TEOREMA DELLA DIVERGENZA. FORMULA DI STOKES. CAMPI CONSERVATIVI

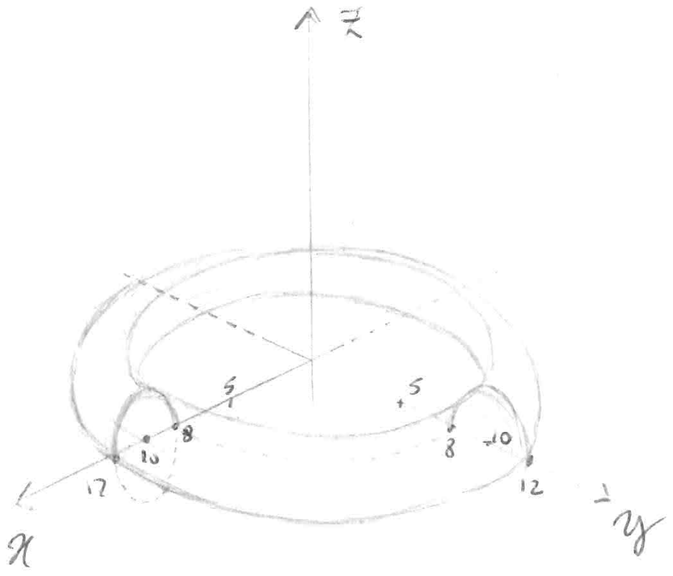
ES. 1 Sia G il solido ottenuto intersecando il semipiano $z \geq 0$ con il toro generato facendo ruotare un disco di centro $(10,0,0)$ e raggio 2 del piano xz attorno all'asse z. Indichiamo con S_1 la parte (superiore) del bordo di G contenuta nel ~~toro~~, con S_2 la parte del bordo di G contenuta nel piano $z=0$.

Sia poi $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 - \frac{y}{x^2+y^2} \,,\, x + \frac{x}{x^2+y^2} \,,\, z+y^2 \right)$.

Determinare la differenza $I_1 - I_2$ del flusso I_1 uscente da S_1 meno I_2, il flusso uscente da S_2.

(Sugg. calcolare il flusso più semplice tra I_1 e I_2 e recuperare l'altro col T. della Divergenza).

Sol:



È più semplice calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso S_2, cioè I_2.

S_2 può essere rappresentata come <u>superficie parametrica cartesiana</u>

(S_2 è semplicemente la corona circolare $64 \le x^2+y^2 \le 144$ sul piano xy, di centro $(0,0,0)$ e raggi 8 e 12).

$S_2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 64 \le x^2+y^2 \le 144\}$; S_2 è "banalmente" il grafico della funzione $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y)\equiv 0$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 64\le x^2+y^2\le 144\}$

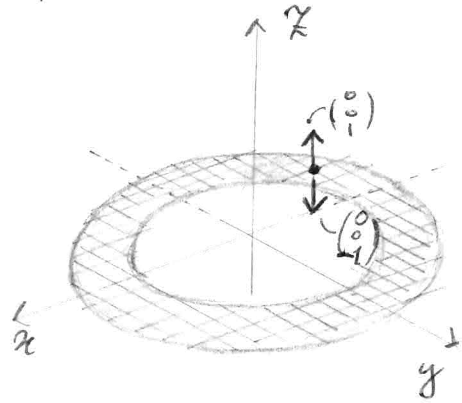
Per cui $S_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} : (x,y)\in D$. (Solitamente nella parametrizzazione di una superficie chiamiamo $\boxed{x=u,\ y=v}$). Quindi S_2 può essere parametrizzata da $\varphi(u,v)$,

$$\varphi(u,v) := \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} : (u,v)\in D := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 64\le u^2+v^2 \le 144\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0\\ e_2 & 0 & 1\\ e_3 & 0 & 0\end{pmatrix} = e_1\cdot 0 - e_2\cdot 0 + e_3\cdot 1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(si poteva vedere da subito che era questo il vettore ortogonale a S_2 che punta "in alto")

Siccome S_2 è "la base" di G e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ punta "in alto", il vettore <u>uscente</u> da G attraverso S_2 sarà <u>quello opposto</u>, cioè quello che punta "in basso", $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$



Per cui

$$I_2 = \int_{S_2} \vec{F}\cdot \vec{\nu}_e\, d\sigma = \int_{64\le u^2+v^2\le 144} \begin{pmatrix} \frac{u^2-v}{u^2+v^2} \\ u+\frac{u}{u^2+v^2} \\ 0+v^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} du\,dv =$$

$$= \int_{4\le u^2+v^2\le 1} -v^2\,du\,dv = -\int_8^{12}\left(\int_0^{2\pi} r^3\sin^2\vartheta\, d\vartheta\right)dr = -\pi\cdot\frac{r^4}{4} = -\frac{\pi}{4}\left[20736-4096\right]$$

coordinate polari: $u = r\cos\vartheta$, $v = r\sin\vartheta$

$$= \boxed{-4160\pi}$$

Questo è I_2. Calcoliamo ora il flusso uscente da tutto G. Usiamo il T. della divergenza. Chiamiamo I questo flusso:

$$I = \int_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma = \int_G \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \int_G \left(\partial_x\left(x^2 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) + \partial_y\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \partial_z\left(z + y^2\right)\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \int_G 1 + 2x \, dx\,dy\,dz = \int_G dx\,dy\,dz + 2\int_G x \, dx\,dy\,dz.$$

Siccome G è simmetrico rispetto al piano yz, che vuol dire

$$(x,y,z) \in G \Rightarrow (-x,y,z) \in G,$$ segue che

$$\int_{G\cap(x>0)} x\,dx\,dy\,dz = -\int_{G\cap(x<0)} x\,dx\,dy\,dz$$, per cui $\int_G x\,dx\,dy\,dz = 0$ (oppure si può calcolare "a mano", ma risulta più lungo!)

Quindi

$$\underline{I} = \int_G dx\,dy\,dz = \operatorname{Vol}(G).$$ G è "metà" del toro ottenuto ruotando il cerchio di centro $(10,0,0)$ e raggio 2 sul piano xz attorno l'asse z. Il volume di questo toro, per il T. di Guldino, è

$$\operatorname{Vol}(\text{Toro}) = \underbrace{2\pi}_{\text{giro di } 2\pi \text{ attorno all'asse } z} \cdot \underbrace{10}_{\text{distanza del baricentro del disco dall'asse } z} \cdot 4\pi \rightarrow \boxed{\text{area del disco di raggio 2}} = 80\pi^2.$$

distanza del baricentro del disco dall'asse z è 10: il baricentro è chiaramente $(10,0,0)$, che è il centro del disco

Quindi $\operatorname{Vol}(G) = \dfrac{\operatorname{Vol}(\text{Toro})}{2} = 40\pi^2.$

Quindi I_1, flusso uscente da S_1, è dato dalla differenza $I - I_2$, quindi $I_1 = 40\pi^2 + 4160\pi$. Infine

$$I_1 - I_2 = 40\pi^2 + 4160\pi + 4160\pi = 40\pi^2 + 8320\pi \qquad \square$$

Esercizi sul Teorema di Stokes.

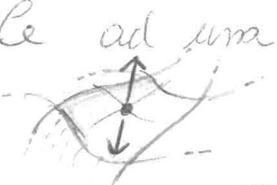
Negli esercizi che seguono useremo la seguente notazione
$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata da $p : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto regolare. ∂S è il bordo di S in $\mathbb{R}^3$ ed è dato dall'immagine di ∂D, bordo di D in $\mathbb{R}^2$, tramite p.
(a volte denoteremo ∂S come $p_{|\partial D}$).
Useremo $(u,v) \in D$ come parametri di p.

Se orientiamo ∂D, bordo di D in $\mathbb{R}^2$ con orientazione positiva rispetto a D, e lo indichiamo con $\partial^+ D$, allora definiamo $\partial^+ S$ (o $p_{|\partial^+ D}$) l'immagine del bordo $\partial^+ D$ (con questa orientazione) tramite p. In questo modo abbiamo indotto un'orientazione che diremo positiva su ∂S (e scriveremo $\partial^+ S$). Il T. di Stokes si enuncia:

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_S \, d\sigma_p ,$$

dove $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ è un campo di classe C^1,
e $\vec{\nu}_S$ è la normale alla superficie S compatibile con $\partial^+ S$.

OSS: ci sono due scelte per la normale ad una superficie, e differiscono per il segno.



