phi) \in \mathbb{R}^3: r \in [0, 3], \vartheta \in [\vartheta_{\min}, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}.$$

(Questo si vede analogamente ad un esercizio precedente. Dobbiamo determinare il $\vartheta_{\min}$ da cui far partire l'angolo ϑ , formato con l'asse z). Il cambio di coordinate è il solito:

$$(x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \phi, r \sin \vartheta \sin \phi, r \cos \vartheta).$$

Quando il cono interseca la sfera si ha

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad \text{Per cui } -3 \leq z \leq \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ cioè}$$

$$(r=3, \text{ siamo sulla superficie}) \quad -3 \leq 3 \cos \vartheta \leq \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\text{cioè } -1 \leq \cos \vartheta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{cioè } \vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

Il volume è

$$V_{\mathcal{L}}(E) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^3 r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\phi \quad (\text{ricordiamo che}$$

in coordinate sferiche, il determinante della Jacobiano della trasformazione è $r^2 \sin \vartheta$. Per cui

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{L}}(E) &= \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=3} \right) \cdot 2\pi \cdot (-\cos \vartheta) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\pi} = \\ &= 9 \cdot 2\pi \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (2 + \sqrt{2}) \cdot 9\pi. \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \nabla u = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\vec{r}.$$

Calcoliamo il flusso uscente dalla superficie sferica Σ_1 ; Essa è parametrizzata da $\varphi(\vartheta, \phi) = (3\sin\vartheta\cos\phi, 3\sin\vartheta\sin\phi, 3\cos\vartheta)$, $\vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (3\cos\vartheta\cos\phi, 3\cos\vartheta\sin\phi, -3\sin\vartheta)$;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = (-3\sin\vartheta\sin\phi, 3\sin\vartheta\cos\phi, 0);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} e_1 & 3\cos\vartheta\cos\phi & -3\sin\vartheta\sin\phi \\ e_2 & 3\cos\vartheta\sin\phi & 3\sin\vartheta\cos\phi \\ e_3 & -3\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} = \quad \text{Controllare che sia il vettore normale uscente!}$$

$$= e_1(9\sin^2\vartheta\cos\phi) - e_2(-9\sin^2\vartheta\sin\phi) + e_3(9\cos\vartheta\sin\vartheta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 9\sin^2\vartheta\cos\phi \\ 9\sin^2\vartheta\sin\phi \\ 9\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}; \quad \vec{F}(\varphi(\vartheta, \phi)) = 2 \begin{pmatrix} 3\sin\vartheta\cos\phi \\ 3\sin\vartheta\sin\phi \\ 3\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\varphi(\vartheta, \phi)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) = 2(27\sin^3\vartheta\cos^2\phi + 27\sin^3\vartheta\sin^2\phi + 27\cos^2\vartheta\sin\vartheta)$$

$$= 2(27\sin^3\vartheta + 27\cos^2\vartheta\sin\vartheta) = 54\sin\vartheta. \quad \text{Quindi}$$

$$\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\omega = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 54\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi = 2\pi \cdot 54 \cdot (-\cos\vartheta) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\pi}$$

$$= 54 \cdot 2 \cdot \pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 54\pi(2 + \sqrt{2}).$$

Calcoliamo ora il flusso uscente dalla porzione di superficie conica Σ_2 . Essa è parametrizzata da $\varphi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, \frac{3}{\sqrt{2}}]$; $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos\phi, \sin\phi, 1)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = (-r\sin\phi, r\cos\phi, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} e_1 & \cos\phi & -r\sin\phi \\ e_2 & \sin\phi & r\cos\phi \\ e_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = e_1(-r\cos\phi) - e_2(r\sin\phi) + e_3(r) =$$

$$= r \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Possiamo verificare che questo in realtà è il vettore$$

normale entrante a Σ_2 ; quello uscente sarà $r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{F}(\varphi(r, \phi)) = 2 \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ r \end{pmatrix} ;$$

12

$$\vec{F}(\varphi(r, \phi)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) = 2r \cos^2 \phi + 2r \sin^2 \phi - 2r = 0.$$

