

SOLUZIONE PRIMO APPELLO / SECONDO COMPITINO

1

Es. 1 Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

- a) Determinare e^{At} , matrice esponenziale del sistema $X' = AX$
b) Risolvere il sistema con $X(0) = (1, 2)$.

Soluzione:

a) Calcoliamo il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

Per cui (Hamilton-Cayley) A soddisfa a $(A - 5I)^2 = 0$

Quindi, se scriviamo $A = (A - 5I) + 5I$, si ha anche

$tA = t(A - 5I) + 5tI$; le matrici $t(A - 5I)$ e $5tI$ commutano,

per cui $e^{tA} = e^{t(A-5I) + 5tI} = e^{t(A-5I)} e^{5tI}$;

chiaramente $e^{5tI} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; per quanto riguarda

$e^{t(A-5I)}$ si ha, dalla definizione di matrice esponenziale

$$\begin{aligned} e^{t(A-5I)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t(A-5I))^k}{k!} = I + t(A-5I) + \frac{t^2(A-5I)^2}{2} + \dots \\ &= I + t(A-5I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 1+3t \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

in definitiva

$$e^{tA} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 1+3t \end{pmatrix}.$$

o) e^{At} è matrice risolvante di $X' = AX$, ed è tale che $\left[e^{A_0} = \mathbb{1} \right]^*$; la soluzione del sistema è quindi $X(t) = e^{At} C$, con $C \in \mathbb{R}^2$ da determinare. $X(0) = e^{A_0} C = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per cui

$$X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 1+3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 1-9t \\ 2+9t \end{pmatrix}$$

□

E5.2 Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = xy$ nell'insieme

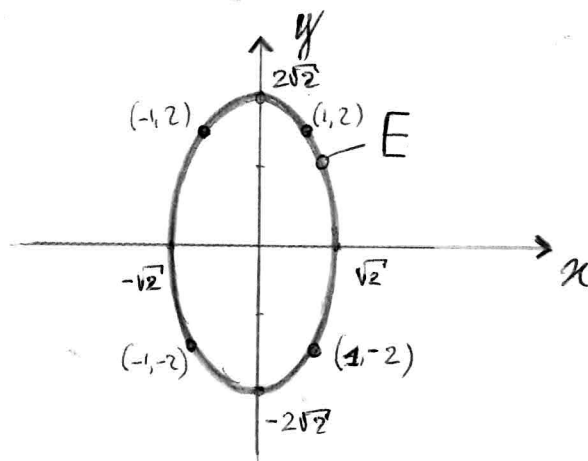
$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 8 \right\}$$

Soluzione:

E è una curva in $\mathbb{R}^2$.

In particolare, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ e

l'equazione del bordo dell'ellisse di semiasse $a = \sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$.



l'insieme E è dato dagli zeri di $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 8$.

$\nabla g = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}$, esso è nullo solo in $(0,0)$, ma $(0,0) \notin E$. Per cui

E è varietà 1-dimensionale di $\mathbb{R}^2$. I punti stazionari per f su E (tra i quali abbiamo anche il minimo e il massimo) sono quelli tali per cui ∇f e ∇g sono linearmente dipendenti, ovvero quelli tali per cui $\det(\nabla f, \nabla g) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} y & 8x \\ x & 2y \end{pmatrix} = 2y^2 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4x^2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ∇f ∇g

2

In più tali punti devono appartenere ad E , per cui $4x^2 + y^2 = 8$.

$$\begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ 8x^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

abbiamo quattro punti stazionari: $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$.

Valutiamo f in questi quattro punti:

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= 2 \\ f(1, -2) &= -2 \\ f(-1, 2) &= -2 \\ f(-1, -2) &= 2 \end{aligned}$$

Il massimo assoluto di f su E è 2, raggiunto in $(1, 2)$ e $(-1, -2)$.
 Il minimo assoluto di f su E è -2, raggiunto in $(1, -2)$ e $(-1, 2)$.

□

ES.3] Si consideri l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2x\}$.

a) S è contenuto in una superficie di cilindro, cono, paraboloide o sfera?