La normale "compatibile" è quella per cui il T. di Stokes è valido (con l'altra, avremmo semplicemente un segno "meno" davanti a "$\int_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$").

Allora come la riconosciamo? Nel caso di superfici cartesiane, ovvero superfici S parametrizzate da $p(u,v)=\begin{pmatrix}u\\ v\\ f(u,v)\end{pmatrix}$, $(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$, la normale compatibile è quella "canonica" che punta "in alto": $\vec{\nu}_p = \dfrac{\frac{\partial p}{\partial u}\times\frac{\partial p}{\partial v}}{\left|\frac{\partial p}{\partial u}\times\frac{\partial p}{\partial v}\right|}$.

(Spesso, nel caso di superfici cartesiane, confonderemo (u,v) con (x,y), allora scriveremo $p(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}$, $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$; si vede immediatamente perché).

Per cui, in questo caso

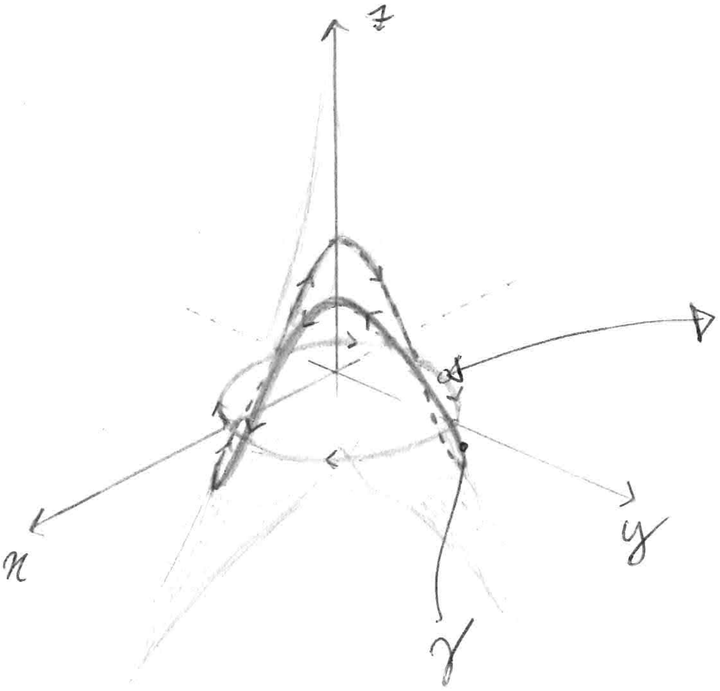
$$\int_{\partial^+S}\vec{F}\cdot d\partial^+S = \int_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}_p\,d\sigma_p \left(= \int_D \mathrm{rot}\vec{F}(p(x,y))\cdot \overbrace{\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|}}^{\vec{\nu}_p}\;\overbrace{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|dx\,dy}^{d\sigma_p}\right)$$

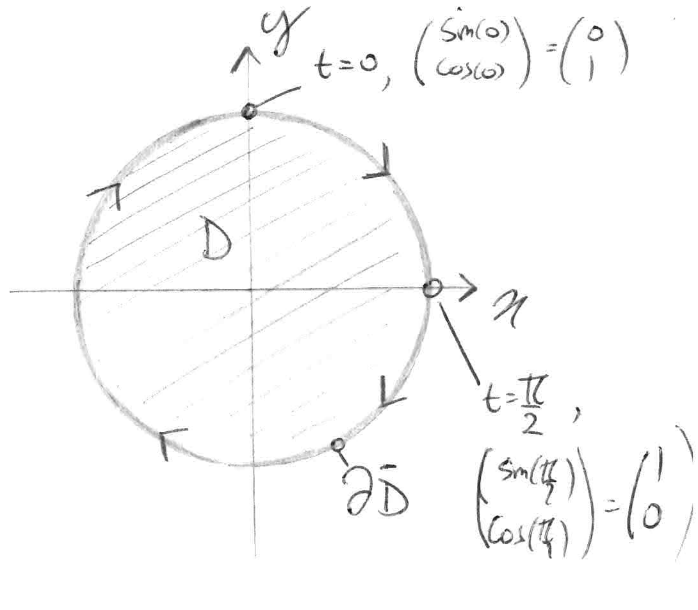
Cercare sempre, se possibile, di ricondursi a questo caso

ES. 2 Siano $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, con $t \in [0, 2\pi]$ e $\vec{F}(x,y,z) = (y + \sin x, z^2 + \cos y, x^3)$. Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ su γ (sugg: il supporto di γ è contenuto sulla sup. $z = 2xy$)

<u>Sol</u>:

$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), 2\sin(t)\cos(t))$: il supporto di γ si trova sulla superficie grafico della funzione $f(x,y) = 2xy$. In più si vede che le ascisse e le ordinate della curva descrivono il cerchio unitario. γ è quindi l'immagine tramite la funzione $p(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2xy \end{pmatrix}$ del cerchio unitario in $\mathbb{R}^2$. Per coerenza con la notazione data in precedenza, sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco unitario, ∂D il suo bordo. γ è l'immagine tramite p di ∂D. γ ci è stato già dato con una parametrizzazione. Vediamo subito che γ proviene da ∂D tramite p, dove ∂D è orientato come $(\sin(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Questa è un'orientazione negativa di ∂D rispetto a D (verificarlo)!





γ è il bordo di una superficie cartesiana S:
la superficie S è l'immagine del disco $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tramite
p: S è parametrizzata da $p(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2xy \end{pmatrix}$: $(x,y) \in D$.
E γ chiaramente ne è il bordo. Nelle nostre notazioni
abbiamo che $\gamma = \partial^- S = p_{|\partial D}$. S è <u>superficie cartesiana</u>.
Quindi Stokes si enuncia

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p \quad ;$$

Siccome $\displaystyle\int_{\partial^- S} \vec{F} \cdot d\partial^- S = -\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S$ (invertendo l'orientazione si inverte il segno dell'integrale!),

allora

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\partial^- S} \vec{F} \cdot d\partial^- S = -\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = -\int_S \mathrm{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p \quad ;$$

$\boxed{\gamma = \partial^- S}$

- $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \begin{pmatrix} e_1 & \partial_x & y + \sin x \\ e_2 & \partial_y & z^2 + \cos y \\ e_3 & \partial_z & x^3 \end{pmatrix} = (-2z, -3x^2, -1)$ (svolgere il conto)

$$\Big(e_1\big(\partial_y(x^3) - \partial_z(z^2+\cos y)\big) - e_2\big(\partial_x(x^3) - \partial_z(y+\sin x)\big) + e_3\big(\partial_x(z^2+\cos y) - \partial_y(y+\sin x)\big)\Big);$$

- $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix}$; $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}$; $\dfrac{\partial p}{\partial x} \times \dfrac{\partial p}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\int_S \mathrm{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p = \int_D \mathrm{rot}\, \vec{F}(p(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_D \begin{pmatrix} -4xy \\ -3x^2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy =$$

$\boxed{z = 2xy}$

$$= \int_D 8xy^2 + 6x^3 - 1 \, dx\,dy = 8\int_D xy^2 \, dx\,dy + 6\int_D x^3 \, dx\,dy - \int_D dx\,dy = -\int_D dx\,dy = -\pi$$

perché si vede (simmetrie) $\int_D xy^2=0$, $\int_D x^3=0$ (oppure in coord. polari)

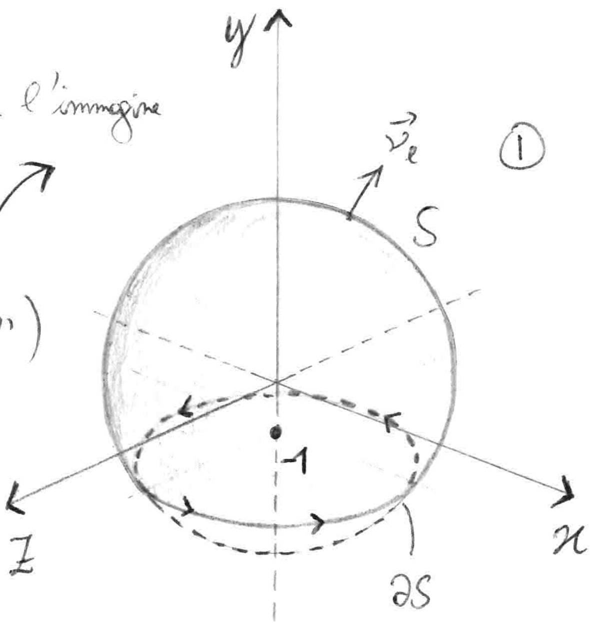
Quindi $\boxed{\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = -\int_S \text{rot}\vec{F}\cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p = \pi}$ □