Per cui il flusso uscente da Σ_2 è 0. Quindi

il flusso uscente da tutta la superficie di E è $\boxed{54(2+\sqrt{2})\pi}$

iv) La sfera in coordinate sferiche è parametrizzata da $\varphi(\vartheta, \phi)$

$$\varphi(\vartheta, \phi) = (3 \sin \vartheta \cos \phi, 3 \sin \vartheta \sin \phi, 3 \cos \vartheta)$$

$$\varphi'(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} 3 \cos \vartheta \cos \phi & -3 \sin \vartheta \sin \phi \\ 3 \cos \vartheta \sin \phi & 3 \sin \vartheta \cos \phi \\ -3 \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\wedge \varphi'| = \sqrt{81 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + 81 \sin^4 \vartheta \cos^2 \phi + 81 \sin^4 \vartheta \sin^2 \phi} =$$

$$= 9 \sqrt{\cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta} = 9 \sin \vartheta. \text{ (già calcolato in un es.}$$

precedente).

$$\text{Quindi } \text{Area}(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 9 \sin \vartheta d\vartheta \right) d\phi =$$

$$= 18\pi \left(-\cos \vartheta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right) = 18\pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 9\pi (2 + \sqrt{2})$$

□

ES. 10.22 Calcolare il flusso del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^4, y, z)$ attraverso la superficie parametrizzata $\varphi(u,v) = (u, v, 1 - (u^2 + v^2))$, $D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Soluzione: la superficie si può riconoscere: è la calotta di un paraboloide che ha vertice in $(0,0,1)$ e interseca il piano xy nel cerchio $x^2 + y^2 = 1$.

(si può vedere dalla forma della parametrizzazione che la superficie è il grafico di una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$).

$$\vec{F}(\varphi(u,v)) = (u^4, v, 1 - (u^2 + v^2))$$

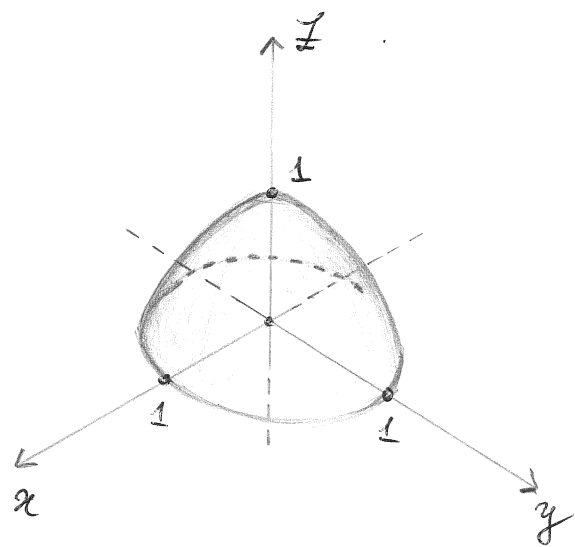
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -2u & -2v \end{pmatrix} =$$

$$= e_1(2u) - e_2(-2v) + e_3 = (2u, 2v, 1);$$

$$\vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = (2u^5 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2) =$$

$$= 2u^5 - u^2 + v^2 + 1;$$



Calcoliamo

13

$\int_D 2u^5 - u^2 + v^2 + 1 \, du dv$. Passiamo a coordinate polari:

$u = r \cos \vartheta$, $v = r \sin \vartheta$; il modulo del determinante della Jacobiana è r ; $r \in [0, 1]$; $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Per cui

$$\int_D 2u^5 - u^2 + v^2 + 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^5 \cos^5 \vartheta - r^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta + 1) r \, dr \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2 \cos^5 \vartheta \left(\int_0^1 r^6 \, dr \right) - \cos^2 \vartheta \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) + \sin^2 \vartheta \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) + \left(\int_0^1 r \, dr \right) \right] d\vartheta$$

= ... (i conti sono lunghi e già visti in precedenti esercizi).

C'è un modo per risolvere il problema più velocemente.

Dobbiamo calcolare $\int_D (2u^5 - u^2 + v^2 + 1) \, du dv$ (se può

far sentire più a proprio agio, possiamo chiamare $u=x$, $v=y$;
 D è il disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$).

$$2 \int_D u^5 \, du dv = 0 : u^5 \text{ è dispari!}$$

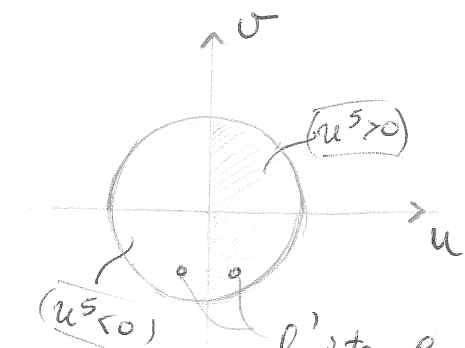
$$\int_D u^2 \, du dv = \int_D v^2 \, du dv : \text{anche questo si}$$

può risolvere per questioni di simmetria del dominio e della funzione!