Determinare una parametrizzazione $q: E \rightarrow \mathbb{R}^3$ di questa superficie;

) Determinare $D \subseteq E$ la cui immagine tramite q è S ;

) Sia p la restrizione di q a D . Calcolare l'area di p . ("di S ").

) Calcolare il volume del solido la cui superficie laterale è S .

Soluzione:

) S è contenuto sulla superficie di un cilindro: infatti i punti di S soddisfanno all'equazione

$$x^2 + y^2 = 2x, \text{ cioè}$$

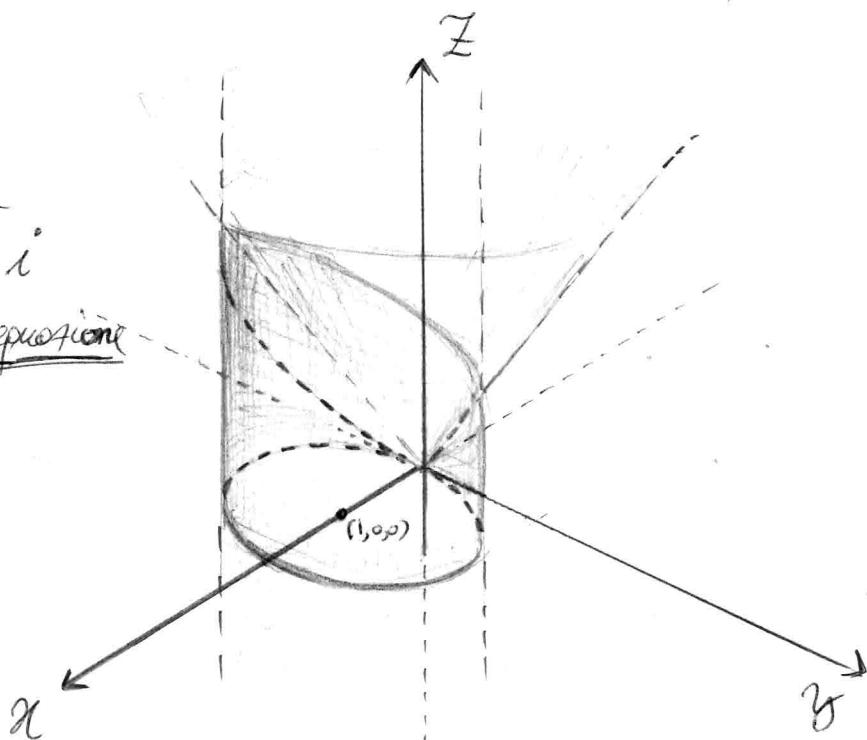
$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1, \text{ ovvero}$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$, superficie del cilindro di base il cerchio di centro $(1, 0)$ nel piano

xy e raggio 1. La disuguaglianza $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ dice quale parte della superficie cilindrica considerare: quella sopra il piano $z=0$ (piano xy) o sotto il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Quindi S giace sulla superficie del cilindro

$$\boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1.}$$



Determiniamo la parametrizzazione del cilindro.

Si come la base è il disco centrato in $(1,0)$ o raggio 1 sul piano xy , la parametrizzazione canonica è

$$q(\vartheta, z) = \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ z \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

(questo è tutto il cilindro, per tutte $z \in \mathbb{R}$):

$$E = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

b) S è la parte di cilindro che soddisfa a

$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \text{Per cui, nella parametrizzazione}$$

q del punto a), e : $(x = 1 + \cos \vartheta, y = \sin \vartheta, z = z)$

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta} = \sqrt{2(1 + \cos \vartheta)},$$

quindi il sottoinsieme $D \subseteq E$ t.c. $q(D) = S$ è

$$D = \{(\vartheta, z) \in \mathbb{R}^2 : \vartheta \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq z \leq \sqrt{2(1 + \cos \vartheta)}\}.$$

c) p $\tilde{I}$: $p(\vartheta, z) = \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ z \end{pmatrix} : \begin{matrix} \vartheta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, \sqrt{2(1 + \cos \vartheta)}] \end{matrix}$
 cioè, $(\vartheta, z) \in D$.

