Università degli Studi di Padova

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Sulla dipendenza dello spettro di una membrana vibrante dalla densità di massa

Candidato:
Luigi Provenzano

Relatore:
Pier Domenico Lamberti

Anno Accademico 2009-2010

INDICE

1. INTRODUZIONE

Ci si propone di studiare il problema della dipendenza degli autovalori di una membrana vibrante N-dimensionale dalla variazione della densità di massa. La membrana sarà rappresentata da un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^N$ di misura finita, e non si farà alcuna assunzione di regolarità per il bordo $\partial\Omega$. La densità di massa sarà rappresentata da una funzione $\rho \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\operatorname{ess\,inf}_\Omega \rho > 0$. Si noti che la massa totale della membrana è data da

$$M = \int_\Omega \rho \, dx \, .$$

La ben nota equazione della membrana vibrante N-dimensionale con densità ρ, discussa ad esempio in [3, Sect. V], è

$$\Delta v(x,t) = \rho(x) v_{tt}(x,t) \, , \quad x \in \Omega \, , \; t \geq 0 \, . \tag{1.0.1}$$

Lo studio dell'equazione (1.0.1) mediante il metodo della separazione delle variabili conduce al seguente problema agli autovalori

$$\Delta u(x) + \lambda \rho(x) u(x) = 0 \, , \quad x \in \Omega \, . \tag{1.0.2}$$

Se la membrana è tenuta fissa al bordo, l'equazione (1.0.1) è soggetta alla condizione $v(x,t) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$, $t \geq 0$. In questo caso l'equazione (1.0.2) è soggetta alla condizione al contorno di Dirichlet $u(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

È ben noto che sotto tali condizioni al contorno, il problema (1.0.2) possiede una successione crescente di autovalori

$$0 < \lambda_1[\rho] < \lambda_2[\rho] \leq \cdots \leq \lambda_j[\rho] \leq \cdots$$

che dipendono dalla densità ρ, ed ognuno ha molteplicità finita.

Ha interesse capire se è possibile massimizzare o minimizzare gli autovalori $\lambda_j[\rho]$ al variare di ρ assumendo soltanto che $M[\rho]$ sia fissata, si veda ad [4, 5, 10]. Al fine di garantire l'esistenza di soluzioni per questo problema, è necessario restringere la classe delle densità ammissibili a quelle che soddisfano ad una condizione del tipo

$$\alpha \leq \rho \leq \beta \, , \tag{1.0.3}$$

dove α e β sono costanti positive fissate. Nel caso $N = 1$ questo problema è stato risolto in [12], ove si è mostrato in particolare che i massimi e i minimi devono soddisfare la condizione

$$(\rho(x) - \alpha)(\rho(x) - \beta) = 0 \, , \quad \text{q.o. in } \Omega \, . \tag{1.0.4}$$

Da ciò segue che se ρ è un punto di massimo o di minimo, deve appartenere alla frontiera del sottoinsieme di $L^\infty(\Omega)$ definito dalla condizione (1.0.3). Inoltre in [4, 5] è provato che i punti di massimo e di minimo per l'autovalore $\lambda_1[\rho]$, sotto la condizione (1.0.3) devono soddisfare la condizione (1.0.4).

In questa tesi discuteremo l'approccio proposto in [13]. In particolare non verrà imposta la restrizione (1.0.3) su $\rho \in L^\infty(\Omega)$, e si tratterà il problema dell'esistenza di punti di massimo o di minimo locali per gli autovalori sotto la sola assunzione che $M[\rho]$ sia costante.

È ben noto che dalla connessione di Ω segue che il primo autovalore è semplice. In generale ciò non è vero per gli altri autovalori, la cui molteplicità è finita ma non necessariamente uguale a uno. Quindi si dovranno considerare autovalori multipli, e poichè la molteplicità di un autovalore può cambiare al variare dei parametri da cui l'autovalore dipende, non ci si potrà aspettare che gli autovalori siano funzioni differenziabili di ρ. Come indicato in [13], il modo più naturale di procedere in questo caso è quello di considerare le funzioni simmetriche elementari degli autovalori, che dipendono analiticamente dai parametri considerati, cfr [14].

Grazie a questo risultato, in [15] si è potuto dimostrare che per il problema della membrana vibrante N-dimensionale con condizioni al contorno di Dirichlet su aperti connessi di misura finita di $\mathbb{R}^N$, le funzioni simmetriche elementari degli autovalori considerate come funzioni di Ω hanno punti critici nelle palle, sotto la sola ipotesi che il volume di Ω sia costante. È quindi naturale chiedersi se analogamente a quanto dimostrato per lo spettro membrana vibrante dipendente da Ω, le funzioni simmetriche elementari degli autovalori, considerate come funzioni di ρ dipendono analiticamente da ρ, e se esistano punti critici in $L^\infty(\Omega)$ per tali funzioni, sotto la sola ipotesi che $M[\rho]$ sia costante. Come dimostrato in [13], il risultato di dipendenza analitica continua a valere, ma non esistono densità di massa critiche per le funzioni simmetriche elementari degli autovalori, soggette alla sola condizione $M[\rho] =$ costante.

È naturale infine porre una condizione più generale della (1.0.3) che garantisca l'esistenza di soluzioni al problema. In [13] si è provato che se C è un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$, e le funzioni di cui è costituito hanno un limite inferiore uniforme positivo, allora le funzioni simmetriche elementari degli autovalori, e quindi in particolare la funzione che a $\rho \in C$ associa $\lambda_1[\rho]$, raggiungono il loro massimo ed il loro minimo sulla frontiera di C, generalizzando così il risultato di [4, 5] di cui si era discusso in precedenza.

Lo studio del problema è organizzato nel modo seguente. Nella Sezione 2 verranno richiamati dei risultati preliminari riguardanti gli Spazi di Sobolev e verrà ricordata la caratterizzazione dello spettro di un operatore compatto autoaggiunto su uno spazio di Hilbert. Nella Sezione 3 verrà studiato il problema agli autovalori per la membrana vibrante con densità ρ, e verrà descritto il suo spettro. Nella Sezione 4 verranno richiamati i risultati astratti dimostrati in [14, Sect. 2], e si discuterà il problema della dipendenza analitica per le funzioni simmetriche elementari degli autovalori seguendo l'approccio di [13]. Nella Sezione 5 verrà riportata una dimostrazione dettagliata di un risultato di [13] relativo alla non esistenza di densità di massa critiche per le funzioni simmetriche elementari degli autovalori sotto la sola condizione della costanza di $M[\rho]$, e inoltre si riporterà la dimostrazione del risultato per sottoinsiemi C di $L^\infty(\Omega)$ debolmente* compatti di cui si è discusso al paragrafo precedente.

2. PRELIMINARI

2.1 Spazi di Sobolev

L'ambiente dove cercheremo soluzioni per il problema differenziale che studieremo sarà lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi richiameremo alcune definizioni ed alcuni risultati sugli spazi di Sobolev che utilizzeremo in modo consistente in seguito.

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $C_c^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di Ω in $\mathbb{R}$ di classe C^∞ e con supporto compatto contenuto in Ω. Tali funzioni sono spesso chiamate *funzioni test*.

Definizione 2.1.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Siano $u,v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e sia $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ un multiindice. Diremo che v è la derivata debole di ordine α di u, e scriveremo $D^\alpha u = v$, se vale*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx \,,$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ricordiamo che una derivata debole di ordine α di u, se esiste, è univocamente determinata a meno di un insieme di misura nulla: se v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ sono tali che

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\phi \, dx$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $\int_\Omega (v - \tilde{v})\phi \, dx = 0$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, e quindi $v = \tilde{v}$ quasi ovunque in Ω.

Definizione 2.1.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$, tali che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ esiste in senso debole e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.*

Definizione 2.1.3. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definiamo la sua norma come:*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| \,, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Definizione 2.1.4. *Indichiamo con $W_0^{k,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Da questa definizione segue in particolare che $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione di funzioni $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tali che $\lim_{m\to\infty} u_m = u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.

Riportiamo la dimostrazione del ben noto

Teorema 2.1.5. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$, lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. 1. Mostriamo che la (2.1.3) è una norma. È chiaro che

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda|\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

e

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0 \ \text{ se e solo se } u = 0 \ \text{ q.o.}$$

Ora, siano $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Allora dalla disuguaglianza di Minkowski, per $p \in [1, +\infty[$, segue

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

2. Resta da mostrare che $W^{k,p}(\Omega)$ è completo. Sia $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ una successione di Cauchy in $W^{k,p}(\Omega)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| \le k$, $\{D^\alpha u_m\}_{m=1}^\infty$ è una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Poiché $L^p(\Omega)$ è completo esiste $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_m = u_\alpha \quad \text{in} \quad L^p(\Omega),$$

per ogni $|\alpha| \le k$. In particolare,

$$\lim_{n\to\infty} u_m = u_{(0,\dots,0)} =: u, \quad \text{in} \quad L^p(\Omega).$$

3. Affermiamo che

$$u \in W^{k,p}(\Omega), \quad D^\alpha u = u_\alpha, \tag{2.1.6}$$

per ogni $|\alpha| \leq k$. Per mostrare questo, fissiamo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m D^\alpha \phi \, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_m \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \phi \, dx.\end{aligned}$$

Quindi (2.1.6) è valida. Dunque poiché $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ per $m \to \infty$, per ogni $|\alpha| \leq k$, si ha che $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ per $m \to \infty$.

□

Definizione 2.1.7. *Se $p \in [1, N[$, il coniugato di Sobolev di p è*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

Proposizione 2.1.8. (Disuguaglianza di Hölder Generalizzata) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $p_j \in [1, +\infty]$ e $\sum_{i=1}^N p_j^{-1} = r^{-1} \leq 1$. Se $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$ per $j = 1, ..., N$, allora*

$$\prod_{j=1}^N f_j \in L^r(\Omega) \quad \text{e} \quad \| \prod_{j=1}^N f_j \|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{L^{p_j}(\Omega)}.$$

Teorema 2.1.9. (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Sia $p \in [1, N[$. Allora esiste una costante C, che dipende solo da p e da N, tale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.1.10}$$

per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Iniziamo con il caso $p = 1$. Sia $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Poiché u ha supporto compatto per ogni $i = 1, ..., N$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_N) \, dy_i$$

e quindi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, ..., y_i, ..., x_N)| \, dy_i \quad (i = 1, ..., N).$$

Di conseguenza

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, ..., y_i, ...x_N)| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{2.1.11}$$

Integrando ambo i membri della disuguaglianza (2.1.11) rispetto ad x_1, dalla Proposizione 2.1.8 segue

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \qquad (2.1.12)
\end{aligned}$$

Integriamo ambo i membri della (2.1.12) rispetto a x_2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{N} I_i^{\frac{1}{N-1}}\,dx_2,$$

dove

$$I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_1, \qquad I_i := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1 dy_i \quad (i = 3, ..., N).$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza di Hölder generalizzata troviamo

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx_1 dx_2 \\
&\quad \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad\qquad \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1 dx_2 dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Continuiamo in questo modo, integrando per $x_3, x_4, ..., x_N$ fino a trovare

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx &\leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,dx_1 ... dy_i ... dx_N \right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|\,dx \right)^{\frac{N}{N-1}}. \qquad (2.1.13)
\end{aligned}$$

Abbiamo così provato il Teorema per $p = 1$. Se ora $p \in]1, N[$, scriviamo la (2.1.13) con la funzione $v := |u|^\gamma$ al posto di u, dove $\gamma > 1$ verrà opportunamente scelto. Si ha