(parare!)

$$\text{Per cui } \int_D (2u^5 - u^2 + v^2 + 1) \, du dv = \int_D 1 \, du dv = \pi$$

↑
 area del disco unitario



l'integrale di u^5 sul

semidisco $u > 0$ è uguale in modulo e opposto in segno a quello sul semidisco $u < 0$, e opposto in modulo.

□

ES. 8.25 | Utilizzando il risultato sull'integrazione su sfere, calcolare il seguente integrale

$$\int_{B(0,1)} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz, \quad \text{dove } B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

Soluzione: La funzione integranda è scalare:

$$f(x,y,z) = g(|x|) \quad (\text{la notazione qui è: } X \text{ è un punto in } \mathbb{R}^3, \\ X = (x,y,z); |X| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ è la distanza di } X \text{ dall'origine - o modulo di } X).$$

$$\text{Per cui } \int_{B(0,1)} f(x,y,z) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_{\partial B(0,r)} g(\xi) d\sigma(\xi) \right) dr$$

$$= \int_0^1 g(r) \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{area della sup. sferica } \partial B(0,r)} dr \quad (*)$$

* Superficie della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio r .

Qui g è costante! (g dipende solo dalle distanze dall'origine, che in punto cost , su ogni superficie sferica fissata, è costante!)

nel nostro caso, $g(r) = e^r \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (*) &= 4\pi \int_0^1 r^2 e^r dr = 4\pi r^2 e^r \Big|_0^1 - \int_0^1 4\pi \cdot 2r e^r dr = \\ &= 4\pi e - 8\pi \int_0^1 r e^r dr = 4\pi e - 8\pi r e^r \Big|_0^1 + 8\pi \int_0^1 e^r dr = \\ &= 4\pi e - 8\pi e + 8\pi e^r \Big|_0^1 = -4\pi e + 8\pi(e-1) = \\ &= -4\pi e + 8\pi e - 8\pi = 4\pi e - 8\pi = \underline{\underline{4\pi(e-2)}} \end{aligned}$$

□

CALCOLO DEL VOLUME E DELLA MISURA DELLA SUPERFICIE 14

DELLA PALLA $B_m(0, R) \subset \mathbb{R}^m$.

Tratteremo una formula per il volume e l'area superficiale della palla in $\mathbb{R}^m$ centrata in 0 e di raggio R :

$$B_m(0, R) := \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2 \}.$$

Innanzitutto abbiamo bisogno di una parametrizzazione (della palla)

Ricordiamo che in $\mathbb{R}^2$ avevamo $(r, \vartheta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$,

$$B_2(0, 1) = \{ (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) : r \in [0, R], \vartheta \in [0, 2\pi] \}$$

Ricordiamo che in $\mathbb{R}^3$ avevamo $(r, \vartheta_1, \vartheta_2) \in [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ e

$$B_3(0, 1) = \{ (r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, r \cos \vartheta_1) : r \in [0, R], \vartheta_1 \in [0, \pi], \vartheta_2 \in [0, 2\pi] \}$$

(ϑ_1 è quello che abbiamo sempre chiamato ϑ , ϑ_2 lo chiamavamo ϕ)

Nel caso di $B_m(0, 1)$, abbiamo sempre bisogno di m parametri:

le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^m$ sono date da ($m \geq 3$)

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\vartheta_1) \\ x_2 = r \sin(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) \\ x_3 = r \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \cos(\vartheta_3) \\ \vdots \\ x_{m-1} = r \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \cdots \sin(\vartheta_{m-2}) \cos(\vartheta_{m-1}) \\ x_m = r \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \cdots \sin(\vartheta_{m-2}) \sin(\vartheta_{m-1}) \end{cases}, \text{ dove}$$

$$r \in [0, R], \quad \vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2} \in [0, \pi], \quad \vartheta_{m-1} \in [0, 2\pi]$$

Si può calcolare l'elemento di volume (il determinante dello Jacobiano della trasformazione) (prova al es. nel caso $m=4 \dots$)

Essa è $\left| r^{m-1} (\sin \vartheta_1)^{m-2} \sin(\vartheta_2)^{m-3} \dots \sin(\vartheta_{m-2}) dr d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{m-1} \right|$