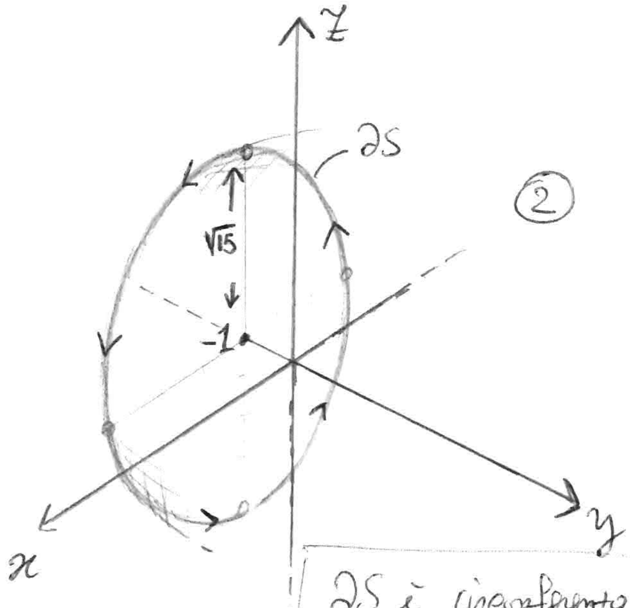
$\boxed{\text{ES. 3}}$ (Attenzione, qui non c'è una sup. cartesiana. Vedere meglio l'es. 4 se ancora non si ha confidenza con Stokes).

Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}(x,y,z)=(y^3 z, x^3 e^z, -xyz^2)$ uscente dalla porzione di sfera $\{x^2+y^2+z^2=16\}$ contenuta nel semipiano $y\geq -1$ (attenzione alle orientazioni!)

Soluzione: chiamiamo S la superficie in questione. Essa non è superficie parametrica. Cerchiamo delle analogie col caso parametrico che conosciamo. Disegnamo S (ruotiamo l'immagine per renderci meglio conto della situazione):

(ruotare l'immagine così per avere gli assi "dritti")





∂S è circonferenza parallela al piano xz, a quota $y=-1$, di raggio $\sqrt{15}$

Sfera di raggio 4 e piano $y=-1$ si intersecano in

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+z^2=15 \\ y=-1 \end{cases}$$

circonferenza parallela al piano xz e raggio $\sqrt{15}$, a quota $y=-1$. questa è ∂S

5

In questo problema ci è dato il verso della normale alla superficie attraverso cui dobbiamo calcolare il flusso del vettore. Calcolarlo direttamente come $\int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma$ è complicato. Vorremmo usare Stokes per spostare il problema al calcolo di un integrale più semplice. Osserviamo le immagini ① e ②. Si vede l'analogia col caso cartesiano: l'orientazione giusta del bordo ∂S in modo che $\vec{\nu}_e$, la normale uscente, sia compatibile nel senso di Stokes è quella che va dall'asse z $(z>0)$ all'asse $x (x>0)$ (vedere figure ① e ②) Chiameremo $\partial^+ S$ questa orientazione. Dobbiamo parametrizzare la curva $\partial^+ S$ di $\mathbb{R}^3$ in modo da orientarla come richiesto. Si vede che una parametrizzazione di $\partial^+ S$ che fa questo è

$$\partial S^+ \text{ è } \gamma(t) := \begin{pmatrix} \sqrt{15}\sin(t) \\ -1 \\ \sqrt{15}\cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$ (Verificare!) (ho chiamato $\gamma(t)$ la parametrizz. di $\partial^+ S$)

Quindi $$\boxed{\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S}$$

(*) convincersi di questo uso di Stokes. Osservare l'analogia col caso cartesiano!

- $$\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sqrt{15}\cos(t) \\ 15\sqrt{15}\sin^3(t)\, e^{\sqrt{15}\cos(t)} \\ 15\sqrt{15}\cos^2(t)\sin(t) \end{pmatrix};$$

- $$\gamma'(t) = \sqrt{15}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ -\sin(t) \end{pmatrix};$$ quindi

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F}\circ d\partial^+ s = \sqrt{15}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sqrt{15}\cos(t) \\ 15\sqrt{15}\sin^2(t)\, e^{\sqrt{15}\cos(t)} \\ 15\sqrt{15}\cos^2(t)\sin(t)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\cos(t)\\ 0\\ -\sin(t)\end{pmatrix} dt =$$

$$= \sqrt{15}\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{15}\cos^2(t) - 15\sqrt{15}\cos^2(t)\sin^2(t)\right)dt =$$

$$= 15\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2(t) - \frac{15\sin^2(2t)}{4}\right)dt =$$

$$= -15\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt - \frac{225}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt =$$

$$= -15\pi - \frac{225}{4}\pi = \boxed{-\frac{285}{4}\pi}$$

$\square$

Es. 4 | Utilizzare il Teorema di Stokes per

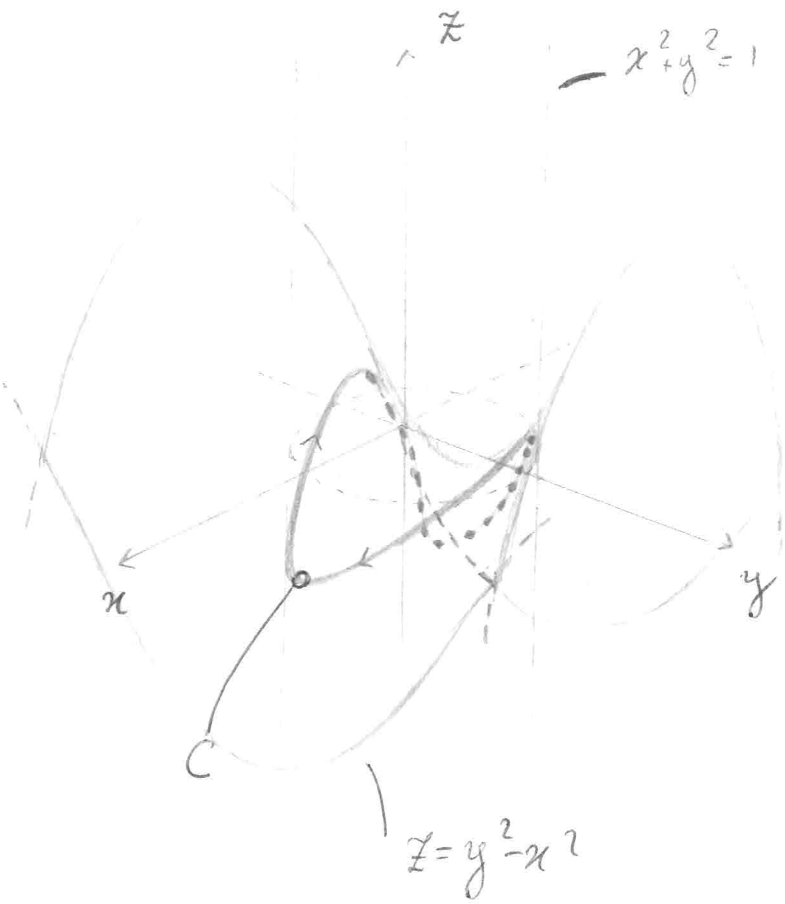
a) calcolare $\int_C \vec{F} \cdot dc$, dove $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2 y, \frac{x^3}{3}, xy\right)$ e C è la curva intersezione di $z = y^2 - x^2$ con il cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientata in senso orario se guardata dall'alto.

b) Verificare il T. di Stokes se $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x, z^2)$ e S = parte di paraboloide $z = x^2 + y^2$ che giace sotto $z = 1$, orientata "verso l'alto".

Soluzione:

a) $z = y^2 - x^2$ è un paraboloide iperbolico.

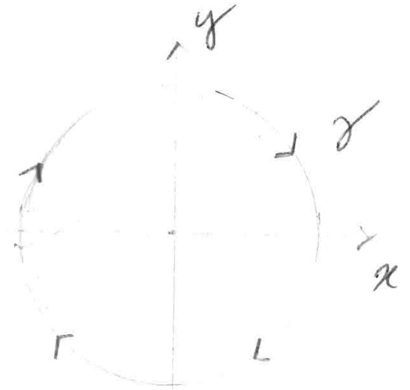
(per $x = 0$, $z = y^2$
per $y = 0$, $z = -x^2$)



Bisogna orientare C come richiesto.