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\,dx \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |u|^\gamma|\,dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\,dx \\
&\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.1.14)
\end{aligned}$$

Scegliamo γ in modo che sia $\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1}$, per cui poniamo $\gamma := \frac{p(N-1)}{N-p}$; in questo caso si ha che $\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{Np}{N-p} = p^*$. Sostituendo quindi nella (2.1.14) otteniamo

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

□

Lemma 2.1.15. (Disuguaglianza di Poincaré) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, e sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se* $\mathrm{mis}(\Omega) < \infty$*, allora per $p \in [1, +\infty[$ esiste $C > 0$ dipendente solo da p e da N tale che*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\, \mathrm{mis}(\Omega)^{\frac{1}{N}}\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.1.16}$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $N > 1$. Sia $p \in [1, +\infty[$ e sia $q < N$ tale che $1 \leq q \leq p < q^*$, dove q^* è il coniugato di Sobolev di q.
Dal Teorema 2.1.9 segue che

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

per ogni $u \in C_c^1(\Omega)$, mentre dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}\, \mathrm{mis}(\Omega)^\alpha\,, \quad \textit{con} \quad \alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q^*},$$

e che

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, \mathrm{mis}(\Omega)^\beta\,, \quad \textit{con} \quad \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Segue dunque che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}\, \mathrm{mis}(\Omega)^\alpha \leq C\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}\, \mathrm{mis}(\Omega)^\alpha \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, \mathrm{mis}(\Omega)^{\beta+\alpha},$$

per ogni $u \in C_c^1(\Omega)$.
Poiché $\alpha + \beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{N}$, la (2.1.16) è provata per ogni $u \in C_c^1(\Omega)$.
Consideriamo ora il caso $N = 1$. Ci limiteremo al caso Ω connesso di $\mathbb{R}$, $\Omega =]a, b[$.
Allora

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)\, dt\right| \leq \int_a^x |u'(t)|\, dt \leq (x-a)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |u'(x)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b |u(x)|^p\, dx \leq \int_a^b (x-a)^{p-1} \left(\int_a^x |u'(t)|\, dt\right) dx \quad &\leq \quad \int_a^b (x-a)^{p-1}\, dx \int_a^b |u'(t)|\, dt \\ &= \quad \frac{(b-a)^p}{p} \int_a^b |u'(t)|^p\, dt,\end{aligned}$$

da cui
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}} (b-a) \|u'\|_{L^p_{(\Omega)}},$$
per ogni $u \in C^1_c(\Omega)$
Il fatto che (2.1.16) valga per ogni $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ segue da un argomento di approssimazione: vale infatti quanto affermato nella Definizione 2.1.4. □

Nelle dimostrazioni che seguiranno, faremo uso di certi risultati di approssimazione con funzioni lisce negli spazi di Sobolev.

Teorema 2.1.17. (Approssimazione globale con funzioni lisce) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$ per $p \in [1, +\infty[$. Allora esiste una successione $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tale che $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ per $m \to \infty$.*

Passiamo ora a dimostrare il Teorema di Compattezza di Rellich-Kondrachov.

Definizione 2.1.18. *Siano X e Y spazi di Banach, $X \subset Y$. Diremo che X è immerso compattamente in Y, e si scriveremo $X \subset\subset Y$, se*

i) Esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$ per ogni $x \in X$;

ii) ogni successione limitata in X è precompatta in Y, cioé ha una sottosuccessione di Cauchy in $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Enunciamo la versione classica del

Teorema 2.1.19. (Teorema di Compattezza di Rellich-Kondrachov) *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ tale che $\partial\Omega$ sia di classe C^1. Se $p \in [1, N[$, lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso compattamtente nello spazio $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*[$. Inoltre lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso compattamente nello spazio $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$.*

Abbiamo bisogno di ipotesi meno restrittive su Ω per il Teorema 2.1.19. Introduciamo il seguente teorema cfr.[1, thm. 2.22]

Teorema 2.1.20. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $p \in [1, +\infty[$. Sia $K \subset L^p(\Omega)$. Supponiamo che esista una successione $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi aperti di Ω con le seguenti proprietà*

i) $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$,

ii) l'insieme delle restrizioni delle funzioni in K ad Ω_j è relativamente compatto in $L^p(\Omega_j)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$,

iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che
$$\int_{\Omega\setminus\Omega_j} |u(x)|^p \, dx < \varepsilon$$
per ogni $u \in K$.

Allora K è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$.

Vale il seguente ben noto

Lemma 2.1.21. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Posto*

$$E_0u(x) := \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

si ha che $E_0u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Possiamo a questo punto provare una versione più generale del Teorema 2.1.19.

Teorema 2.1.22. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Se $p \in [1, N[$ allora lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è immerso compattamente nello spazio $L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*[$. Inoltre lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è immerso compattamente nello spazio $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$.*

Dimostrazione. Sia $K \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ limitato, cioè sia $\sup_{u\in K}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$. Sia $q \in [1, p^*[$. Allora $\sup_{u\in K}\|u\|_{L^q(\Omega)} = M < \infty$. Consideriamo la successione $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ delle palle centrate in 0 e di raggio j per ogni $j \in \mathbb{N}$. Se poniamo $\Omega_j := \Omega \cap B_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ si ha che $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$. Siano le funzioni E_0u come nel Lemma 2.1.21, per ogni $u \in K$, e poniamo $\tilde{K} := \{E_0u : u \in K\}$. Ovviamente le funzioni $E_0u|_{B_{r_j}}$ sono in $W^{1,p}(B_{r_j})$ per ogni $u \in K$, $j \in \mathbb{N}$. Per tali funzioni, valgono le ipotesi del Teorema 2.1.19, pertanto l'insieme delle restrizioni di $\tilde{K}$ a B_j è relativamente compatto in $L^q(B_j)$, per ogni $j \in \mathbb{N}$. In particolare, segue che l'insieme delle restrizioni di K a Ω_j è relativamente compatto in $L^q(\Omega_j)$, per ogni $j \in \mathbb{R}$. Notiamo infine che se $q < \tilde{q} < p^*$

$$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus\Omega_j)} \leq \text{mis}(\Omega \setminus \Omega_j)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\tilde{q}}}\|u\|_{L^{\tilde{q}}(\Omega\setminus\Omega_j)} \leq M\text{mis}(\Omega \setminus \Omega_j)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\tilde{q}}},$$

e quest'ultima quantità deve tendere a zero per j che tende a ∞, poichè Ω ha misura finita.
Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.1.20, quindi possiamo concludere che K è relativamente compatto in $L^q(\Omega)$.
Osserviamo infine che, poichè $p^* > p$ e $\lim_{p\to N} p^* = \infty$, abbiamo che $W_0^{1,2}(\Omega)$ è compattamente immerso in $L^p(\Omega)$, per ogni $p \in [1, +\infty[$. $\square$

2.2 Alcuni risultati su spazi di Hilbert

Enunciamo ora due teoremi che saranno usati in seguito.

Teorema 2.2.1. (Teorema di Rappresentazione di Riesz) *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T un funzionale lineare e continuo su H. Allora esiste, ed è unico, $y \in H$ tale che $T(x) = \langle x, y \rangle$ per ogni $x \in H$. Inoltre $\|T\| = \|y\|$.*

Teorema 2.2.2. (Lemma di Lax-Milgram) *Sia H spazio di Hilbert reale e sia H^* il suo duale. Sia $\mathcal{A}$ forma bilineare su H con le seguenti proprietà:*

i) $\mathcal{A}$ è continua, ovvero esiste $C > 0$ tale che $|\mathcal{A}(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$ per ogni $u, v \in H$;

ii) $\mathcal{A}$ è coercitiva, ovvero esiste $\alpha > 0$ tale che $\mathcal{A}(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ per ogni $u, v \in H$.

Allora per ogni $F \in H^*$, esiste ed è unico $u \in H$ tale che $\mathcal{A}(u, v) = F(v)$ per ogni $v \in H$. Inoltre vale $\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|$.

Lo studio dello spettro della membrana vibrante, sarà ricondotto allo studio di un particolare operatore compatto autoaggiunto. Descriviamo ora la teoria che ci servirà a capire la struttura dello spettro di tali operatori.

Definizione 2.2.3. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore lineare e continuo di H in H. Fissato $y \in H$, l'applicazione di H in $\mathbb{R}$ che a x associa $\langle Tx, y \rangle$ per ogni $x \in H$ è lineare e continua. Sia $y^* \in H$ tale che $\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ per ogni $x \in H$.*
L'operatore T^* di H in H che a y associa $T^* y = y^*$ si dice operatore aggiunto di T.

L'operatore aggiunto gode delle seguenti proprietà:

i) T^* è lineare e continuo;

ii) $\|T^*\| = \|T\|$;

iii) $(T^*)^* = T$.

Definizione 2.2.4. *T si dice autoaggiunto se $T^* = T$*

Definizione 2.2.5. *Siano X,Y spazi normati, T un operatore lineare di X in Y. T si dice compatto se trasforma sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi relativamente compatti di Y (insiemi la cui chiusura è compatta).*

In altre parole T è compatto se l'immagine $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X limitata, contiene una sottosuccessione convergente in Y.
Alcune proprietà dell'operatore compatto:

i) T è compatto se e solo se $T(B_X)$ è relativamente compatto;

ii) Gli operatori compatti sono continui;

iii) Il prodotto di un operatore compatto per uno scalare e la somma di operatori compatti sono compatti;

iv) La composizione di un operatore compatto con uno continuo è un operatore compatto qualunque sia l'ordine della composizione;

v) L'identità è compatta solo in spazi di dimensione finita.

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{I}$ la mappa identica.

Definizione 2.2.6. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore lineare e continuo di H in H. Si dice* risolvente *di T l'insieme dei $\mu \in \mathbb{R}$ tali che $T - \mu\mathbb{I}$ sia invertibile e si denota con $\rho(T)$.*
Lo spettro *di T è $\sigma(T) := \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.*

Se $\mu \in \sigma(T)$, μ può essere autovalore, cioè $\ker(T - \mu\mathbb{I}) \neq \{0\}$, oppure non esserlo. L'insieme degli autovalori di T si dice lo *spettro puntuale* di T, e si indica $\sigma_p(T)$. Chiameremo *spettro continuo* di T l'insieme $\sigma_c(T) := \{\mu \in \sigma(T)$ tali che $\mu\mathbb{I} - T$ è iniettivo e $\mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$ è denso in $H\}$.
Chiameremo *spettro residuo* di T l'insieme $\sigma_R(T) := \{\mu \in \sigma(T)$ tali che $\mu\mathbb{I} - T$ è iniettivo e $\mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$ non è denso in $H\}$.