Per cui
$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_m(0, R)) &= \left(\int_0^R r^{m-1} dr \right) \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta_1)^{m-2} \sin(\vartheta_2)^{m-3} \dots \sin(\vartheta_{m-2}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-1} \right) \\ &= \frac{R^m}{m} \cdot \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta_1)^{m-2} \sin(\vartheta_2)^{m-3} \dots \sin(\vartheta_{m-2}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(B_m(0, 1)) = \frac{1}{m} \cdot \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta_1)^{m-2} \sin(\vartheta_2)^{m-3} \dots \sin(\vartheta_{m-2}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-1} \right)$$

Per cui già da questo abbiamo ricavato che $\boxed{\text{Vol}(B_m(0, R)) = R^m \cdot \text{Vol}(B_m(0, 1))}$

Quindi in realtà ci basta calcolare il volume della sfera unitaria.

Poniamo a considerare la superficie $\partial B_m(0, R)$. Essa è parametrizzata dagli angoli $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-1})$. La parametrizzazione suddetta è $\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-1}) = (R \cos(\vartheta_1), R \sin(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2), \dots, R \sin(\vartheta_1) \dots \sin(\vartheta_{m-2}) \cos(\vartheta_{m-1}), R \sin(\vartheta_1) \dots \sin(\vartheta_{m-2}) \sin(\vartheta_{m-1}))$.

Si può calcolare $|\wedge \varphi'|$ e dato da

$$|\wedge \varphi'| = R^{m-1} (\sin \vartheta_1)^{m-2} (\sin \vartheta_2)^{m-3} \dots (\sin \vartheta_{m-2}) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-1}.$$

Nello stesso modo fatto per il volume, possiamo osservare che

$$\boxed{\text{Area}(\partial B_m(0, R)) = R^{m-1} \cdot \text{Area}(\partial B_m(0, 1))}$$

∂B_m è la superficie della m -sfera

Le considerazioni fatte finora ci permettono di concludere che $\text{Vol}(B_m(0, R)) = R^m \cdot \text{Vol}(B_m(0, 1))$,
mentre $\text{Area}(\partial B_m(0, R)) = R^{m-1} \cdot \text{Area}(\partial B_m(0, 1))$.

Quindi dobbiamo calcolare il volume e l'area superficiale della palla unitaria in $\mathbb{R}^m$.

Per fare questo calcoliamo l'integrale $I_m = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-r^2} dx_1 \dots dx_m$ in due modi diversi.

1) Integriamo per sfere: la funzione è radiale, e $\mathbb{R}^m$ può essere pensato ad una palla il cui raggio sta andando a $+\infty$.

Per cui utilizziamo la formula:

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0, r)} e^{-r^2} d\omega \right) dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \left(\int_{\partial B(0, r)} d\omega \right) dr = \\ &= \text{Area}(\partial B_m(0, 1)) \cdot \int_0^{+\infty} r^{m-1} e^{-r^2} dr \quad \begin{array}{l} \parallel \\ \text{Area}(\partial B_m(0, r)) = r^{m-1} \text{Area}(\partial B_m(0, 1)) \end{array} \\ &= \frac{\text{Area}(\partial B_m(0, 1))}{2} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt}_{\parallel \Gamma(\frac{m}{2}) \text{ (definizione di } \Gamma \text{ di Eulero)}} = \frac{\text{Area}(\partial B_m(0, 1))}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } I_m = \frac{\text{Area}(\partial B_m(0, 1)) \cdot \Gamma(\frac{m}{2})}{2}.$$

Calcoliamo I_m direttamente:

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_m^2)} dx_1 \dots dx_m = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_m^2} dx_m \right)$$

ognuno di questi integrali vale $\sqrt{\pi}$; per cui

$$I_m = \pi^{\frac{m}{2}}. \quad \text{Uguagliando i due integrali, si ha}$$

$$\text{Area}(\partial B_m(0,1)) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}; \quad \text{Invece per quanto riguarda il}$$

volume, calcoliamo integrando per sfere:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_m(0,1)) &= \int_{B_m(0,1)} dx_1 \dots dx_m = \int_0^1 \left(\int_{\partial B_m(0,r)} d\omega \right) dr = \\ &= \int_0^1 r^{m-1} \cdot \text{Area}(\partial B_m(0,1)) dr = \\ &= \frac{\text{Area}(\partial B_m(0,1))}{m} = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2) \cdot m}. \end{aligned}$$