C è l'immagine della circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$ in $\mathbb{R}^2$ tramite la parametrizzazione $p(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\y^2-x^2\end{pmatrix}$

L'orientazione richiesta corrisponde, sulla circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$, a quella "oraria".



Se chiamiamo γ la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ $(x^2+y^2=1)$, γ^- se la consideriamo con orientazione <u>negativa</u> rispetto al disco $x^2+y^2\leq 1$, allora

<u>C con l'orientazione richiesta è $P_{|\gamma^-}$</u>

Ora C è il bordo della superficie $S\subset\mathbb{R}^3$ data da $p(D)$, dove $D=\{(x^2+y^2)\leq 1\}$, cioè S è l'immagine tramite p del disco unitario in $\mathbb{R}^2$, o in altre parole, S è la superficie parametrizzata da

$$p(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\\y^2-x^2\end{pmatrix},\quad (x,y)\in D.$$

E C ne è il bordo.

Abbiamo riconosciuto tutti gli elementi per applicare il T. di Stokes:

$$\int_C \vec{F}\cdot dC = \int_{P_{|\gamma^-}} \vec{F}\cdot dP_{|\gamma^-} = -\int_{P_{|\gamma^+}} \vec{F}\cdot dP_{|\gamma^+} = -\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}_p\, d\sigma_p$$

abbiamo visto che $C = P_{|\gamma^-}$

per essere nelle ipotesi di Stokes cambiamo orientazione

T. Stokes

Ora, cerchiamo $\vec{\nu}_P$:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} ; \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \times \frac{\partial P}{\partial y} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -2x & 2y \end{pmatrix} = e_1(2x) - e_2(2y) + e_3 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

Cerchiamo $\operatorname{rot}\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} e_1 & \partial_x & x^2y \\ e_2 & \partial_y & x^3/3 \\ e_3 & \partial_z & xy \end{pmatrix} = e_1\left(\partial_y(xy) - \partial_z\left(\frac{x^3}{3}\right)\right) - e_2\left(\partial_x(xy) - \partial_z(x^2y)\right) + e_3\left(\partial_x\left(\frac{x^3}{3}\right) - \partial_y(x^2y)\right)$$

$$= e_1(x) - e_2(y) + e_3(x^2 - x^2) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(qui non compare z; ricordiamo però che poi in generale, quando calcoleremo il flusso del rotore attraverso una superficie cartesiana $(x, y, f(x,y))$, dovremo porre $z = f(x,y)$ se z compare nell'espressione di $\operatorname{rot}\vec{F}$)

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_P \, d\sigma_P = \int_D \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy = 2\int_D (x^2 + y^2)\, dx\,dy \underset{\uparrow}{=}$$

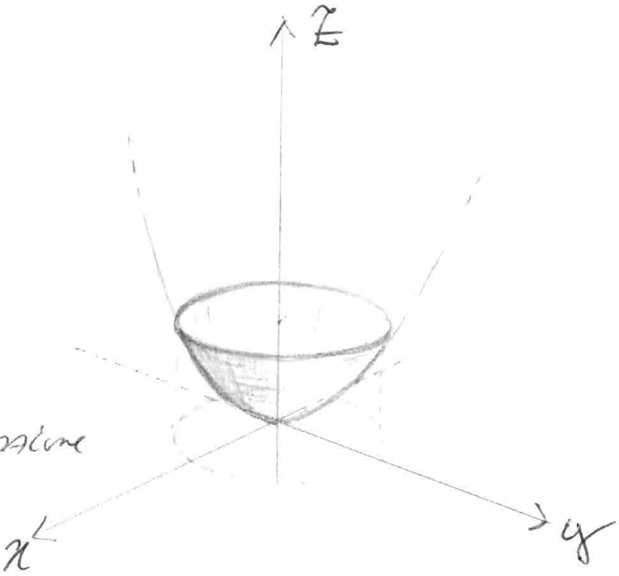
coord. polari
$x = r\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2 r\,dr\right)d\vartheta = 4\pi\int_0^1 r^3\,dr = \pi ;$$

Quindi

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot dc = -\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_P \, d\sigma_P = -\pi}$$

b)



S (che è una superficie) orientata verso l'alto significa che i vettori ortogonali uscenti dalla superficie puntano "in alto". Questo vuol dire che, data la parametrizzazione cartesiana di S, che è

$$p(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in D, \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\},$$

viene considerato il vettore normale $\vec{\nu}_p = \dfrac{\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y}}{\left|\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y}\right|}$ (quello "standard", che punta in alto). Verificare il T. di Stokes vuol dire calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S, la circuitazione di $\vec{F}$ lungo il bordo di S e controllare se coincidono.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} e_1 & \partial_x & y^2 \\ e_2 & \partial_y & x \\ e_3 & \partial_z & z^2 \end{pmatrix} = e_1\left(\partial_y(z^2) - \partial_z(x)\right) - e_2\left(\partial_x(z^2) - \partial_z y^2\right) + e_3\left(\partial_x(x) - \partial_y(y^2)\right) =$$

$$= e_1(0) - e_2(0) + e_3(1-2y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-2y \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial y} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & 2x & 2y \end{pmatrix} = e_1(-2x) - e_2(2y) + e_3(1) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p = \int_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_D 1-2y \, dx\,dy = \int_D dx\,dy = \pi$$

(per simmetria, $\int_D y \, dx\,dy = 0$, oppure fare a mano in coord. polari)

La curva C che costituisce il bordo di S è

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z=1\}$. È l'immagine tramite la parametrizzazione p del bordo di $D \subset \mathbb{R}^2$, ovvero la circonferenza unitaria (sia γ, $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$). Dobbiamo orientare C in modo opportuno per usare il T. di Stokes.

La normale $\vec{\nu}_p$ è quella che punta "in alto", per cui per rientrare nelle ipotesi di Stokes, dobbiamo considerare $p|_{\gamma^+}$, dove γ^+ è il bordo di D in $\mathbb{R}^2$ orientato positivamente rispetto a D, quindi è la circonferenza orientata in senso antiorario. γ^+ (siamo in $\mathbb{R}^2$!) è parametrizzata da $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ (param. antioraria)

Siccome $p(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ è la parametrizzazione di S, p ristretta a γ^+ è $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$; questa è una parametrizzazione di C (ora C è in $\mathbb{R}^3$! C è il bordo di S, immagine di γ^+ tramite p!) orientata positivamente (nel senso del T. di Stokes). Per cui

$$\int_{p|_{\gamma^+}} \vec{F} \cdot dp|_{\gamma^+} = \int_{\gamma^+} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin^2(t) \\ \cos(t) \\ (1) \end{pmatrix}}_{\boxed{z=1 \Rightarrow z^2=1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boxed{(p|_{\gamma^+})'}} dt = \int_0^{2\pi} -\sin^3 t + \cos^2 t \, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin t \sin^2 t \, dt + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = -\int_0^{2\pi} \sin t \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right) dt + \pi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{\sin t}{2}}_{\downarrow \, = \, 0} + \underbrace{\frac{\sin t \cos 2t}{2}}_{\downarrow \, = \, 0} \, dt + \pi = \pi$$

$$\left(\int_0^{2\pi} \sin(mt)\cos(mt)\, dt = 0\right)$$

o per parti

Per cui il T. di Stokes è valido.

$\square$

Ricordiamo che, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale, allora si dice che

- $\vec{F}$ è conservativo se esiste $u: A \to \mathbb{R}$: $\vec{F} = \nabla u$
- $\vec{F}$ è irrotazionale se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ $\forall\, i,j = 1, \dots, n$

(nel caso particolare di $\mathbb{R}^3$ questo è anche equivalente a dire $\text{rot}\, \vec{F} = 0$)

- Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è curva di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, $\alpha([a,b]) \subseteq A (\subseteq \mathbb{R}^n)$ e $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo, allora $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\alpha = u(Q) - u(P)$, dove $Q = \alpha(b)$, $P = \alpha(a)$ (punto finale e iniziale del sostegno della curva)
- $\vec{F}$ campo conservativo $\Rightarrow$ $\vec{F}$ campo irrotazionale ($\not\Leftarrow$)
- $\vec{F}$ campo irrotazionale definito su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>semplicemente connesso</u> $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ campo conservativo.
- ($\vec{F}$ IRROTAZIONALE (in $\mathbb{R}^3$) $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\, \vec{F} = 0$)
- se $u \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \text{rot}(\nabla u) = 0$ (il rotore del gradiente è nullo)
- se $\vec{F} \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = 0$ (la divergenza del rotore è nulla).