Teorema 2.2.7. (Spettro di un operatore compatto) *Sia H spazio di Hilbert reale, $\dim H = \infty$, $T : H \to H$ operatore compatto. Allora:*

i) $0 \in \sigma(T)$,

ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,

iii) *$\sigma(T) \setminus \{0\}$ è un insieme al più numerabile. Nel caso sia numerabile, esiste una successione μ_n, $n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ tale che $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$,*

iv) *Se $\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, allora $\dim\ker(T - \mu\mathbb{I}) \lneq \infty$, cioè μ ha molteplicità finita.*

La dimostrazione di questo Teorema passa attraverso diversi Lemmi:

Lemma 2.2.8. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto di H in H. Se V è sottospazio chiuso di H, $\mu \neq 0$ e $(\mu\mathbb{I} - T)|_V$ è iniettiva, allora esiste $m > 0$ tale che*

$$m\|x\| \leq \|(\mu\mathbb{I} - T)x\|, \quad \text{per ogni} \quad x \in V.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ con $\|x_n\| = 1$ e tale che $\lim_{n\to\infty}\|\mu x_n - Tx_n\| = 0$.
T è compatto, quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $z \in H$ tali che $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a z.
Allora anche μx_{n_j} converge a z, e allora $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = v$, ove $v = \frac{1}{\mu} z$. Si noti che $v \neq 0$ poiché $\|x_n\| = 1$.
Quindi $\mu v - Tv = \lim_{j\to\infty}(\mu x_{n_j} - Tx_{n_j}) = z - z = 0$.
Essendo V chiuso si ha che $v \in V$, quindi $\mu\mathbb{I} - T$ non è iniettiva. Assurdo. $\square$

Lemma 2.2.9. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto di H in H. Se $\mu \neq 0$ e $\mu\mathbb{I} - T$ è iniettiva, allora $\mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$ una successione convergente in H. Sia $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Sia x_n tale che $\mu x_n - Tx_n = y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Poiché $\|y_n\| \leq M$, dal Lemma 2.2.8 segue che $\|x_n\| \leq \frac{M}{m}$, ove m è come in (2.2.8), quindi anche $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. L'operatore T è compatto, quindi si può estrarre da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge. Poiché $\mu \neq 0$ anche $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge.
Sia $x = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$. Allora $\mu x - Tx = \lim_{j\to\infty} \mu x_{n_j} - Tx_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ e quindi $y_0 \in \mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$. $\square$

Proposizione 2.2.10. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto di H in H. Se $\mu \neq 0$ e $\mu \in \sigma(T)$, allora μ è un autovalore di T.*

Dimostrazione. i) *μ non appartiene a $\sigma_c(T)$:*
Ragionando per assurdo, se $\mu\mathbb{I} - T$ fosse iniettivo e $\mathrm{Im}(h\mathbb{I} - T)$ denso in H, dal Lemma 2.2.9 dovrebbe aversi $\mathrm{Im}(\mu\mathbb{R} - T) = H$ e allora $\mu \in \rho(T)$, assurdo.

ii) *μ non appartiene a $\sigma_R(T)$:*
Supponiamo per assurdo che $\mu \in \sigma_R(T)$ e quindi $\mu\mathbb{I} - T$ sia iniettiva. Sia $H_1 = \mathrm{Im}(\mu\mathbb{I} - T)$, H_1 non denso in H. H_1 è chiuso per il Lemma 2.2.9. Sia $H_2 = (\mu\mathbb{I} - T)H_1$; H_2 è chiuso, e $H_2 \subsetneq H_1$. Costruiamo una successione di sottospazi chiusi, ciascuno contenente il precedente come sottospazio proprio. Si può costruire allora una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\|x_n\| = 1$ e $x_n \in H_n$, $x_n \perp H_{n+1}$. Per $m > n$ si ha allora

$$\frac{1}{\mu}(Tx_n - Tx_m) = x_n + \left(-x_m - \frac{\mu x_n - Tx_n}{\mu} + \frac{\mu x_m - Tx_m}{\mu}\right).$$

Posto

$$x = -x_m - \frac{\mu x_n - Tx_n}{\mu} + \frac{\mu x_m - Tx_m}{\mu}$$

si ha $x \in H_{n+1}$, e quindi $x_n \perp x$. Allora $\|Tx_n - Tx_m\| \geq |\mu|\,\|x_n\| = |\mu|$, ma ciò è assurdo, poiché dalla successione $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dev potersi estrarre una sottosuccessione convergente.

$\square$

Proposizione 2.2.11. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto di H in H, sia $\alpha > 0$. Allora il numero di autovalori μ tali che $|\mu| \geq \alpha$ è finito.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha_0 > 0$ tale che l'insieme degli autovalori $\mu \in \sigma_p(T)$ con $|\mu| > \alpha_0$ sia infinito. Allora lo spettro deve contenere almeno un punto di accumulazione $\mu_0 \neq 0$ (difatti l'insieme $\{\mu : \alpha \leq |\mu| \leq \|T\|\}$ è un compatto di $\mathbb{R}$); quindi esiste una successione di autovalori distinti $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$. Sia x_n un autovettore associato a μ_n. L'insieme $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ è linearmente indipendente.
Sia X_n lo spazio vettoriale generato da $\{x_1, ..., x_n\}$. Possiamo costruire una successione $\{y_1, ..., y_n, ...\}$ con $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$, $y_n \perp X_{n-1}$.
Allora se $n > m$ si ha:

$$\frac{1}{\mu_n} T y_n - \frac{1}{\mu_m} T y_m = y_n + \left(-y_m - \frac{\mu_n y_n - T y_n}{\mu_n} + \frac{\mu_m y_m - T y_m}{\mu_m} \right) = y_n + z,$$

ove

$$z = \left(-y_m - \frac{\mu_n y_n - T y_n}{\mu_n} + \frac{\mu_m y_m - T y_m}{\mu_m} \right)$$

e $z \in X_{n-1}$ in quanto $\frac{\mu_k y_k - T y_k}{\mu_k} \in X_{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi $\|\frac{1}{\mu_n} T y_n - \frac{1}{\mu_m} T y_m\| \geq 1$ e da $\frac{1}{\mu_n} T y_n$ non è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Ciò è assurdo, poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_0}$ e T è compatto. □

Proposizione 2.2.12. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto di H in H. Se $\mu \neq 0$ è un autovalore di T, μ ha molteplicità finita, cioè* $\ker(\mu\mathbb{I} - T)$ *ha dimensione finita.*

Dimostrazione. $\mu\mathbb{I}|_{\ker(\mu\mathbb{I}-T)}$ coincide con la restrizione di T su $\ker(\mu\mathbb{I}-T)$. Dunque tale restrizione deve essere compatta, e quindi dalla proprietà v. di pag. 12, $\ker(\mu\mathbb{I} - T)$ deve avere dimensione finita. □

Dimostrazione del Teorema 2.2.7 Chiaramentente se $0 \notin \sigma(T)$, allora T sarebbe invertibile, e quindi $\mathbb{I} = T \circ T^{-1}$ sarebbe compatto, ma ciò non può essere vero poichè $\dim H = \infty$, e questo prova il puno (i). Il punto (ii) segue dalla Proposizione (2.2.10). Il punto (iii) segue dalla Proposizione (2.2.11). Infine il punto (iv) segue dalla Proposizione (2.2.12). □

Sia ora T autoaggiunto. Proviamo alcune proprietà spettrali di T.

Proposizione 2.2.13. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto e autoaggiunto di H in H. Allora autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Dimostrazione. Siano $\mu_1 \neq \mu_2$ e $x_1, x_2 \in H$ gli autovettori associati. Allora $\mu_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \mu_1 x_1, x_2\rangle = \langle T x_1, x_2\rangle = \langle x_1, T x_2\rangle = \langle x_1, \mu_2 x_2\rangle = \mu_2\langle x_1, x_2\rangle$, e $\mu_1 \neq \mu_2$ implica che $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. □

Teorema 2.2.14. (Teorema di Hilbert-Schmidt) *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia T operatore compatto e autoaggiunto di H in H. Sia $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...\}$ l'insieme finito o numerabile degli autovalori non nulli di T, ciascuno contato con la sua molteplicità. Allora è possibile associare ad ogni autovalore μ_n un autovettore u_n in modo che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una base ortonormale per* $(\ker T)^{\perp}$. *In particolare risulta che per ogni $x \in H$ esiste $x_0 \in \ker T$ tale che $x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, u_n\rangle\, u_n$, e $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, u_n\rangle\, u_n$.*

Dimostrazione. Sia Λ l'insieme degli autovalori non nulli di T, sia S_μ una base ortonormale per $\ker(\mu\mathbb{I} - T)$ con $\mu \in \Lambda$, e sia $S = \bigcup_{\mu\in\Lambda} S_\mu$. Dal Teorema 2.2.7 segue che S è al più numerabile. Inoltre $S \subset \mathrm{Im}(T)$. Sia ora $S^\perp$ l'ortogonale di S in $\overline{\mathrm{Im}(T)}$. Ovviamente $T(S^\perp) \subset S^\perp$, e dunque la restrizione $T|_{S^\perp}$ di T a $S^\perp$ risulta essere un operatore compatto autoaggiunto di $S^\perp$ in $S^\perp$. Inoltre $\|T|_{S^\perp}\| = 0$ poichè $T|_{S^\perp}$ non ha autovalori non nulli. Quindi $S^\perp \subset \ker T$, e quindi $S^\perp = \{0\}$. Segue allora che S è una base ortonormale di $\overline{\mathrm{Im}(T)}$. Sia allora $S = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se $x \in H$, allora $x = x_0 + x_1$, con $x_0 \in \ker T$ e $x_1 \in (\ker T)^\perp$. Quindi $x = x_0 + \sum_{n=1}^\infty \langle x, u_n\rangle u_n$ e $Tx = Tx_0 + \sum_{n=1}^\infty T\langle x, u_n\rangle u_n = \sum_{n=1}^\infty \mu_n\langle x, u_n\rangle u_n$. $\square$

Corollario 2.2.15. *Nelle ipotesi del precedente, se* $\dim\ker T \lneqq \infty$ *e* $\dim H = \infty$ *allora* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *è infinito e rappresentabile mediante una successione* $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente a* 0.

Dimostrazione. Se $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ fosse finito, allora lo spazio $\ker T \oplus \sum_{j=1}^n \ker(\mu_j\mathbb{I} - T)$, che è denso in H, avrebbe dimensione finita, e quindi si avrebbe $\dim H \lneqq \infty$, in contraddizione con l'ipotesi. La seconda affermazione segue dal Teorema 2.2.7. $\square$

3. IL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI PER LA MEMBRANA VIBRANTE

Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme delle funzioni $\rho \in L^\infty(\Omega)$ tali che $\mathrm{ess\,inf}_\Omega \rho > 0$, che è ovviamente un aperto di $L^\infty(\Omega)$.
La formulazione classica del problema agli autovalori che consideriamo è

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda \rho u = 0, & \text{se } x \in \Omega\,, \\ u = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

nelle incognite u, funzione di $\overline{\Omega}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^2, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Poichè non abbiamo fatto alcuna assunzione di regolarità né su $\partial\Omega$ né su ρ, considereremo la formulazione debole del problema.
Assumiamo solo per il momento che la soluzione u sia di classe C^∞, moltiplichiamo ambo i membri dell'espressione $-\Delta u = \lambda \rho u$ per una funzione test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integriamo ambo i membri su Ω. Otteniamo per il primo membro, dal teorema di integrazione per parti

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u\, \phi\, dx &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} u_{x_i}\, \phi\, dx = -\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{\nu}\, \phi\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi\, dx\,, \end{aligned}$$

dove $\vec{\nu}$ denota la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$.
Abbiamo ricavato la seguente formulazione del problema