È una parametrizzazione della superficie S .

Calcoliamo l'area : $\int_S d\sigma_S$. L'elemento di superficie $d\sigma_S$ è $\left| \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial p}{\partial z} \right| d\vartheta dz$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \rho}{\partial z} = \text{"det"} \begin{pmatrix} e_1 & -\sin \vartheta & 0 \\ e_2 & \cos \vartheta & 0 \\ e_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1 \cos \vartheta + e_2 \sin \vartheta + e_3 \cdot 0 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

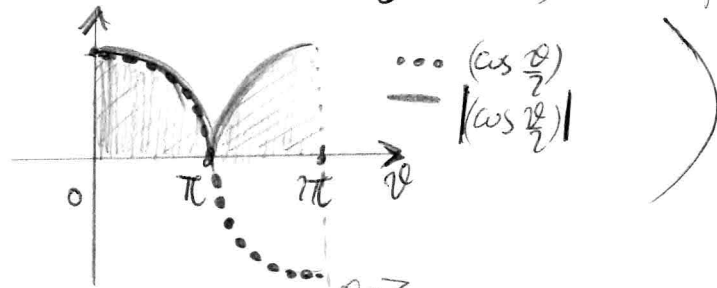
$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \rho}{\partial z} \right| = \left| \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 1; \text{ per cui:}$$

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma_S &= \int_D 1 \cdot d\vartheta dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2(1+\cos \vartheta)}} dz \right) d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos \vartheta)} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \frac{2(1+\cos \vartheta)}{2}} d\vartheta = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos \vartheta}{2}} d\vartheta. \end{aligned}$$

Ricordiamo che, essendo $\sqrt{\frac{1+\cos \vartheta}{2}} > 0$ ($\vartheta \in [0, 2\pi]$), dalle formule di bisezione, $\sqrt{\frac{1+\cos \vartheta}{2}} = \left| \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right|$ (se $\vartheta \in [\pi, 2\pi]$, $\cos(\frac{\vartheta}{2}) < 0$, serve il modulo). Per cui

$$\int_S d\sigma_S = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right| d\vartheta = 2 \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta \quad (*)$$

(infatti $\cos(\frac{\vartheta}{2}) > 0$ su $[0, \pi]$, e < 0 su $[\pi, 2\pi]$ e $|\cos(\frac{\vartheta}{2})|$ simmetrico rispetto a π : basta calcolare $\int_0^{\pi} \cos(\frac{\vartheta}{2}) d\vartheta$ e prenderne il doppio:



$$(*) = 4 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta = 4 \left(2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = 8(1-0) = 8$$

Per cui $\boxed{\text{Area}(S) = \int_S d\sigma_S = 8}$.

d) Calcoliamo il volume del solido di cui S è superficie laterale, ovvero il solido descritto da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2x\} =: G.$$

Usiamo il cambiamento di coordinate $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, $z = z$.

Lo Jacobiano della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \left| \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$= |-\rho| = \rho$. Il solido è descritto dalle seguenti disuguaglianze

• $0 \leq z \leq \rho \Leftrightarrow (x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta = \rho^2)$.

• $\rho^2 \leq 2\rho \cos \vartheta \Leftrightarrow (\rho \leq 2 \cos \vartheta)$. Da questa segue

• $0 \leq \rho \leq 2 \cos \vartheta$; e da $0 \leq 2 \cos \vartheta \Rightarrow \cos \vartheta \geq 0$,

segue $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Per cui, nelle nuove coordinate:

$0 \leq z \leq \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Il volume del solido G è

$$\int_G dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \vartheta} \left(\int_0^{\rho} \rho dz \right) d\rho d\vartheta.$$