È bene tenere in mente questi fatti.

ES. 6.1

Dato il campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} L(x,y) \\ M(x,y) \end{pmatrix}$, con

$$L(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2} + 4x e^{2x^2+y^3}$$

$$M(x,y) = 2y \ln(x^2+1) + 3y^2 e^{2x^2+y^3}$$

provare che $\vec{F}$ è conservativo e calcolarne il potenziale.

Soluzione: Vediamo prima se il campo è irrotazionale

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = \frac{4xy}{1+x^2} + 12xy^2 e^{2x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{4xy}{1+x^2} + 12xy^2 e^{2x^2+y^3}, \text{ per cui } \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x},$$

quindi il campo $\vec{F}$ è irrotazionale. Poi, $\vec{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso. Per cui $\vec{F}$ è conservativo. Calcoliamo le primitive.

Se $U(x,y)$ è una primitiva, allora

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = L(x,y) = \frac{2xy^2}{1+x^2} + 4x e^{2x^2+y^3} = y^2 \frac{2x}{1+x^2} + e^{y^3} 4x e^{2x^2};$$

integriamo in x (integrale indefinito):

$$\int y^2 \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + e^{y^3} 4x e^{2x^2} \, dx =$$

$$= y^2 \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + e^{y^3} \int 4x\, e^{2x^2}\, dx = $$

($x^2 = w$ nel primo integrale $\Rightarrow 2x\,dx = dw$;
$2x^2 = v$ nel secondo integrale $\Rightarrow 4x\,dx = dv$;)

$$= y^2 \int \frac{dw}{1+w} + e^{y^3} \int e^{v}\, dv =$$

$$= y^2 \ln(1+w) + e^{y^3} e^{v} + \boxed{g(y)}$$

$$= y^2 \ln(1+x^2) + e^{y^3} e^{2x^2} + g(y)$$

l'integrale indefinito è "a meno di costanti" che aggiungiamo. abbiamo integrato in x, quindi possiamo aggiungere qualsiasi termine che è una funzione della sola $\underline{y}$! Derivando in x, scomparirà. (è "costante" in x!)

Quindi da questa prima integrazione abbiamo ricavato

$U(x,y) = y^2 \ln(1+x^2) + e^{y^3+2x^2} + g(y)$, $g(y)$ da determinare.

$g(y)$ si determina imponendo che $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = M(x,y)$,

cioè

$$\underbrace{2y \ln(1+x^2) + 3y^2 e^{y^3+2x^2} + g'(y)}_{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} = \underbrace{2y \ln(x^2+1) + 3y^2 e^{2x^2+y^3}}_{M(x,y)}$$

Notiamo che necessariamente deve essere $g'(y) = 0$, per cui $g(y) = c$, con c costante arbitraria. Per cui

$U(x,y) = y^2 \ln(1+x^2) + e^{y^3+2x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

sono tutte le primitive di $\vec{F}$

$\square$

Es. 6.4

Sia $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, dove

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y} \quad ; \quad Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2},$$

e sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$.

i) Mostrare che in A, $\vec{F}$ è conservativo. Determinarne i potenziali

ii) Calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$, dove $\gamma(t) = (t+\cos^2 t, 1+\sin^2 t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Sol:

i) $\vec{F}$ è ben definito su A ($\vec{F}$ non è continuo in $(0,0)$, e $(0,0) \notin A$), e A è semplicemente connesso. Quindi mostriamo che A è irrotazionale ($\Rightarrow$ sarà anche conservativo).

$$P(x,y) = \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2}\right)(x^2+y^2) \quad ; \quad Q(x,y) = \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2}\right)(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = (x^2+y^2)\left(-\frac{3}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2}\right)(2y) = -\frac{3x^2}{y^2} - 1 - 3 - \frac{y^2}{x^2} + 6 - \frac{2y^2}{x^2} = -3\frac{x^2}{y^2} - \frac{3y^2}{x^2} + 2$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (x^2+y^2)\left(-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) + \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2}\right)(2x) = -3 - \frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{y^2} - 1 + 6 - \frac{2x^2}{y^2} = -\frac{3x^2}{y^2} - \frac{3y^2}{x^2} + 2$$

Quindi $\vec{F}$ è irrotazionale e su A, semplicemente connesso, è conservativo.

Cerchiamo le primitive di F.

Integriamo, ad esempio, $P(x,y)$ rispetto ad x (integrale indefinito) (difatti, se $U(x,y)$ è primitiva, allora $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$) $U(x,y) =$

$$= \int P(x,y)\,dx = \int \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2}\right)(x^2+y^2)\,dx = \int \left(\frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + g(y)$$; troviamo $g(y)$ derivando rispetto ad y: dovrà essere $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$;

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + g'(y) = \underbrace{\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2}\right)(x^2+y^2)}_{\overset{\shortparallel}{Q(x,y)}} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x}$$

e quindi necessariamente $g'(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (costante).

I potenziali $U(x,y)$ di $\vec{F}$ sono della forma

$$U(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ii) siccome $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t + \cos^2 t \\ 1 + \sin^2 t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi/2]$, i punti iniziale e finale (quindi per $t=0$ e $t = \pi/2$) saranno

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\gamma(\pi/2) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 2 \end{pmatrix}$; per cui, siccome il campo è conservativo

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = U(\gamma(\pi/2)) - U(\gamma(0)) = U\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) - U(1,1) = \boxed{\frac{\pi^3}{16} + 2\pi + \frac{16}{\pi} - 4}$$

$\square$

Es. 6.7 Dato il campo vettoriale $\vec{F}$ definito su

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1, y < 1\}$ dalla formula

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1+x}{1-y}, \frac{1+y}{1-x}\right). \quad \left(=: (F_1(x,y), F_2(x,y))\right)$$

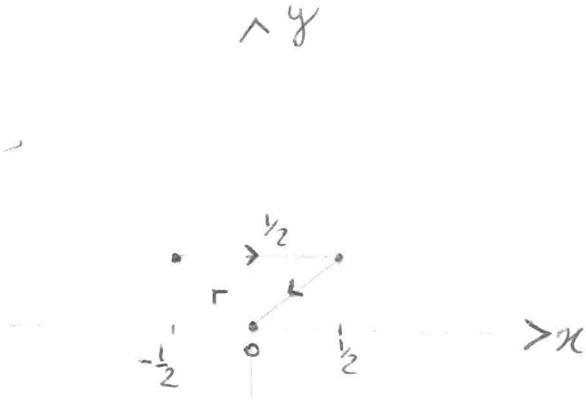
Si dica se esso è irrotazionale e se esso è conservativo, calcolandone in caso affermativo i potenziali.
Infine si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot dr$, dove γ è la poligonale chiusa di vertici $(0,0)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(0,0)$.

Sol.

A è semplicemente connesso. Vediamo se $\vec{F}$ è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{(1+x)}{(1-y)^2} \; ; \; \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1+y}{(1-x)^2}$$; il campo non è irrotazionale. Per cui non è neppure conservativo (se lo fosse, dovrebbe essere necessariamente irrotazionale).

Sia γ la poligonale chiusa $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$,
dove γ_1 è il segmento da $(0,0)$ a $(-1/2, 1/2)$,
γ_2 " " " " $(-1/2, 1/2)$ a $(1/2, 1/2)$,
γ_3 " " " " $(1/2, 1/2)$ a $(0,0)$.



- $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ param. di γ_1
- $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t - 1/2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ param. di γ_2
- $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1/2 - t/2 \\ 1/2 - t/2 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ param. di γ_3, con l'orientazione in figura

Allora

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\gamma_2 + \int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\gamma_3 \,;$$

$$\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\gamma_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{t}{2}}{1-t/2} \\ \frac{1+t/2}{1+t/2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\,dt = 0 \,;$$

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\gamma_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}+t}{1/2} \\ \frac{1+1/2}{3/2-t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1+t)\,dt = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \,;$$

$$\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\gamma_3 = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{\frac{3}{2}-\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{t}{2}} \\ \frac{\frac{3}{2}-t/2}{\frac{1}{2}+\frac{t}{2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \frac{t-3}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t+1}{t+1} - \frac{4}{t+1}\,dt$$

$$= \int_0^1 dt - 4\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = 1 - 4\ln(t+1)\Big|_0^1 = 1 - 4\ln(2) \,; \text{ quindi}$$

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma = \frac{5}{2} - 4\ln(2)}$$

(se fosse ~~stato~~ conservativo, essendo un circuito chiuso, il risultato sarebbe dovuto essere 0)

$\square$

ES. 6.5 Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dato da $\vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z), x^2+2yz, y^2-z^2)$, dove $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

i) Mostrare che esistono funzioni $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ che rendono conservativo $\vec{F}$; trovarle tutte.

ii) Mostrare che ne esiste una sola tale che è identicamente nulla sull'asse x. Determinarla.

iii) Determinare i potenziali del campo con X come al punto ii).