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi\, dx = \lambda \int_\Omega \rho u \phi\, dx, \tag{3.0.1}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ma ora tale uguaglianza vale, per un ben noto argomento di approssimazione, per qualsiasi $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, e l'uguaglianza che ne risulta ha senso per $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Quest'ultima è detta formulazione debole del problema. Il problema agli autovalori che andremo a studiare sarà dunque il problema (3.0.1) nelle incognite $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ove $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Notiamo che avendo scelto lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ abbiamo già incorporato in questa uguaglianza la condizione $u(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Richiamiamo ora la procedura che ci consentirà di ridurre lo studio degli autovalori del problema (3.0.1) allo studio di un probema agli autovalori per un operatore compatto autoaggiunto in uno spazio di Hilbert. Ricordiamo che lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le 1} D^\alpha u D^\alpha v\, dx,$$

per ogni $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Consideriamo ora l'operatore di Laplace Δ come un operatore di $W_0^{1,2}(\Omega)$ nel suo duale definito come $\Delta[u][\phi] = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx$, per ogni $u, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Mostriamo che per $-\Delta$ valgono le ipotesi del Lemma 2.2.2, cioé

i) $-\Delta$ è limitato, cioè esiste $C > 0$ tale che $|\Delta[u][\phi]| \leq C \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, per ogni $u, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Infatti

$$\begin{aligned} |\Delta[u][\phi]| &= \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \right| \leq \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla \phi| \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u| |\nabla \phi| \, dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} , \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

per ogni $u, \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

ii) $-\Delta$ è coercitivo, ovvero esiste $\beta > 0$ tale che $-\Delta[u][u] \geq \beta \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ma poiché Ω ha misura finita, vale la disuguaglianza di Poincaré, e quindi

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C^2 \, mis(\Omega)^{\frac{2}{N}}) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= (1 + C^2 \, mis(\Omega)^{\frac{2}{N}})(-\Delta[u][u]), \end{aligned}$$

per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Dal lemma di Lax Milgram segue quindi che $-\Delta$ è isomorfismo bicontinuo tra $W_0^{1,2}(\Omega)$ e il suo duale.
Sia J l'immersione canonica di $L^2(\Omega)$ nel duale di $W_0^{1,2}(\Omega)$, definita come

$$J[u][\phi] = \int_\Omega u\phi \, dx,$$

per ogni $u \in L^2(\Omega)$, $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.
Denotiamo con M_ρ la funzione di $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ che ad $u \in L^2(\Omega)$ associa $M_\rho(u) = \rho u$, per ogni $u \in L^2(\Omega)$, $\rho \in \mathcal{R}$. Indichiamo con J_ρ la funzione $J \circ M_\rho$. È chiaramente un'immersione di $L^2(\Omega)$ nel duale di $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$J_\rho[u][\phi] = \int_\Omega u\phi\rho \, dx,$$

per ogni $u \in L^2(\Omega)$, $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.
Infine denotiamo con i l'immersione di $W_0^{1,2}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Dal Teorema 2.1.22 segue che l'immersione i è compatta.
Evidentemente la (3.0.1) è equivalente all'equazione

$$-i \circ \Delta^{(-1)} \circ J_\rho u = \lambda^{-1} u$$

nelle incognite $u \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotiamo infine con $L^2_\rho(\Omega)$ lo spazio $L^2(\Omega)$ fornito del prodotto scalare

$$\langle u_1, u_2 \rangle_\rho = \int_\Omega u_1 u_2 \rho \, dx \, ,$$

per ogni $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$, con $\rho \in \mathcal{R}$. Essendo $\operatorname{ess\,inf}_\Omega \rho(x) > 0$ e $\operatorname{ess\,sup}_\Omega \rho(x) < \infty$, tale prodotto scalare definisce su $L^2(\Omega)$ una norma che è topologicamente equivalente alla norma standard di $L^2(\Omega)$.

Lemma 3.0.3. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Sia $\rho \in \mathcal{R}$. L'operatore $T_\rho := -i \circ \Delta^{(-1)} \circ J_\rho$ è un operatore compatto e autoaggiunto di $L^2_\rho(\Omega)$ in sé, i cui autovalori, che indichiamo con $\mu_j[\rho]$, coincidono coi reciproci degli autovalori $\lambda_j[\rho]$ della (3.0.1) per ogni $j \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. La compattezza di T_ρ segue dalla compattezza di i e dal fatto che $-\Delta^{(-1)}$ e J_ρ sono continui. Per l'autoaggiunzione basterà provare che $\langle T_\rho u_1, u_2\rangle_\rho = \langle u_1, T_\rho u_2\rangle_\rho$ per ogni $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$. Infatti

$$\begin{aligned}\langle T_\rho u_1, u_2\rangle_\rho &= \langle -i \circ \Delta^{(-1)} \circ J_\rho u_1, u_2\rangle_\rho = J_\rho[-i \circ \Delta^{(-1)} \circ J_\rho u_1][u_2] \\ &= J_\rho[u_2][-\Delta^{(-1)} J_\rho u_1] \\ &= \Delta[\Delta^{(-1)} J_\rho u_2][-\Delta^{(-1)} J_\rho u_1] = \Delta[\Delta^{(-1)} J_\rho u_1][-\Delta^{(-1)} J_\rho u_2] \\ &= \langle -i \circ \Delta^{(-1)} \circ J_\rho u_2, u_1\rangle_\rho = \langle u_1, T_\rho u_2\rangle_\rho\,,\end{aligned}$$

per ogni $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$. L'aggiunzione è stata così provata. L'ultima affermazione è triviale. □

Teorema 3.0.4. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Sia $\rho \in \mathcal{R}$. Allora l'insieme Σ degli autovalori di (3.0.1) è contenuto in $]0, +\infty[$ ed è costituito dall'immagine di una successione crescente a $+\infty$. Ogni autovalore ha molteplicità finita. Inoltre l'operatore $-\Delta$ possiede una base hilbertiana di $L^2_\rho(\Omega)$ costituita da autovettori che stanno in $W^{1,2}_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. Siano $\lambda \in \Sigma$, $u \in W^{1,2}_0(\Omega) \setminus \{0\}$ tali che $-\Delta u = \lambda\rho u$. Allora

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \lambda \int_\Omega \rho u^2\,dx\,,$$

ed essendo $\int_\Omega \rho u^2\,dx \neq 0$, si ha che $\lambda \geq 0$, quindi $\Sigma \in [0, +\infty[$. Notiamo ora che se $u \in W^{1,2}_0(\Omega) \setminus \{0\}$, dalla disuguaglianza di Poincaré segue che $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx > 0$, per cui 0 non può essere un autovalore. Allora $\Sigma \in]0, +\infty[$.
Consideriamo l'operatore T_ρ. Esso è iniettivo, infatti $\Delta^{(-1)} \circ J_\rho u = 0$ implica che $J_\rho u = 0$ e quindi $u = 0$. Quindi T_ρ è un operatore compatto, autoaggiunto, $\ker T = \{0\}$ e quindi dal Corollario 2.2.15 segue che gli autovalori di T_ρ son dati dall'immagine di una successione $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente, tale che $\mu_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Poiché $\Sigma = \{\frac{1}{\mu_n} : n \in \mathbb{N}\}$ il primo asserto è facilmente provato. Inoltre tutti gli autovettori di T_ρ sono anche autovettori di $-\Delta$ e quindi sono in $W^{1,2}_0(\Omega)$. L'ultimo asserto segue quindi dal Teorema 2.2.14. □

Rappresentiamo d'ora in poi l'insieme Σ degli autovalori del problema $-\Delta u = \lambda\rho u$ mediante una successione

$$\lambda_1[\rho]\,,\ \lambda_2[\rho]\,,\ \lambda_3[\rho]\,,\ \ldots,\ \lambda_n[\rho]\,,\ \ldots$$

crescente, dove ciascun autovalore verrà ripetuto un numero di volte pari alla propria molteplicità. Il primo autovalore $\lambda_1[\rho]$ si dice autovalore principale. Proviamo ora alcune proprietà del primo autovalore.

Proposizione 3.0.5. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia $\rho \in \mathcal{R}$. Allora*

$$\lambda_1[\rho] = \inf_{\substack{u \in W^{1,2}_0(\Omega)\\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2 \rho\,dx}\,. \tag{3.0.6}$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathcal{B}(u,v) := -\Delta[u][v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$ per ogni $u,v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Tale $\mathcal{B}$ è la forma bilineare associata all'operatore $-\Delta$. Proviamo che $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ definisce su $W_0^{1,2}(\Omega)$ un prodotto scalare che genera una norma equivalente a quella standard di $W_0^{1,2}(\Omega)$. La forma $\mathcal{B}$ è chiaramente bilineare e simmetrica, ed è continua per la disuguaglianza (3.0.2), quindi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &= \mathcal{B}(u,u) \le \|\mathcal{B}\| \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\,, \\
\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&\ge \frac{1}{2C^2\, mis(\Omega)^{\frac{2}{N}}} \int_\Omega |u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&\ge \min\Big\{ \frac{1}{2C^2\, mis(\Omega)^{\frac{2}{N}}}, \frac{1}{2} \Big\} \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza segue dalla (2.1.16). Quindi $\mathcal{B}(u,u) \ge 0$ per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\mathcal{B}(u,u) = 0$ se e solo se $u = 0$. Quindi $\mathcal{B}$ è prodotto scalare su $W_0^{1,2}(\Omega)$, e la norma generata da tale prodotto scalare è equivalente a quella standard di $W_0^{1,2}(\Omega)$. Siano ora $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ le autofunzioni corrispondenti a $\lambda_1[\rho], \lambda_2[\rho], ..., \lambda_n[\rho], ...$ normalizzate da $\int_\Omega \rho u_i u_j\, dx = \delta_{i,j}$ per ogni $i,j \in \mathbb{N}$. D'ora in poi scriveremo λ_h al posto di $\lambda_h[\rho]$. Dal Teorema 3.0.4 sappiamo che $u_1, ..., u_n, ...$, è una base hilbertiana per $L^2_\rho(\Omega)$. Si noti che

$$\mathcal{B}(u_h, \phi) = \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi\, dx = \lambda_h \int_\Omega \rho u_h \phi\, dx = \lambda_h \langle u_h, \phi \rangle_\rho$$

per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi $\mathcal{B}(u_h, u_k) = \lambda_h \langle u_h, u_k\rangle_\rho = \lambda_h \delta_{h,k}$ per ogni $h,k \in \mathbb{N}$. Posto $\phi_h := \frac{u_h}{\lambda_h^{1/2}}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, si ha che $\mathcal{B}(\phi_h, \phi_k) = \delta_{h,k}$ per ogni $h,k \in \mathbb{N}$, ovvero $\phi_1, ...\phi_n, ...$ è un sistema ortonormale in $\big(W_0^{1,2}(\Omega), \mathcal{B}(\cdot,\cdot)\big)$. Proviamo che lo spazio $\langle \phi_h : h \in \mathbb{N}\rangle$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dalla disuguaglianza di Bessel segue che se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ allora

$$\sum_{h=1}^\infty |\mathcal{B}(u, \phi_h)|^2 \le \mathcal{B}(u,u)$$

e $\sum_{h=1}^\infty \mathcal{B}(u,\phi_h)\phi_h$ converge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Poniamo $\phi := \sum_{h=1}^\infty \mathcal{B}(u,\phi_h)\phi_h$. Notiamo che

$$\phi = \sum_{h=1}^\infty \mathcal{B}\Big(u, \frac{u_h}{\lambda_h^{1/2}}\Big)\frac{u_h}{\lambda_h^{1/2}} = \sum_{h=1}^\infty \frac{\mathcal{B}(u,u_h)}{\lambda_h} u_h = \sum_{h=1}^\infty \langle u, u_h\rangle_\rho u_h = u.$$