Quindi l'area della superficie delle sfere unitarie ed il suo volume sono legati da

$$\boxed{\text{Area}(\partial B_m(0,1)) = m \cdot \text{Vol}(B_m(0,1))}$$

$$\boxed{\text{Vol}(B_m(0,1)) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2) \cdot m}}$$

□

Dato la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, presi $-a \leq h_2 < h_1 \leq a$, il segmento sferico è la porzione di sfera compresa fra i piani $z = h_1$ e $z = h_2$. Preso il cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, tangente alla sfera nel piano equatoriale, mostrare che l'area del segmento sferico coincide con quella della porzione di cilindro compresa fra i piani $z = h_1$ e $z = h_2$.

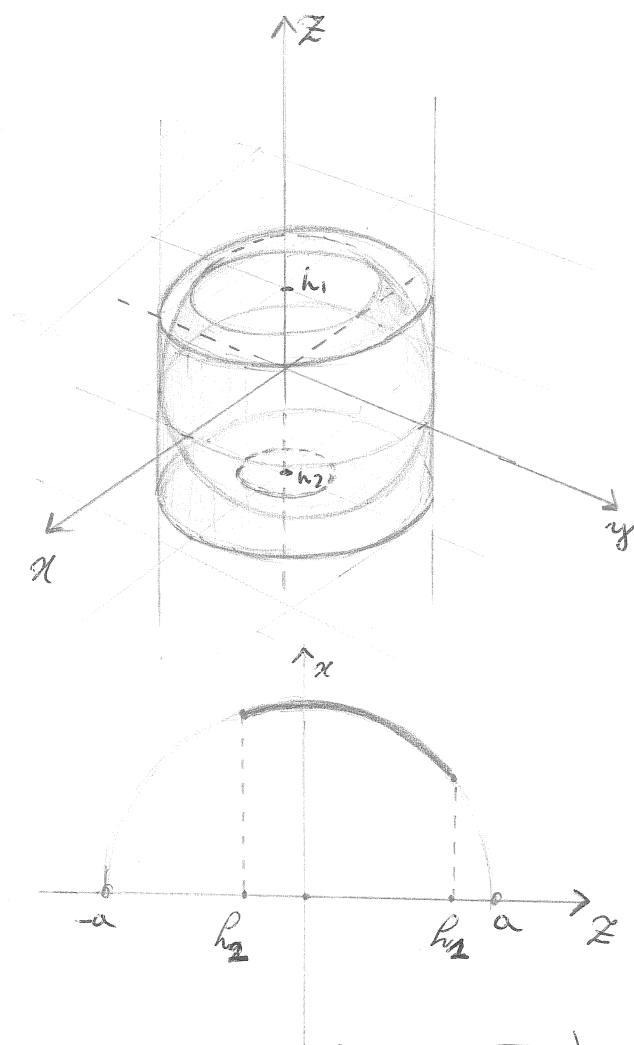
Soluzione:

L'area della porzione di cilindro tra h_1 e h_2 è $2\pi a(h_1 - h_2)$.

Calcoliamo l'area della superficie della sfera tra i due piani.

Possiamo considerarla come superficie di rotazione: essa è data dalla rotazione della curva γ sul piano xz attorno all'asse z , di 2π . Questa curva è una parte di semicirconferenza $x = \sqrt{a^2 - z^2}$, esattamente per $h_2 \leq z \leq h_1$.

Una parametrizzazione della curva è ad es. $\gamma(z) = (z, \sqrt{a^2 - z^2})$, $h_1 \leq z \leq h_2$.



La derivata della curva $\gamma(z)$ è $\gamma'(z) = (1, -\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}})$.

$$\gamma'(z) = \left(1, -\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}\right); |\gamma'(z)| = \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2 - z^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\gamma) &= 2\pi \int_{\gamma} \kappa ds = 2\pi \int_{[h_2, h_1]} \sqrt{a^2 - z^2} |\gamma'| dz = \\ &= 2\pi \int_{h_2}^{h_1} \sqrt{a^2 - z^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - z^2}} dz = 2\pi \int_{h_2}^{h_1} a dz = 2\pi a(h_1 - h_2). \end{aligned}$$

Per cui le aree delle due superfici coincidono.
 (Nota, probabilmente ho scambiato le notazioni per h_2 e h_1 ,
 rispetto al testo, ma non cambia nulla!) $\square$