Sol: Siccome $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, e anche le altre due componenti del campo $\vec{F}$ sono $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$, il campo è definito su tutto $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso. Quindi per far sì che $\vec{F}$ sia conservativo, è sufficiente trovare quelle X per cui sia irrotazionale. Deve essere:

$$\frac{\partial(x^2+2yz)}{\partial z} = \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+2yz)}{\partial x}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial x} \quad (*)$$

Verifichiamo innanzitutto la prima:

$$\frac{\partial(x^2+2yz)}{\partial z} = 2y; \quad \frac{\partial(y^2-z^2)}{\partial y} = 2y$$, quindi questa è verificata.

Consideriamo le rimanenti uguaglianze in $\circledast$.

$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial (y^2 - z^2)}{\partial x} = 0$; Quindi X non dipende da z

$X = X(x,y)$. Poi, da $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 + 2yz)}{\partial x} = 2x$

segue che $\frac{\partial X}{\partial y} = 2x$, per cui (integrando) $X(x,y) = 2xy + g(x)$

con $g(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$, che dipende solo da x.

Quindi $\boxed{X(x,y,z) = 2xy + g(x) \quad , \quad g(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$.

Queste sono tutte le X che rendono $\vec{F}$ conservativo.

ii) L'asse x ha equazioni $\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$; quindi noi vogliamo che $X(x,0,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, cioè $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. questo fissa la funzione g nella scelta di X: la X che è identicamente nulla sull'asse x è $X(x,y,z) = 2xy$ (viene ricavata da $g \equiv 0$).

iii) Cerchiamo i potenziali di $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 - z^2)$

Cerchiamo $U(x,y,z)$ tale che $\nabla U = \vec{F}$; iniziamo ad esempio da

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = 2xy \text{ ; integrando si ha } U(x,y,z) = x^2 y + \boxed{\varphi(y,z)}$$

in questo caso, $\mathbb{R}^3$, abbiamo un termine "costante in x" che può dipendere da y e z

Ora, $\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + 2yz$, quindi

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 y + \varphi(y,z))}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} \text{ e}$$

deve essere $x^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = x^2 + 2yz$; quindi $\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 2yz$.

Integriamo in y : $\varphi(y,z) = y^2 z + \psi(z)$; quindi l'espressione per U diventa

$U(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + \psi(z)$. Ora, $\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = y^2 - z^2$

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = y^2 + \psi'(z) = y^2 - z^2 \text{ , per cui}$$

$\psi'(z) = -z^2$; integrando si ha $\psi(z) = -\frac{z^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

In definitiva quindi, le primitive di $\vec{F}$ (con $X = 2xy$) sono date da

$$\boxed{U(x,y,z) = x^2 y + y^2 z - \frac{z^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$\square$

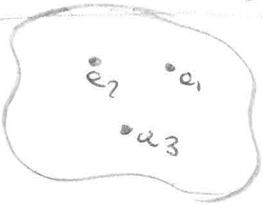
ES. 6.6 (Campi irrotazionali su domini bucati)

Trovare numeri reali a, b tali che il campo vettoriale $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y^2 + 2xy + ax^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

sia conservativo. Trovare poi i potenziali del campo così ottenuto.

Soluzione: Ricordiamo che se $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^2$ è irrotazionale, e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto tale che $A = \Omega \setminus (\{a_1, \dots, a_m\})$ (m punti), dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso,



e allora $\vec{F}$ è conservativo se e solo se scelti dei cerchi $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ attorno ad $a_1, \dots, a_m$ contenuti in A (raggio qualsiasi, basta che stiano in A) si ha $\int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\gamma_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m$

Nel nostro caso $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, siamo nella situazione appena descritta.

Vediamo innanzitutto per quali $a, b \in \mathbb{R}$, $\vec{F}$ è irrotazionale

$$\underbrace{\frac{\partial \left(\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2} \right)}{\partial y}}_{①} = \underbrace{\frac{\partial \left(-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} \right)}{\partial x}}_{②} \quad ; \text{ si ha}$$

$$① = \frac{(x^2+y^2)^2(2y+2x) - (y^2+2xy+ax^2) \cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} \quad ;$$

$$② = \frac{(x^2+y^2)^2(-2x-2y) + (x^2+2xy+by^2) \cdot 4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} \quad ;$$

Essi sono uguali se i numeratori sono uguali, cioè

$$(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)(2x+2y)-4y(y^2+2xy+ax^2)\right] =$$
$$(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)(-2x-2y)+4x(x^2+2xy+by^2)\right] \iff$$

$$2x^3+2xy^2+2yx^2+2y^3-4y^3-8xy^2-4ayx^2=$$
$$=-2x^3-2xy^2-2y^3-2y^2x+4x^3+8x^2y+4bxy^2 \iff$$

$$-6xy^2+2yx^2-4ayx^2 - 6x^2y+2y^2x-4bxy^2=0$$
$$\boxed{-4xy^2(1+b)-4yx^2(1+a)=0}$$; questo capita

se e solo se $a=b=-1$. In questo caso

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$; per altri valori

di $a,b\in\mathbb{R}$, $\vec{F}$ non è irrotazionale, per cui non può essere conservativo. $\boxed{\vec{F} \text{ è irrotazionale se } a=b=-1}$

È anche conservativo per questi valori di a,b?

Lo è se $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma=0$, dove γ è un cerchio di centro $(0,0)$ e raggio qualsiasi (basta che stia in $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$). Scegliamo il cerchio unitario.

$$\gamma(\vartheta)=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}, \quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

$$\vec{F}(\gamma(\vartheta))=\left(\frac{\sin^2\vartheta+2\cos\vartheta\sin\vartheta-\cos^2\vartheta}{1}, -\frac{(\cos^2\vartheta+2\sin\vartheta\cos\vartheta-\sin^2\vartheta)}{1}\right)$$

$$\overset{!}{=}\left(\sin(2\vartheta)-\cos(2\vartheta), -\sin(2\vartheta)-\cos(2\vartheta)\right), \quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

$$\gamma'(\vartheta)=\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix};$$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma=\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin(2\vartheta)-\cos(2\vartheta)\\ -\sin(2\vartheta)-\cos(2\vartheta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}d\vartheta =$$

$$=\int_0^{2\pi}-\sin(2\vartheta)\sin\vartheta+\cos(2\vartheta)\sin\vartheta-\sin(2\vartheta)\cos(\vartheta)-\cos(2\vartheta)\cos\vartheta \; d\vartheta=0$$

Si può provare per parti o ricordando che $\int_0^{2\pi}\sin(m\vartheta)\cos(n\vartheta)=0 \;\; \underline{\forall n,m}$,

$$\int_0^{2\pi}\sin(m\vartheta)\sin(n\vartheta)=0 \;\; \underline{\forall n\neq m}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(m\vartheta)\cos(n\vartheta)=0 \;\; \underline{\forall n\neq m}$$

Per cui, per $ab=-1$, $\vec{F}$ $\underline{\text{è conservativo}}$.

Cerchiamone ora i potenziali

$$\vec{F} = \left(\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}, - \frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right);$$ cerchiamo $U(x,y)$

tale che $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\int \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} dx + y \int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} dx + y\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \int \left(\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx + \varphi(y) =$$

$$= 2\int \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} - \int \frac{dx}{(x^2+y^2)} + \varphi(y) =$$

$$= 2y^2 \int \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y}{x^2+y^2} - \int \frac{dx}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$= \int \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{(x^2+y^2)} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

$$= \int \frac{2y^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) = \int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

$$= \int \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \int \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+y^2} dx - \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

lo svolgiamo per parti: $\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$ si integra con $-\frac{1}{x^2+y^2}$

$$= \int \frac{1}{x^2+y^2} dx - \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + \int \frac{1}{x^2+y^2} dx \right) - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

$$= \int \frac{1}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} - \int \frac{1}{x^2+y^2} dx - \frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y) =$$

$$= \frac{x-y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$$

Quindi $U(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$; deve poi

essere $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \dfrac{-(x^2+2xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, quindi

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{-(x^2+y)-(x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) =$$

$$\overset{!}{=} \frac{-x^2-y-2xy+2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(y),$$

da cui $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$. In definitiva

$$\boxed{U(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.}$$

$\square$

RIEPILOGO DI INTEGRALI (come calcolarli)

1) Integrale di linea di una funzione scalare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lungo una curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ (solitamente $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), parametrizzata da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_\gamma f\,ds} = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \quad , \text{ dove}$$

$\uparrow$

notazione

- $f = f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$;
- $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$, $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}$;

2) Integrale di una funzione scalare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ su una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$. S è parametrizzata da $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$;

$$\boxed{\int_S f\,d\sigma} = \int_D f(\varphi(u,v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du\,dv$$

$\uparrow$

notazione

- $f(\varphi(u,v)) = f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$ $\quad (f = f(x,y,z))$;
- $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|$ è $\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)}$,

la radice quadrata della somma dei quadrati dei minori di ordine due della matrice Jacobiana della parametrizzazione φ (oppure anche il modulo del vettore ortogonale a S, $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}$).