• Calcoliamo

questo integrale.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \left(\int_0^{\rho} \rho \, d\tau \right) d\rho \right) d\vartheta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho \left(\int_0^{\rho} d\tau \right) d\rho \right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^2 d\rho \right) d\vartheta = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos\vartheta} \right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\vartheta}{3} d\vartheta = \\
&= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \cdot \cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta (1 - \sin^2\vartheta) d\vartheta = \\
&= \frac{8}{3} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta d\vartheta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin^2\vartheta d\vartheta \right) = \\
&\frac{8}{3} \left(\sin\vartheta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\sin(-\frac{\pi}{2})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} f^2 df \right) = \boxed{\begin{array}{l} \sin\vartheta = f \\ \cos\vartheta d\vartheta = df \end{array}} \\
&= \frac{8}{3} \left(2 - \int_{-1}^1 f^2 df \right) = \frac{8}{3} \left(2 - \frac{f^3}{3} \Big|_{f=-1}^{f=1} \right) = \\
&= \frac{8}{3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{32}{9}}
\end{aligned}$$

□

Siamo $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 0\}$ e
 $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

- a) Determinare il flusso di $\vec{F}$ uscente da G col T. della divergenza;
- b) Determinare il flusso di $\vec{F}$ uscente da $\partial G \cap \{z=0\}$;
- c) Determinare il flusso di $\vec{F}$ uscente da $\partial G \cap \{z < 0\}$;

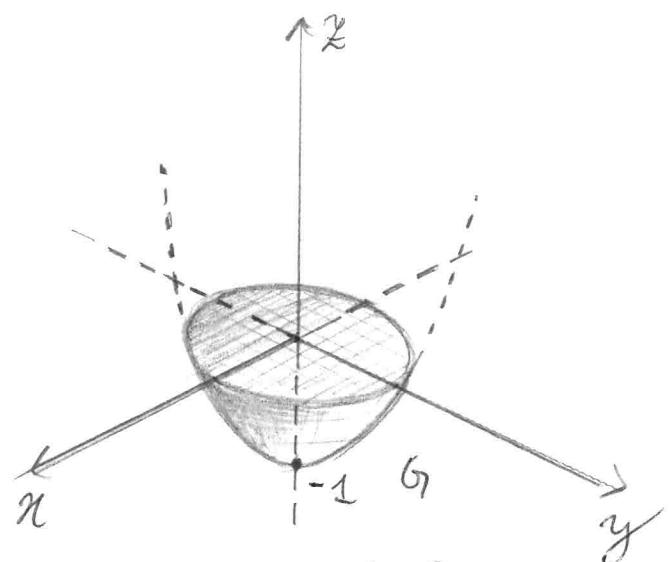
Soluzione: descriviamo il solido G . Consideriamo le
 uguaglianze nella descrizione di G . $z=0$ è il piano xy ;
 $z = x^2 + y^2 - 1$ è il paraboloide con origine l'asse z e
 vertice in -1 . L'intersezione tra il paraboloide e
 il piano xy è la circonferenza unitaria su xy :

$$\begin{cases} z=0 \\ z=x^2+y^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

a) $\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma_G = \int_G \text{div} \vec{F} dx dy dz,$

per il T. della Divergenza.

$\text{div} \vec{F} = \partial_x(x) + \partial_y(y) + \partial_z(z) = 3$; per cui il flusso
 uscente da G è $\int_G 3 dx dy dz = 3 \text{vol}(G)$.



$\text{Vol}(G) = \int_G dx dy dz$. Possiamo integrare per fili:

$$G := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 0, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{proiezione sul piano } xy}} \};$$

la proiezione sul piano xy è il disco unitario $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$;

la xy -sezione è $x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 0$; per cui

$$\int_G dx dy dz = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} \left(\int_{x^2 + y^2 - 1}^0 dz \right) dx dy =$$

$$= \int_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) dx dy \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{coord. polari:}}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) r dr \right) d\vartheta =$$

coord. polari:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \\ dx dy &= r dr d\vartheta \\ r &\in [0, 1], \vartheta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r - r^3) dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Per cui $\int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e d\sigma = 3 \text{Vol}(G) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$

b) $\partial G \cap \{z=0\}$ è il "copertello" di G , ovvero la superficie parametrizzata da $p(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : (x, y) \in D$,
 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (il disco unitario sul piano xy).