Quindi $u = \phi$ e $\langle \phi_h : h \in \mathbb{N}\rangle$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dall'identità di Parceval segue che

$$\mathcal{B}(u,u) = \sum_{h=1}^\infty |\mathcal{B}(u,\phi_h)|^2 = \sum_{h=1}^\infty \frac{|\mathcal{B}(u,u_h)|^2}{\lambda_h} = \sum_{h=1}^\infty \lambda_h |\langle u, u_h\rangle|^2 \ge \lambda_1 \sum_{h=1}^\infty |\langle u, u_h\rangle_\rho|^2\,,$$

per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora

$$\lambda_1 \le \frac{\mathcal{B}(u,u)}{\langle u, u\rangle_\rho}$$

e quindi

$$\lambda_1 \leq \inf_{\substack{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2\rho\,dx}.$$

Essendo $\lambda_1 = \mathcal{B}(u_1,u_1)$ segue infine la tesi. $\square$

Lemma 3.0.7. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Sia $\rho\in\mathcal{R}$. Allora le autofunzioni corrispondenti a $\lambda_1[\rho]$ sono esattamente i minimizzatori nella (3.0.6).*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ come nella dimostrazione della proposizione precedente. D'ora in poi scriveremo λ_1 al posto di $\lambda_1[\rho]$. Sia $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)}=1$. Mostriamo che $-\Delta u=\lambda_1\rho u$ se e solo se $\lambda_1=\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx=\mathcal{B}(u,u)$. Se $-\Delta u=\lambda_1\rho u$, allora $\mathcal{B}(u,\phi)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx=\lambda_1\int_\Omega u\phi\rho\,dx$ per ogni $\phi\in W_0^{1,2}(\Omega)$. Scegliamo $\phi=u$, si ha allora $\mathcal{B}(u,u)=\lambda_1\langle u,u\rangle_\rho=\lambda_1$.
Supponiamo ora che $\lambda_1=\mathcal{B}(u,u)$, cioè che u minimizzi (3.0.6). Siano $w\in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\delta>0$ tali che $u+tw\neq 0$ per ogni $t\in]-\delta,\delta[$. La funzione che a $t\in]-\delta,\delta[$ associa $g(t)$, dove

$$g(t)=\mathcal{B}\left(\frac{u+tw}{\|u+tw\|_{L^2_\rho(\Omega)}},\frac{u+tw}{\|u+tw\|_{L^2_\rho(\Omega)}}\right).$$

Ovviamente g ha un minimo in $t=0$. Calcoliamo esplicitamente $g'(0)$. Essendo

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{\mathcal{B}(u,u)+2t\mathcal{B}(u,w)+\mathcal{B}(w,w)t^2}{1+2t\langle u,w\rangle_\rho+t^2\langle w,w\rangle_\rho},\\
g'(t) &= \frac{(2\mathcal{B}(u,w)+2t\mathcal{B}(w,w))(1+2t\langle w,w\rangle_\rho+t^2\langle w,w\rangle_\rho)}{(1+2t\langle u,w\rangle_\rho+t^2\langle w,w\rangle_\rho)^2}\\
&\quad-\frac{(\mathcal{B}(u,u)+2t\mathcal{B}(u,w)+\mathcal{B}(w,w)t^2)(2\langle u,w\rangle_\rho+2t\langle w,w\rangle_\rho)}{(1+2t\langle u,w\rangle_\rho+t^2\langle w,w\rangle_\rho)^2}
\end{aligned}$$

allora

$$0=g'(0)=2\mathcal{B}(u,w)-2\mathcal{B}(u,u)\langle u,w\rangle_\rho,$$

e quindi $\mathcal{B}(u,w)=\mathcal{B}(u,u)\langle u,w\rangle_\rho$, ovvero $\mathcal{B}(u,w)=\lambda_1\langle u,w\rangle_\rho$ per ogni $w\in W_0^{1,2}(\Omega)$, cioè $-\Delta u=\lambda_1\rho u$ come volevasi. $\square$

Riportiamo il seguente Lemma [9, Lemma 7.6]

Lemma 3.0.8. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, sia $p\in[1,+\infty]$ e sia $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Allora u^+, u^- e $|u|$ appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$, dove $u^+:=\max\{u,0\}$, $u^-:=-\min\{u,0\}$ e $|u|:=u^++u^-$. Inoltre*

$$Du^+=\begin{cases} Du\,, & \text{se } u>0\,,\\ 0\,, & \text{se } u\leq 0\,,\end{cases}$$

$$Du^-=\begin{cases} 0\,, & \text{se } u\geq 0\,,\\ -Du\,, & \text{se } u<0\,,\end{cases}$$

Infine se $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $u^+,u^-,|u|\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Prima di proseguire, abbiamo bisogno di due risultati di regolarità per soluzioni deboli di operatori ellittici. Introduciamo allora delle definizioni generali, a cui si applicano tali risultati, osservando in seguito che il problema di cui ci stiamo occupando rientra nella classe più generale dei problemi a cui tali risultati si applicano.
Sia dunque Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Consideriamo operatori L della forma $Lu = \sum_{i,j=1}^N (a^{ij}(x)u_{x_j} + b^i(x)u)_{x_i} + \sum_{i=1}^N c^i(x)u_{x_i} + d(x)u$, dove i coefficienti a^{ij}, b^i, c^i, d con $i, j = 1, ..., N$ sono funzioni misurabili di Ω in $\mathbb{R}$. Assumiamo che L sia ellittico in Ω, ovvero esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \,, \tag{3.0.9}$$

per ogni $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e assumiamo anche che i coefficienti di L siano limitati, e quindi che esistano costanti $\Lambda, \nu \geq 0$ tali che

$$\sum_{i,j=1}^N |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda \;, \quad \alpha^{-2}\sum_{i=1}^N (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \alpha^{-1}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{3.0.10}$$

Vale allora il seguente Teorema

Teorema 3.0.11. (De Giorgi-Nash) *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, sia L operatore che soddisfi alle condizioni (3.0.9) e (3.0.10). Siano inoltre $f^i \in L^q(\Omega)$ per $i = 1, ..., N$, $g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ per qualche $q > N$. Allora se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione $Lu = g + \sum_{i=1}^n D_i f^i$ in Ω, allora u è localmente Hölderiana in Ω, e per ogni palla $B_0 = B_{R_0}(y) \subset \Omega$ e $R \leq R_0$ si ha*

$$osc_{B_R(y)} u \leq CR^\gamma (R_0^{-\gamma} \sup_{B_0} |u| + k)$$

dove $C = C(N, \frac{\Lambda}{\alpha}, \nu, q, R_0)$ e $\gamma = \gamma(N, \frac{\Lambda}{\alpha}, \nu R_0, q)$ sono costanti positive, e $k = \alpha^{-1}(\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)})$, dove $f := (f^1, ..., f^N)$.

Valga inoltre questa condizione

$$\int_\Omega (d\phi - b^i\phi_{x_i})\, dx \leq 0 \tag{3.0.12}$$

per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$, con $\phi \geq 0$. Notiamo che, visto che valgono le ipotesi di limitatezza dei coefficienti (3.0.10), tale disuguaglianza continuerà a valere anche per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Possiamo a questo punto enunciare il seguente

Teorema 3.0.13. (Principio del Massimo Forte) *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia L un operatore che soddisfa alle condizioni (3.0.9), (3.0.10) e (3.0.12), e sia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $Lu \geq 0$ su Ω. Allora, se per qualche palla $B \subset\subset \Omega$ succede che*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0 \,, \tag{3.0.14}$$

la funzione u deve essere costante su Ω, quindi nulla per la disuguaglianza di Poincaré.

Sostituendo poi nel Teorema 3.0.13 $-u$ al posto di u , otteniamo facilmente il Principio del Minimo Forte, che afferma che se una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$ raggiunge l' $\inf_\Omega u$ su qualche palla $B \subset\subset \Omega$, allora essa deve essere costante, e quindi nulla su Ω. Alcune osservazioni su questi due risultati. Nel caso concreto del problema $-\Delta u = \lambda \rho u$ a cui vogliamo applicarli, l'operatore differenziale che dobbiamo considerare sarà chiaramente Δ. Difatti $\Delta u = \sum_{i=1}^N (u_{x_i})_{x_i}$, e soddisfa chiaramente (3.0.9), (3.0.10) e (3.0.12), essendo $a^{ij}(x) = \delta_{ij}$, $b^i = c^i = d = 0$ per ogni $i = 1, ...N$.

Possiamo provare ora il seguente teorema, dove scriveremo λ_1 al posto di $\lambda_1[\rho]$ dopo che sia stata fissata $\rho \in \mathcal{R}$.

Teorema 3.0.15. *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, sia $\rho \in \mathcal{R}$. Allora si ha che*

i) Se $-\Delta u = \lambda_1 \rho u$ e $u \neq 0$, u non cambia segno in Ω. Inoltre o $u(x) \gneqq 0$ per ogni $x \in \Omega$ oppure $u(x) \lneqq 0$ per ogni $x \in \Omega$;

ii) $\dim \ker(\lambda_1 \mathbb{I} + \Delta) = 1$, *cioè λ_1 è autovalore semplice.*

Dimostrazione. i) Supponiamo inizialmente che $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sia tale che $-\Delta v = \lambda \rho v$ e supponiamo che $v \geq 0$. Allora $-\Delta v \geq 0$ in Ω, e quindi per il Principio del Minimo Forte, v non può avere punti di minimo in Ω, altrimenti sarebbe costantemente uguale a 0 su Ω. Quindi non può verificarsi $v(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in \Omega$, e quindi deve essere $v(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$. Vale un discorso analogo se $v \leq 0$, si utilizza il principio del Massimo Forte per mostrare che v non può avere punti di massimo in Ω. Quindi se qualche autofunzione non cambia segno in Ω, allora essa non può annullarsi in alcun punto di Ω per la continuità di u.
Proviamo ora che se $-\Delta u = \lambda_1 \rho u$ allora u non cambia segno in Ω. Sia $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ come nella dimostrazione della Proposizione 3.0.5. Supponiamo inoltre che $\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)} = 1$. Dal lemma 3.0.8, $u^+, u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u,u) &= \mathcal{B}(u^+ - u^-, u^+ - u^-) = \mathcal{B}(u^+, u^+) - 2\mathcal{B}(u^+, u^-) + \mathcal{B}(u^-, u^-) \\ &= \mathcal{B}(u^+, u^+) + \mathcal{B}(u^-, u^-), \end{aligned}$$

poichè dal Lemma 3.0.8 segue che $\mathcal{B}(u^+, u^-) = 0$. Supponiamo per assurdo che $u^+ \neq 0$ e $u^- \neq 0$. Dalla Proposizione 3.0.5 segue che

$$\lambda_1 \leq \frac{\mathcal{B}(u^+, u^+)}{\|u^+\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}}\ , \qquad \lambda_1 \leq \frac{\mathcal{B}(u^-, u^-)}{\|u^-\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}}. \tag{3.0.16}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathcal{B}(u,u) = \mathcal{B}(u^+, u^+) + \mathcal{B}(u^-, u^-) \geq \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ &= \lambda_1 \left(\|u^+\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \right) = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} = \lambda_1 \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza nella precedente deve essere un'uguaglianza, ovvero

$$\mathcal{B}(u^+, u^+) + \mathcal{B}(u^-, u^-) = \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},$$

che insieme a (3.0.16) mostra che

$$\mathcal{B}(u^+,u^+) = \lambda_1 \|u^+\|^2_{L^2_\rho}\ , \quad \mathcal{B}(u^-,u^-) = \lambda_1 \|u^-\|^2_{L^2_\rho}.$$

Dal Lemma 3.0.7 segue che $-\Delta u^+ = \lambda_1 u^+$ e $-\Delta u^- = \lambda_1 u^-$, e quindi per quanto osservato prima segue che o $u^+(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$ oppure $u^-(x) < 0$ per ogni $x \in \Omega$, da cui la tesi.

ii) Siano u_1, u_2 soluzioni non nulle di $-\Delta u = \lambda_1 \rho u$. Supponiamo che $u_1 > 0$, $u_2 > 0$. Allora $\int_\Omega u_1\,dx \neq 0 \neq \int_\Omega u_2\,dx$, dunque esiste $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ tale che $\int_\Omega u_1\,dx = c\int_\Omega u_2\,dx$, ovvero tale che $\int_\Omega u_1 - cu_2\,dx = 0$. Ma anche $u_1 - cu_2$ è autofunzione per $-\Delta u = \lambda_1 \rho u$, quindi o ha segno costante o è nulla. Ma poichè $\int_\Omega u_1 - cu_2\,dx = 0$, il primo caso non si può verificare, e quindi $u_1 - cu_2 = 0$. Quindi tutte le autofunzioni relative a λ_1 sono tra loro proporzionali, da cui la tesi.