3) Integrale di linea di un campo vettoriale $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ lungo la curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$

parametrizzata da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$ $t \in [a,b]$;

$$\underbrace{\boxed{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma}}_{\text{notazione}} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \,,$$

dove $\cdot$ sta per il prodotto scalare standard,

- $\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \\ F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \\ F_3(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) \end{pmatrix}$; $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix}$

a rigore sarebbe $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{\tau}_\gamma\, ds$, $\vec{\tau}_\gamma$ il vettore unitario tangente a γ, che è $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$; quindi è

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}}_{\vec{\tau}_\gamma} \underbrace{|\gamma'(t)|dt}_{ds} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

4) Flusso di un campo vettoriale $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$. S è parametrizzata da $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{\nu}_\varphi\, d\sigma = \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du dv$$

$\vec{\nu}_\varphi$ è la normale alla superficie, la cui orientazione però dipende fortemente dalla parametrizzazione scelta. Le linee guida sono le seguenti: se ci viene data una superficie parametrica generica $\varphi(u,v)$ con $(u,v) \in D$, si intende per $\nu_\varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

e l'integrale che viene richiesto è "implicitamente" $\int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du\,dv$

(prima $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, poi $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$).

Negli esercizi dove ci viene chiesto un flusso uscente da una superficie (o entrante, comunque, con un verso che è specificato) bisogna riconoscere la parametrizzazione che ci fornisce la normale giusta. Ricordiamo i casi:

- Sup. cartesiana $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in D$;

  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ è vettore ortogonale che punta "in alto" (quindi col "$-$" se ci serve in basso);

- cilindro $\varphi(\vartheta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ z \end{pmatrix}$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $z \in [a, b]$;

  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ è vettore uscente dalla superficie;

- Sfera $\varphi(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\phi \\ R\sin\vartheta\sin\phi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$

  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$ è vettore uscente dalla superficie;

(Nb. cercare di ricondursi a questi casi, altrimenti "testare" a mano in un punto la normale per vedere se è quella che ci serve)

Anche qui, a rigore, $\int_S \vec{F}\cdot \nu_\varphi \, d\sigma = \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\cancel{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| du\,dv$

$\hookrightarrow d\sigma$

$\hookrightarrow \vec{\nu}_\varphi$, la normale

$$= \int_D \vec{F}(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du\,dv$$

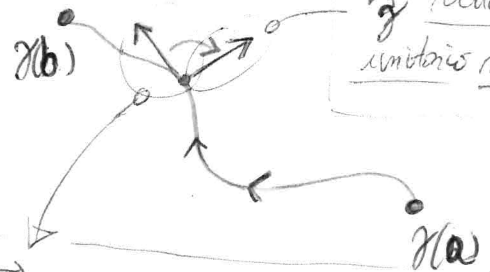
---

5) (Si vede di meno negli esercizi. E' "nascosto" nel T. di Gauss-Green) = Flusso in $\mathbb{R}^2$ =

Flusso di un campo vettoriale piano attraverso una curva (Flusso in dimensione 2)

$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, γ curva in $\mathbb{R}^2$ parametrizzata da $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$, $t\in[a,b]$;

$$\underbrace{\int_\gamma \vec{F}\cdot \vec{\nu}_\gamma \, ds}_{\text{notazione}} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix} dt$$



$\vec{\nu}_\gamma$ vettore unitario normale

$\vec{\tau}_\gamma$ vettore unitario tangente: $\vec{\tau}_\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}}\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix}$

Data una curva γ in $\mathbb{R}^2$, ci sono due scelte per il vettore normale $\vec{\nu}_\gamma$: o $\dfrac{1}{|\gamma'(t)|}\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}$ o $\dfrac{1}{|\gamma'(t)|}\begin{pmatrix}-\gamma_2'(t)\\ \gamma_1'(t)\end{pmatrix}$.

<u>La scelta canonica</u> è $\boxed{\vec{\nu}_\gamma := \dfrac{1}{|\gamma'(t)|}\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}}$

(Per ricordarlo consideriamo il vettore tangente $\vec{\tau}_\gamma = \dfrac{1}{|\gamma'(t)|}\begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \gamma_2'(t)\end{pmatrix}$, che è quello che "punta" nella direzione della curva da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, e lo ruotiamo di $90°$ in senso orario: quello ottenuto sarà $\vec{\nu}_\gamma$)

Si riconosce l'analogia col flusso di un campo attraverso una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Da questo punto ricaviamo la notazione:

$\int_\gamma f\,dx$ e $\int_\gamma f\,dy$, dove $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è una funzione scalare

$f=f(x,y)$. γ è la curva parametrizzata da $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$, $t\in[a,b]$.

$$\boxed{\begin{aligned}\int_\gamma f\,dx &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)\,dt\,;\\ \int_\gamma f\,dy &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\,dt\,;\end{aligned}}$$ (☆)

Si tratta in pratica (ma è nascosto) del flusso di un certo campo attraverso γ:

- $\int_\gamma f\,dx = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + 0\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_a^b \begin{pmatrix}0\\ -f(\gamma(t))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}dt$

  è il flusso del campo $\begin{pmatrix}0\\ -f(x,y)\end{pmatrix}$ attraverso γ;

- $\int_\gamma f\,dy = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) + 0\cdot\gamma_1'(t)\,dt = \int_a^b \begin{pmatrix}f(\gamma(t))\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_2'(t)\\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}dt$

  è il flusso del campo $\begin{pmatrix}f(x,y)\\ 0\end{pmatrix}$ attraverso γ;

- Riconoscere cos'è $\int_\gamma f_1\,dx + f_2\,dy$ (il flusso di un quale campo attraverso γ)

È importante ricordare la notazione (☆).

TEOREMI

1) **Teorema della Divergenza** ($\mathbb{R}^3$)

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto Stokiano, $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo di classe C^1 (su un aperto contenente $\overline{G}$: deve essere C^1 sulla chiusura di G!)

Allora

$$\underbrace{\int_G \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}_{\text{integrale pieno su } G} = \underbrace{\int_{\partial G} \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma_G}_{\text{flusso di } \vec{F} \text{ uscente da } G}$$

integrale pieno su G

flusso di $\vec{F}$ uscente da G: qui bisogna riconoscere la normale esterna

2) **Teorema di Gauss-Green** ($\mathbb{R}^2$)

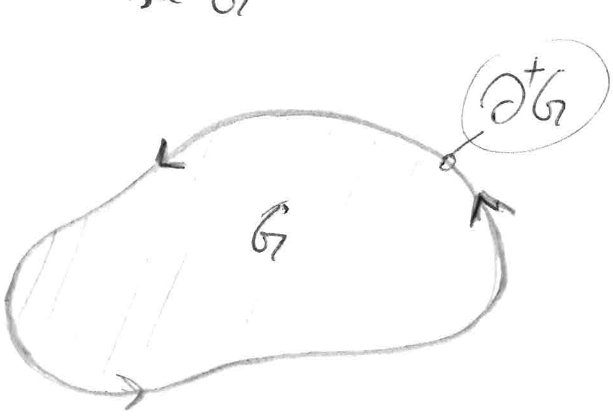
Sia $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$ campo di classe C^1 (su un aperto contenente $\overline{G}$) e $G \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto Stokiano, allora si ha

$$\underbrace{\int_{\partial^+ G} F_1\, dx + F_2\, dy}_{\text{integrale sul bordo di } G} = \underbrace{\iint_G \left(\partial_x F_2 - \partial_y F_1 \right) dx\, dy}_{\text{integrale pieno su } G}$$

integrale sul bordo di G, che è un' unione di curve orientato positivamente rispetto a G!!

integrale pieno su G

∂G è orientato positivamente se percorrendo ∂G nel senso crescente del parametro, G è "sulla sinistra"



3) $\boxed{\text{Teorema di Stokes}}$ (generalizzazione di Green a $\mathbb{R}^3$)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto stokiano (quindi D è in $\mathbb{R}^2$), sia $p : D \to \mathbb{R}^3$ superficie parametrica ($S = p(D)$); sia S la superficie.