Poiché $\partial G \cap \{z=0\}$ è il "coperchio" di G , e vogliamo il
 flusso uscante, con la parametrizzazione cartesiana p ,
 il vettore ortogonale alla superficie che punta verso l'
 esterno è quello che punta "in alto", ovvero

$$\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} = \text{"det"} \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ quindi}$$

$$\int_{\partial G \cap \{z=0\}} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma_G = \int_D \vec{F}(p(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \int_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy$$

$= 0$. Per cui il flusso di $\vec{F}$ uscente da G

attraversa il "coperchio" $\partial G \cap \{z=0\}$ e $\boxed{0}$.

c) Di conseguenza, il flusso uscente del resto di ∂G ,

$\partial G \cap \{z < 0\}$ (ovvero il flusso uscente dalla superficie del
 paraboloide) è il flusso uscente da tutto G ,

cioè $\boxed{\frac{3\pi}{2}}$

$\square$

ES. 5 Sia $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$,
 $(x,y) \neq (0,0)$. Ammettiamo che $\vec{F}$ sia irrotazionale.

a) $\int_{\partial B(0,1)} \vec{F} \cdot d\vec{B}(0,1)$? ;

b) $\vec{F}$ è conservativo? Calcolarne le primitive;

c) $\gamma(t) = (2 + \sin(t), \cos^2(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calcolare
 $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$.

Soluzione:

a) $\partial B(0,1)$ è parametrizzato da $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
 (orientamento positivo).

$$\int_{\partial B(0,1)} \vec{F} \cdot d\vec{B}(0,1) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\cos^2(t) + \sin^2(t) \\ -3\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt =$$

↑
 "($\partial B(0,1)$)'

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos^2(t)\sin(t) - \sin^3(t) dt = - \int_0^{2\pi} \sin(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0.$$

b) $\vec{F}$ è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, che è un dominio semplicemente connesso privato di un punto.

7

$\vec{F}$ è irrotazionale. Esso è conservativo se e solo se la circuitazione lungo un ciclo attorno al "buco" $(0,0)$ è nulla. Calcoliamo le primitive. È conveniente

partire da $-\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. Dobbiamo trovare $U(x,y)$ tale

che $\partial_y U(x,y) = \frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$; integriamo in y (integrale indefinito);

$$\int -\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} dy \quad \left[\begin{array}{l} \text{c. variabile} \\ y^2 = t \\ 2y dy = dt \end{array} \right] \quad -\frac{3}{2} \int \frac{x}{(x^2+t)^{5/2}} dt =$$

$$= -\frac{3x}{2} \int \frac{1}{(x^2+t)^{5/2}} dt = -\frac{3x}{2} \int (x^2+t)^{-5/2} dt = -\frac{3x}{2} (x^2+t)^{-3/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$+ g(x) = \frac{x}{(x^2+t)^{3/2}} \Big|_{t=y^2}$$

$$= x(x^2+y^2)^{-3/2} + g(x) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + g(x). \text{ Dobbiamo}$$

determinare $g(x)$. Impostiamo $\partial_x U(x,y) = \frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$;

$$\partial_x \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + g(x) \right) = -\frac{3x}{2} (x^2+y^2)^{-5/2} \cdot 2x + (x^2+y^2)^{-3/2} + g'(x) =$$

$$= -\frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} + g'(x) = \frac{-3x^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + g'(x) = \frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} + g'(x)$$

Dove esse $g'(x) = 0$, per cui $g(x) = c \in \mathbb{R}$.

γ potenziale $U(x,y)$ del campo vett.

$$U(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Siccome il campo è conservativo, si ha

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = U(\gamma(\frac{\pi}{2})) - U(\gamma(0));$$

$$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (2 + \sin(\frac{\pi}{2}), \cos^2(\frac{\pi}{2})) = (3, 0)$$

$$\gamma(0) = (2 + \sin(0), \cos^2(0)) = (2, 1) \quad ; \text{ per cui}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = U(3,0) - U(2,1) = \left(\frac{3}{9}\right)^{3/2} - \frac{2}{(4+1)^{3/2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{9} - \frac{2}{5^{3/2}} \right]$$