□

Terminiamo il capitolo ricordando la rappresentazione variazionale per gli autovalori di qualsiasi indice.

Teorema 3.0.17. (Principio Min-Max)*Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, sia $\rho \in \mathcal{R}$. Si ha*

i) Per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\lambda_j[\rho] = \sup\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}{\int_\Omega u^2 \rho\,dx} \ :\ u \in \langle u_1, ..., u_j\rangle \right\},$$

dove $u_1, ..., u_j$ sono le autofunzioni relative a $\lambda_1[\rho], ..., \lambda_j[\rho]$ normalizzate da $\int_\Omega u_h u_k \rho\,dx = \delta_{h,k}$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$.

ii) Posto

$$\Lambda(E) := \sup\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega v^2 \rho\,dx} \ :\ 0 \neq v \in E \leq W^{1,2}_0(\Omega) \right\},$$

per ogni $E \leq W^{1,2}_0(\Omega)$, allora

$$\lambda_j[\rho] = \inf_{\substack{E \leq W^{1,2}_0(\Omega) \\ \dim E = j}} \Lambda(E). \tag{3.0.18}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ per ogni $u, v \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Scriveremo d'ora in poi λ_h al posto di $\lambda_h[\rho]$. Siano $u_1, ..., u_n, ...$ le autofunzioni relative a $\lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ normalizzate da $\int_\Omega u_h u_k\,dx = \delta_{h,k}$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$. Abbiamo visto che $u_1, ..., u_n, ...$ è base hilbertiana per $L^2_\rho(\Omega)$, e in più che $\mathcal{B}(u_h, \phi) = \lambda_h \langle u_h, \phi\rangle_\rho$. Sia $\phi_h := \frac{u_h}{\lambda_h^{1/2}}$, allora $\mathcal{B}(\phi_h, \phi_k) = \delta_{h,k}$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$. Denotiamo infine $V_h := \langle u_1, ..., u_h\rangle$.

i) Dalla dimostrazione della Proposizione 3.0.5 segue che $\mathcal{B}(u,u) = \sum_{h=1}^{\infty} |\mathcal{B}(u,\phi_h)|^2$ per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Se $u \in V_j$, allora $\langle u, u_h \rangle_\rho = 0$ per ogni $h > j$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(u,u) &= \sum_{h=1}^{j} \left|\mathcal{B}(u, \frac{u_h}{\lambda_h^{1/2}})\right|^2 = \sum_{h=1}^{j} \left|\frac{\lambda_h \langle u, u_h\rangle_\rho}{\lambda_h^{1/2}}\right|^2 \\ &= \sum_{h=1}^{j} \lambda_h |\langle u, u_h\rangle_\rho|^2 \le \lambda_j \sum_{h=1}^{j} |\langle u, u_h\rangle_\rho|^2 = \lambda_j \langle u, u\rangle_\rho,\end{aligned}$$

quindi

$$\lambda_j \ge \frac{\mathcal{B}(u,u)}{\langle u,u\rangle_\rho}$$

per ogni $u \in V_j$, perciò

$$\lambda_j \ge \sup_{\substack{u\in V_j \\ u\neq 0}} \frac{\mathcal{B}(u,u)}{\langle u,u\rangle_\rho}.$$

Ma $\frac{\mathcal{B}(u_j u_j)}{\langle u_j,u_j\rangle_\rho} = \lambda_j$, e quindi il primo punto è stato provato.

ii) Abbiamo appena mostrato che $\Lambda(V_j) = \lambda_j$, quindi

$$\lambda_j = \Lambda(V_j) \ge \inf_{\substack{E \le W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim E = j}} \Lambda(E).$$

Dobbiamo provare che

$$\lambda_j \le \inf_{\substack{E \le W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim E = j}} \Lambda(E).$$

Dobbiamo cioè provare che $\lambda_j \le \Lambda(E)$ per ogni $E \le W_0^{1,2}(\Omega)$ con $\dim E = j$. Proviamo quindi che per ogni $E \le W_0^{1,2}(\Omega)$ con $\dim E = j$, esiste $u \in E$ tale che $\frac{\mathcal{B}(u,u)}{\langle u,u\rangle_\rho} \ge \lambda_j$. Seguirà allora che per ogni $E \le W_0^{1,2}(\Omega)$ con $\dim E = j$ esiste $u \in E$ tale che

$$\Lambda(E) = \sup_{\substack{v\in E \\ v\neq 0}} \frac{\mathcal{B}(v,v)}{\langle v,v\rangle_\rho} \ge \frac{\mathcal{B}(u,u)}{\langle u,u\rangle_\rho} \ge \lambda_j,$$

e da qui seguirà la tesi. Sia dunque $u \in E$. Allora $u = \sum_{i=1}^{j} a_i w_i$. Cerchiamo coefficienti a_i, $i = 1, ..., j$ tali che $u \in V_{j-1}^{\perp}$, cioè

$$\begin{cases} \langle u, u_1\rangle_\rho = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle u, u_{j-1}\rangle_\rho = 0 \end{cases}$$

che è un sistema lineare di $j-1$ equazioni in j incognite, quindi ha una soluzione non banale. Esiste quindi $0 \neq u \in E \cup V_{j-1}^{\perp}$, $u = \sum_{h=j}^{\infty} b_h u_h$, con $b_h \in \mathbb{R}$. Normalizziamo eventualmete i b_h in modo che $\|u\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} = \sum_{h=j}^{\infty} b_h^2 = 1$. Allora

$$\mathcal{B}(u,u) = \mathcal{B}\left(\sum_{h=j}^{\infty} b_h u_h, \sum_{h=j}^{\infty} b_h u_h\right) = \sum_{h=j}^{\infty} b_h^2 \mathcal{B}(u_h,u_h) = \sum_{h=j}^{\infty} b_h^2 \lambda_h \ge \lambda_j \sum_{h=j}^{\infty} b_h^2 = \lambda_j,$$

da cui la tesi.

$\square$

4. SULLA DIPENDENZA DEGLI AUTOVALORI DALLA DENSITÀ DI MASSA

La rappresentazione variazionale degli autovalori data dal Teorema 3.0.17

$$\lambda_j[\rho] = \inf_{\substack{E \leq W_0^{1,2}(\Omega) \\ \dim E = j}} \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho \, dx} \,,$$

mostra chiaramente che $\lambda_j[\rho]$ è una funzione localmente Lipshitziana di $\rho \in \mathcal{R}$. Infatti, consideriamo la funzione

$$\rho \mapsto \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho \, dx}. \tag{4.0.1}$$

Ora

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_1} - \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_2 \, dx} \right| &= \left| \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \int_\Omega u^2 (\rho_2 - \rho_1) \, dx}{\left(\int_\Omega u^2 \rho_1 \, dx\right) \left(\int_\Omega u^2 \rho_2 \, dx\right)} \right| \\ &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \int_\Omega u^2 \, dx \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty}{\alpha^2 \left(\int_\Omega u^2 \, dx\right)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \, dx} \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \frac{\beta \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_1 \, dx} \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \,, \end{aligned}$$

per ogni $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, dove

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{\operatorname{ess\,inf}_\Omega \rho_1, \operatorname{ess\,inf}_\Omega \rho_2\} > 0 \,, \\ \beta &= \max\{\operatorname{ess\,sup}_\Omega \rho_1, \operatorname{ess\,sup}_\Omega \rho_2\} \,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_1 \, dx} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty\right) &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_2 \, dx} \\ &\leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 \rho_1 \, dx} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2} \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty\right). \end{aligned}$$

Se $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty > 0,$$

cioè
$$\|\rho_2 - \rho_1\|_\infty < \frac{\alpha^2}{\beta} ,$$
allora passando al sup, e poi all'inf nella (4.0.2), si ottiene
$$\lambda_j[\rho_1]\left(1 - \frac{\beta}{\alpha^2}\|\rho_2 - \rho_1\|_\infty\right) \le \lambda_j[\rho_2] \le \lambda_j[\rho_1]\left(1 + \frac{\beta}{\alpha^2}\|\rho_2 - \rho_1\|_\infty\right) ,$$
da cui
$$|\lambda_j[\rho_2] - \lambda_j[\rho_1]| \le \lambda_j[\rho_1]\frac{\beta}{\alpha^2}\|\rho_2 - \rho_1\|_\infty ,$$
e quindi la locale Lipshitizianità delle funzioni $\lambda_j[\cdot]$.

Vorremmo ora capire se la dipendenza degli autovalori da ρ è più che continua, visto che per risolvere i problemi di massimo e di minimo che ci interessano abbiamo bisogno che tali funzioni siano differenziabili rispetto a ρ, e ci serviranno le corrispondenti formule per tali differenziali. Ricordiamo alcune definizioni.

Siano X e Y due spazi di Banach e sia $\alpha[v_1][v_2]...[v_n]$ un'applicazione n-lineare simmetrica continua di X^n in Y. L'applicazione di X in Y che a $v \in X$ associa $\hat{\alpha}(v) = \alpha[v]^n$ è detta monomio di grado n generato da α. Per un monomio di grado n si introduce una norma ponendo
$$\|\hat{\alpha}\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|\hat{\alpha}(v)\|}{\|v\|^n} .$$

Chiamiamo serie di potenze, definita in X, a valori in Y, una serie del tipo:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n[v]^n \tag{4.0.2}$$
dove α_n è un'applicazione n-lineare continua simmetrica di X^n in Y per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Indichiamo con $\hat{\alpha}_n$ il monomio di grado n associato ad α_n. Supponiamo che per un numero reale $r > 0$ la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{\alpha}_n\| r^n \tag{4.0.3}$$
converga. Allora la serie (4.0.2) converge per tutti i $v \in X$ tali che $\|v\| \le r$. Il numero $R > 0$, estremo superiore degli r per cui (4.0.3) converge, si dice il raggio di convergenza della serie di potenze (4.0.2). Giungiamo quindi alla seguente

Definizione 4.0.4. *Siano X, Y spazi di Banach, sia Ω un aperto di X e f una funzione di Ω in Y. Si dice che f è analitica in $x_0 \in \Omega$ se esiste una serie di potenze*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n[v]^n$$
con raggio di convergenza positivo, tale che in un intorno di x_0 si abbia $f(x_0+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n[v]^n$.

Per lo studio della dipendenza degli autovalori del problema (3.0.1) dalla densità di massa ρ, è opportuno richiamare alcuni risultati astratti sulla dipendenza degli autovalori di un operatore compatto autoaggiunto su uno spazio di Hilbert dotato di un prodotto scalare che varia al variare dell'operatore.