Il bordo della superficie S è dato dall'immagine mediante p del bordo di D: lo indichiamo $p_{|\partial^+ D}$: partiamo da un'orientazione di ∂D positiva rispetto a D (siamo in $\mathbb{R}^2$ e sappiamo cosa significa) e consideriamo l'immagine di $\partial^+ D$ tramite p; allora abbiamo dato al bordo della superficie S un'orientazione, che diremo positiva. (lo indichiamo $\partial^+ S$ o $p_{|\partial^+ D}$)

Allora

$$\underbrace{\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S}_{\text{integrale di linea di un campo, vedi 3)}} = \underbrace{\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_S \, d\sigma}_{\text{flusso di un campo } (\operatorname{rot}\vec{F}) \text{ attraverso una superficie parametrica}}$$

$\vec{\nu}_S \to$ normale alla superficie. Quale delle due? !!

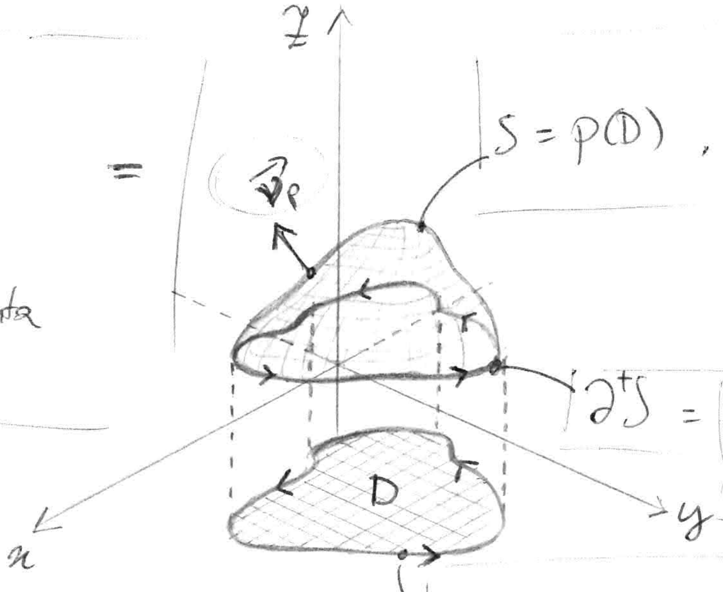
Bisogna chiarire meglio al secondo membro quale è il verso giusto di $\vec{\nu}_S$. Se si tratta di $\boxed{\text{superficie cartesiana}}$ è quello che punta in alto. Facciamo sempre riferimento a questo caso per visualizzare la situazione. $p = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$, $\vec{\nu}_p = \dfrac{\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}}{\left|\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial u}\right|}$, $\leftarrow$ questa sarà la $\vec{\nu}_S$ che usiamo nella F. di Stokes

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_p \, d\sigma_p = \int_D \operatorname{rot}\vec{F}(p(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}}{\left|\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}\right| du\, dv}\,,$$

vediamolo con un'immagine:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}}{\left|\frac{\partial p}{\partial x}\times\frac{\partial p}{\partial y}\right|} = \vec{\nu}_p$$

normale che punta "in alto"



$S = p(D)$, $p(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$

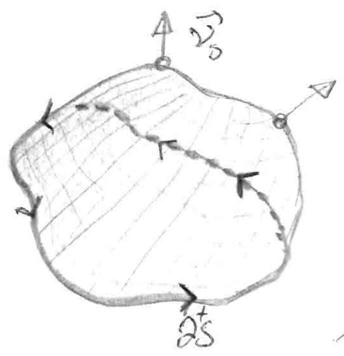
(spesso confondiamo (x,y) con (u,v) nelle parametrizzazioni cartesiane)

$\partial^+ S$ = ∂S orientato positivamente: proviene da $\partial^+ D$ tramite p

$\partial^+ D$ (orientazione positiva di ∂D in $\mathbb{R}^2$)

Il Teorema è valido con questa orientazione di $\partial^+ S$ e con questa normale $\vec{\nu}_p$.

In generale (molto "naif" e "intuitivo") se non abbiamo una superficie cartesiana, ma una parametrizzazione diversa, come scegliere i "versi giusti" per poter scrivere il Teorema? (d'altronde, sbagliare i versi della normale e del bordo risulta in un segno "−" nella formula di Stokes: si tratta di una convenzione che però deve essere fissata!).



Cercare di rappresentare la superficie e il bordo; in seguito bisogna cercare l'analoga situazione di una superficie cartesiana. Ad esempio, in questa immagine, ad un'orientazione (che ho chiamato $\partial^+ S$ per analogia) di ∂S come quella in figura, "corrisponde" una normale $\vec{\nu}_S$ che "punta" come rappresentato in figura (regola della mano destra!):

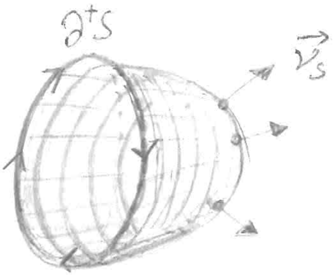
il Teorema si enuncia:

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = \int_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_S \, d\sigma_S \; ;$$

(Dovremo poi scrivere noi le parametrizzazioni corrispondenti a $\partial^+ S$ e $\vec{\nu}_S$ come in figura).

Altri esempi (grafici, "intuitivi")

a)

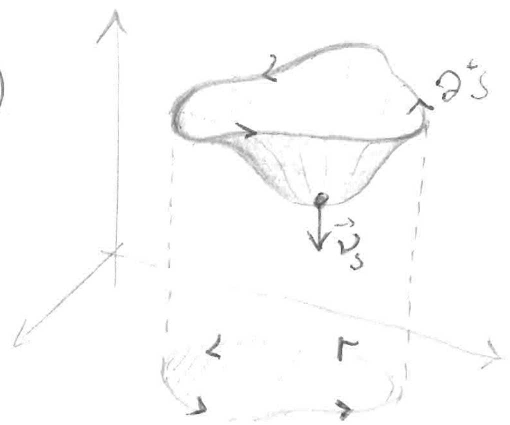


Consideriamo questa superficie S. Orientiamo ∂S come in figura (e chiamiamolo, in analogia col caso cartesiano, $\partial^+ S$). E consideriamo la normale $\vec{\nu}_S$ in figura. Allora

$$\boxed{\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = \int_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_S \, d\sigma_S}$$

("ruotare" l'immagine e rendersi conto che sono le orientazioni giuste)

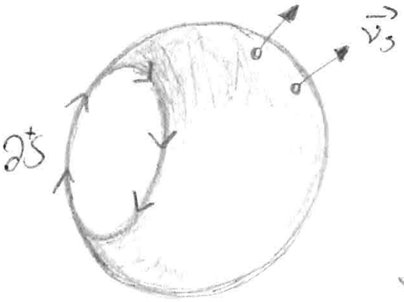
b)



Questa è una superficie cartesiana, ma, ad esempio, ci viene data la normale $\vec{\nu}_S$ in figura e l'orientazione $\partial^+ S$ in figura. Noi sappiamo che $\partial^+ S$ è l'orientazione positiva (siamo nel caso di sup. cartesiana, sappiamo bene cosa significa), e sappiamo che Stokes vale con la normale "canonica" $\vec{\nu}_p$, quella che punta in alto, cioè $-\vec{\nu}_S$! Quindi

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = -\int_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{\nu}_S \, d\sigma_S$$

(caso in cui abbiamo la normale e l'orientazione del bordo "non compatibili": c'è un segno "$-$" nel Teorema).



Si vede ("analogia" col caso cartesiano) che $\partial^+ S$ e $\vec{\nu}_S$ in figura sono "compatibili"

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\partial^+ S = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \circ \vec{\nu}_S \, d\sigma_S$$

("ruotare l'immagine, etc.")
"regola della mano destra"

Quindi come regola "generale" tenere sempre a mente il caso cartesiano (figura (C)) e tentare nei casi diversi da questo di ricondursi, se possibile!