È noto che se su uno spazio di Hilbert H si fissa un prodotto scalare, gli autovalori di un operatore compatto autoaggiunto T su H dipendono con continuità da T stesso. In più, se abbiamo una famiglia di operatori compatti autoaggiunti $\{T_\eta\}_{\eta\in I_0}$ che dipendono analiticamente da $\eta \in I_0$, dove I_0 è un intervallo di $\mathbb{R}$ contentente lo 0, e T_0 possiede un autovalore $\tilde{\mu}$ di molteplicità $m \geq 1$, allora dal Teorema di Rellich e Nagy [17] segue che esistono m funzioni $\mu_1[\cdot], ..., \mu_m[\cdot]$ analitiche definite in un intorno di 0 tali per cui $\tilde{\mu}_0 = \mu_1[0] = \cdots \mu_m[0]$, e tali che $\mu_1[\eta], ..., \mu_m[\eta]$ sono autovalori di T_η. Questo risultato vale per famiglie di operatori che dipendono analiticamente da un solo parametro. Si potrebbe pensare che tale risultato possa essere esteso alla dipendenza da più parametri, o alla dipendenza degli autovalori dell'operatore T da T stesso, facendolo variare nello spazio degli operatori compatti autoaggiunti di H in sè. Questo però non si verifica in generale, come mostra il seguente controesempio. Sia ad esempio $\dim H = 2$. Sia A operatore compatto autoggiunto, dipendente dai parametri $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$. Sia la rappresentazione matriciale dell'operatore la seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1+\chi_1 & \chi_2 \\ \chi_2 & 1-\chi_1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di A sono chiaramente

$$\mu_1[\chi_1, \chi_2] = 1 + \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}\,, \quad \mu_2[\chi_1, \chi_2] = 1 - \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}\,,$$

che ovviamente non sono funzioni differenziabili in $(\chi_1, \chi_2) = (0, 0)$, quindi non sono neppure analitiche. Se però ora consideriamo le funzioni

$$\mu_1[\chi_1, \chi_2] + \mu_1[\chi_1, \chi_2] = 2\,,$$

$$\mu_1[\chi_1, \chi_2]\mu_2[\chi_1, \chi_2] = 1 - \chi_1^2 - \chi_2^2\,,$$

si vede che esse invece sono analitiche. Queste sono le funzioni simmetriche elementari degli autovalori per A, che coincidono a meno del segno, con i coefficienti del polinomio caratteristico di A. Da questo esempio in dimensione finita, viene naturale aspettarsi che, sebbene gli autovalori in generale non siano funzioni differenziabili dell'operatore che stiamo considerando, le funzioni simmetriche elementari degli autovalori lo siano, o che siano addirittura analitiche.

Questo è dimostrato in [14, Sect.2]. Noi riassumeremo qui, senza fornire dimostrazioni, quanto provato sull'analiticità delle funzioni simmetriche elementari degli autovalori. Iniziamo dunque con delle notazioni. Siano X, Y, Z spazi di Banach reali. Sia $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio delle funzioni lineari e continue di X in Y. Esso è ovviamente uno spazio di Banach, con la solita norma $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_Y$. Sia $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ lo spazio delle funzioni bilineari e continue di $X \times Y$ in Z, fornito della solita norma $\|B\|_{\mathcal{B}(X\times Y,Z)} = \sup_{\substack{x\in X\,,\, \|x\|_X\leq 1 \\ y\in Y\,,\, \|y\|_Y\leq 1}} \|B(x, y)\|_Z$. Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert reale e sia $\|\cdot\|$ la norma associata al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ di H. Denotiamo poi con H_Q lo spazio vettoriale H fornito di un prodotto scalare $Q = Q(\cdot,\cdot)$, e denotiamo con $\|\cdot\|_Q$ la norma associata al prodotto scalare Q su H. Denotiamo con $\mathcal{K}(H,H)$ il sottospazio di $\mathcal{L}(H,H)$ degli operatori compatti. Si dimostra facilmente che $\mathcal{K}(H,H)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{L}(H,H)$, per cui è uno spazio di Banach. Denotiamo con $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}(H_Q,H_Q)$ il sottospazio di $\mathcal{K}(H_Q,H_Q)$ di quegli operatori T tali che $Q(Tu,v) = Q(u,Tv)$ per ogni $u,v \in H_Q$. Anche questo è uno spazio di Banach, poichè sottospazio chiuso di $\mathcal{K}(H_Q,H_Q)$. Sia T un operatore compatto e autoaggiunto su H, e sia $\sigma(T)$ lo spettro di T, che per il Teorema 2.2.7 è un sottoinsieme finito o numerabile di $\mathbb{R}$. Denotiamo con $j^+(T)$ il numero degli autovalori positivi di T, ciascuno contato un numero di volte pari alla sua molteplicità, e con $j^-(T)$ il numero degli autovalori negativi di T, sempre contati secondo la loro molteplicità. Poniamo poi

$$\begin{aligned} J^+(T) &:= \{j \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \le j \le j^+(T)\}, \\ J^-(T) &:= \{j \in \mathbb{Z} \,:\, -j^-(T) \le j \le -1\}. \end{aligned}$$

Allora è univocamente determinata la funzione che a $j \in J(T) := J^+(T) \cup J^-(T)$ associa $\mu_j[T] \in \mathbb{R}$, tale che sia decrescente su $J^-(T)$ e su $J^+(T)$ e tale che

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\mu_j[T] \,:\, j \in J(T)\},$$

e tale che ogni autovalore sia ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità. Ora si vuole che l'immersione di H_Q in H sia continua, e perchè ciò sia possibile, si deve richiedere che il prodotto scalare Q sia coercitivo su H. Un prodotto scalare è una forma bilineare e simmetrica. Introduciamo allora il seguente insieme

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R}) := \{B \in \mathcal{B}(H^2,\mathbb{R}) \,:\, B(u_1,u_2) = B(u_2,u_1) \;\text{ per ogni } u_1,u_2 \in H\}.$$

Chiaramente $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R})$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}(H^2,\mathbb{R})$. Denotiamo l'insieme degli elementi di $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R})$ che sono coercitivi con

$$\mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R}) := \{B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R}) \,:\, \eta[B] > 0\},$$

dove $\eta[\cdot]$ è la funzione di $\mathcal{B}(H^2,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$\eta[B] := \inf\left\{\frac{B(u,u)}{\|u\|^2} \,:\, u \in H \setminus \{0\}\right\},$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(H^2,\mathbb{R})$. È immediato osservare che Q è un prodotto scalare coercitivo se e solo se l'immersione di H_Q in H è un omeomorfismo.

Poniamo ora

$$\mathcal{M} := \{(Q,T) \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R}) \times \mathcal{K}(H,H) \,:\, Q(Tu,v) = Q(u,Tv) \;\text{ per ogni } u,v \in H\},$$

che è un chiuso di $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R}) \times \mathcal{K}(H,H)$. Inoltre definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{O} := \mathcal{M} \cap (\mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R}) &\times \mathcal{K}(H,H)) \\ &= \{(Q,T) \in \mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R}) \times \mathcal{K}(H,H) \,:\, T \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}}(H_Q,H_Q)\}, \end{aligned}$$

che è un aperto di $\mathcal{M}$. Vale allora il seguente teorema, cfr [14, Thm. 2.4]

Teorema 4.0.5. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Allora l'insieme*

$$\mathcal{A}_j := \{(Q,T) \in \mathcal{O} \, : \, j \in J(T)\}$$

è aperto in $\mathcal{M}$. La funzione $\mu_j[\cdot]$ di $\mathcal{A}_j$ in $\mathbb{R}$ che a $(Q,T) \in \mathcal{A}_j$ associa $\mu_j[T]$ è continua.

Considereremo ora un fissato sottoinsieme finito F di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e l'insieme delle coppie (Q,T) per le quali $F \subseteq J(T)$, e per le quali gli autovalori $\mu_j[T]$ con $j \in F$ non sono uguali ad alcun autovalore $\mu_l[T]$ di T con $l \in J(T) \setminus F$. Sia dunque

$$\mathcal{A}[F] := \{(Q,T) \in \mathcal{O} \, : \, j \in J(T) \, \forall j \in F \, , \, \mu_l[T] \notin \{\mu_j[T] \, : \, j \in F\} \, \forall l \in J(T) \setminus F\}. \tag{4.0.6}$$

Dal Teorema 4.0.5 segue che le funzioni $\mu_j[\cdot]$ sono continue su $\mathcal{A}[F]$ per ogni $j \in F$, ed $\mathcal{A}[F]$ è aperto in $\mathcal{M}$.
Definiamo ora, per ogni sottoinsieme finito F di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, e per ogni $(Q,T) \in \mathcal{A}[F]$, la proiezione ortogonale $P_F[Q,T]$ di H_Q sul sottospazio $E[T,F]$ di H_Q generato dall'insieme

$$\{u \in H_Q \, : \, Tu = \mu u, \; \exists \, \mu \in \{\mu_j[T] \, : \, j \in F\}\}.$$

Ciò che vogliamo fare ora è analizzare la dipendenza di $P_F[Q,T]$ dalla coppia (Q,T). Grazie a un risultato di Kato [11], si può dimostrare il seguente

Teorema 4.0.7. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Allora la funzione P_F di $\mathcal{A}[F]$ in $\mathcal{L}(H,H)$ che a $(Q,T) \in \mathcal{A}[F]$ associa $P_F[Q,T]$ è continua.*

Inoltre è dimostrato in [14] che la funzione $P_F[Q,T]$ dipende analiticamente da (Q,T) nel senso precisato dal seguente teorema

Teorema 4.0.8. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia F un sottoinsieme finito non vuoto di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sia $(\tilde{Q},\tilde{T}) \in \mathcal{A}[F]$. Allora esiste un aperto $\widetilde{\mathcal{W}}$ di $(\tilde{Q},\tilde{T})$ in $\mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(H,H)$ e un operatore analitico $P_F^\sharp$ di $\widetilde{\mathcal{W}}$ in $\mathcal{L}(H,H)$ tale che $P_F^\sharp[Q,T] = P_F[Q,T]$ per ogni $(Q,T) \in \widetilde{\mathcal{W}} \cap \mathcal{A}[F]$.*

Usando il Teorema 4.0.8 si può mostrare che si può scegliere una base ortonormale di $E[T,F]$ che dipende analiticamente da (Q,T).

Proposizione 4.0.9. *Sia H uno spazio di Hilbert reale. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(\tilde{Q},\tilde{T}) \in \mathcal{A}[F]$. Sia $\{\tilde{u}_j \, : \, j \in F\}$ una base ortonormale di $E[\tilde{T},F]$ in $H_{\tilde{Q}}$. Allora esiste un intorno $\mathcal{W}_0$ di $(\tilde{Q},\tilde{T})$ in $\mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(H,H)$ contenuto nell'intorno $\tilde{\mathcal{W}}$ del Teorema 4.0.8 , e $|F|$ operatori analitici $u_j[\cdot,\cdot]$, $j \in F$, di $\mathcal{W}_0$ in H tali che:*

i) $\{u_j[Q,T] \, : \, j \in F\}$ *è un insieme ortonormale in H_Q, per ogni $(Q,T) \in \mathcal{W}_0$,*

ii) $\{u_j[Q,T] \, : \, j \in F\}$ *è una base ortonormale per l'immagine di $P_F^\sharp[Q,T]$, che coincide con $E[T,F]$, in H_Q, per ogni $(Q,T) \in \mathcal{W}_0 \cap \mathcal{A}[F]$,*

iii) $u_j[\tilde{Q},\tilde{T}] = \tilde{u}_j$ *per ogni $j \in F$.*

Il problema agli autovalori che avevamo inizialmente considerato può ora essere ridotto a un problema in dimensione finita.

Proposizione 4.0.10. *Sia H spazio di Hilbert reale. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Sia $(\tilde{Q},\tilde{T})\in\mathcal{A}[F]$. Sia $\{\tilde{u}_1,...,\tilde{u_{|F|}}\}$ una base ortonormale di $E[\tilde{T},F]$ in $H_{\tilde{Q}}$, e $\{u_j[Q,T]\,:\,j=1,...,|F|\}$ come nella proposizione precedente. Sia $\mathcal{S}$ la funzione di $\mathcal{W}_0$ nell'insieme $M_{|F|}(\mathbb{R})$ delle matrici $|F|\times|F|$ a coefficienti reali, definita da*

$$\mathcal{S}[Q,T]:=(\mathcal{S}_{hk}[Q,T])_{h,k=1,...,|F|}:=(Q(Tu_k[Q,T],u_h[Q,T]))_{h,k=1,...,|F|}\,,$$

per ogni $(Q,T)\in\mathcal{W}_0$. Allora $\mathcal{S}[\cdot,\cdot]$ è analitica, ed $\mathcal{S}[Q,T]$ è simmetrica per ogni $(Q,T)\in\mathcal{W}_0\cap\mathcal{A}[F]$. In più se $(Q,T)\in\mathcal{W}_0\cap\mathcal{A}[F]$, allora i $\mu_j[T]$ per ogni $j\in F$ sono gli autovalori di $\mathcal{S}[Q,T]$ contati secondo la propria molteplicità. Infine, se si assume che $\mu_j[\tilde{T}]$ assuma un valore comune $\tilde{\mu}_j$ per ogni $j\in F$, allora il differenziale di $\mathcal{S}[\cdot,\cdot]$ in $(\tilde{Q},\tilde{T})$ è dato dalla formula

$$d\mathcal{S}[\tilde{Q},\tilde{T}](\dot{Q},\dot{T})=\Big(\tilde{Q}(\dot{T}\tilde{u}_k,\tilde{u}_h)\Big)_{h,k=1,...,|F|},\ \text{ per ogni } (\dot{Q},\dot{T})\in\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(H^2,\mathbb{R})\times\mathcal{L}(H,H)\,.$$

Grazie alla Proposizione 4.0.10, e sfruttando quanto stabilito in [14, Thm. 2.27, Corol. 2.28], ovvero una variante del Teorema di Rellich-Nagy valida anche per prodotti scalari variabili, si mostra che vale il seguente

Teorema 4.0.11. *Sia H spazio di Hilbert reale, F un sottoinsieme finito non vuoto di $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Siano*

$$\begin{aligned}
M_{F,1}[T] &= \sum_{j_1\in F}\mu_{j_1}[T]\\
\dots &= \dots\\
M_{F,s}[T] &= \sum_{\substack{j_1,\dots,j_s\in F\\ j_1<\cdots<j_s}}\mu_{j_1}[T]\cdots\mu_{j_s}[T], \quad \forall\, s\in\{1,\dots,|F|\},\\
\dots &= \dots\\
M_{F,|F|}[T] &= \prod_{j\in F}\mu_j[T],
\end{aligned}$$

per ogni $(Q,T)\in\mathcal{A}[F]$, le funzioni simmetriche elementari degli autovalori $\mu_j[T]$ con indici $j\in F$. Sia $(\tilde{Q},\tilde{T})\in\mathcal{A}[F]$. Allora esiste un intorno $\widetilde{\mathcal{W}}$ di $(\tilde{Q},\tilde{T})$ in $\mathcal{Q}(H^2,\mathbb{R})\times\mathcal{L}(H,H)$, e delle funzioni analitiche $M^\sharp_{F,s}[\cdot,\cdot]$, per ogni $s=1,...,|F|$, di $\widetilde{\mathcal{W}}$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$M^\sharp_{F,s}[Q,T]=M_{F,s}[T]$$

per ogni $(Q,T)\in\widetilde{\mathcal{W}}\cap\mathcal{A}[F]$, e per ogni $s=1,...,|F|$.
Se inoltre esiste $\tilde{\mu}\in\mathbb{R}$ tale che $\tilde{\mu}=\mu_j[T]$ per ogni $j\in F$, e se $\{\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_{|F|}\}$ è una base ortonormale per $E[\tilde{T},F]$ in $H_{\tilde{Q}}$, allora la derivata parziale di $M^\sharp_{F,s}$ rispetto a T in $(\tilde{Q},\tilde{T})$ è data dalla formula

$$d_T M^\sharp_{F,s}[\tilde{Q},\tilde{T}](\dot{T})=\binom{|F|-1}{s-1}\tilde{\mu}^{s-1}\sum_{l=1}^{|F|}\tilde{Q}(\dot{T}\tilde{u}_l,\tilde{u}_l), \tag{4.0.12}$$

per ogni $\dot{T}\in\mathcal{K}_{\mathcal{S}}(H_{\tilde{Q}},H_{\tilde{Q}})$, e per ogni $s=1,...,|F|$.

Per i dettagli tecnici e per le dimostrazioni dei risultati appena richiamati, si rimanda a [14].

Un importante risultato sulle applicazioni analitiche tra spazi di Banach è che la composizione di due applicazioni analitiche è ancora un'applicazione analitica. Ora, se ad esempio $\mathcal{U}$ è un aperto di uno spazio di Banach X e $\mathcal{G}$ è un'applicazione analitica di $\mathcal{U}$ in $\mathcal{A}[F]$, allora le funzioni $M_{F,s}[\mathcal{G}(\cdot)]$ per $s = 1, ..., |F|$ sono analitiche in $\mathcal{U}$.

Torniamo ora al caso concreto che stiamo studiando. Analogamente a quanto fatto sopra, fissiamo un insieme finito di indici $F \subset \mathbb{N}$. Nel caso che stiamo trattando, lo spazio di Hilbert reale che prendiamo in considerazione è lo spazio $L^2(\Omega)$, e le coppie (Q, T) di prodotto scalare su $L^2(\Omega)$ e di operatore che andremo a considerare saranno del tipo $(\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho, T_\rho)$ con $\rho \in \mathcal{R}$. Poichè tale coppia dipende da $\rho \in \mathcal{R}$, andiamo a considerare quelle densità $\rho \in \mathcal{R}$ per le quali gli autovalori con indici in F non coincidono con gli autovalori con indici non in F, ovvero

$$\mathcal{R}[F] := \{\rho \in \mathcal{R} \,:\, \lambda_j[\rho] \neq \lambda_l[\rho]\,,\ \forall j \in F, l \in \mathbb{N} \setminus F\}$$

e

$$\Theta[F] := \{\rho \in \mathcal{R}[F] \,:\, \lambda_{j_1}[\rho] = \lambda_{j_2}[\rho]\,,\ \forall j_1, j_2 \in F\}.$$

Allora possiamo provare il seguente Teorema.

Teorema 4.0.13. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Allora $\mathcal{R}[F]$ è un aperto di $L^\infty(\Omega)$, e le funzioni simmetriche elementari degli autovalori*

$$\Lambda_{F,h}[\rho] = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_h \in F \\ j_1 < \cdots j_h}} \lambda_{j_1}[\rho] \cdots \lambda_{j_h}[\rho]\,, \quad h = 1, \dots, |F| \tag{4.0.14}$$

sono analitiche in $\mathcal{R}[F]$. Inoltre, se $\rho \in \Theta[F]$ è tale che gli autovalori $\lambda_j[\rho]$ assumono il valore comune $\lambda_F[\rho]$ per ogni $j \in F$, allora il differenziale delle funzioni $\Lambda_{F,h}$ nel punto ρ è dato dalla formula

$$d\Lambda_{F,h}[\rho][\dot\rho] = -\lambda_F^h[\rho]\binom{|F|-1}{h-1}\sum_{l \in F}\int_\Omega u_l^2\,\dot\rho\,dx\,, \tag{4.0.15}$$

per ogni $\dot\rho \in L^\infty(\Omega)$, dove $\{u_l\}$ è una base ortonormale per $\lambda_F[\rho]$ in $L^2_\rho(\Omega)$.

Dimostrazione. Osserviamo inizialmente che la funzione di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{Q}(L^2(\Omega)^2, \mathbb{R})$ che a $\rho \in \mathcal{R}$ associa il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ è lineare e continua, mentre la funzione di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ che a $\rho \in \mathcal{R}$ associa T_ρ essendo composizione di funzioni lineari e continue, è lineare e continua. Le applicazioni lineari e continue in particolare sono analitiche, per cui la funzione di $\mathcal{R}$ in $\mathcal{Q}(L^2(\Omega)^2, \mathbb{R}) \times \mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ che a $\rho \in \mathcal{R}$ associa $(\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho, T_\rho)$, essendo composizione di funzioni analitiche, è analitica. Dal Lemma 3.0.3 segue che T_ρ è un operatore compatto autoaggiunto rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$, e i suoi autovalori $\mu_j[\rho]$ sono i reciproci degli autovalori $\lambda_j[\rho]$. Quindi l'insieme $\mathcal{R}[F]$ coincide con l'insieme $\{\rho \in \mathcal{R} \,:\, \mu_j[\rho] \neq \mu_l[\rho]\,,\ \forall j \in F, l \in \mathbb{N} \setminus F\}$. La funzione $\rho \mapsto (\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho, T_\rho)$ è una mappa analitica di $\mathcal{R}$ in

$$\mathcal{O}_\Omega := \big\{(Q,T) \in \mathcal{Q}(L^2(\Omega)^2, \mathbb{R}) \times \mathcal{K}(L^2(\Omega), L^2(\Omega)) \,: \\ Q(Tu, v) = Q(u, Tv) \ \text{ per ogni } u, v \in L^2(\Omega)\big\},$$

e l'insieme $\mathcal{R}[F]$ coincide con l'insieme

$$\{\rho \in \mathcal{R} \,:\, (\langle\cdot,\cdot\rangle, T_\rho) \in \mathcal{A}[F]\},$$

dove $\mathcal{A}[F]$ è l'insieme definito in (4.0.6), con $H = L^2(\Omega)$. Dal momento che $\mathcal{A}[F]$ è aperto in $\mathcal{O}_\Omega$ (Teorema 4.0.5), e la funzione $\rho \mapsto (\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho, T_\rho)$ è una mappa continua di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{O}_\Omega$, segue che $\mathcal{R}[F]$ è un aperto di $L^\infty(\Omega)$. Dal Teorema 4.0.11 segue dunque che le funzioni di $\mathcal{R}[F]$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in \mathcal{R}[F]$ associano

$$\Gamma_{F,h}[\rho] = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_h \in F \\ j_1<\cdots<j_h}} \mu_{j_1}[\rho]\cdots\mu_{j_h}[\rho]\,, \tag{4.0.16}$$

per ogni $\rho \in \mathcal{R}[F]$ sono analitiche per ogni $h = 1, ..., |F|$, poichè composizione di funzioni analitiche. Ora, visto che gli autovalori $\mu_j[\rho]$ di T_ρ sono i reciproci degli autovalori $\lambda_j[\rho]$, si vede facilmente che

$$\Lambda_{F,h}[\rho] = \frac{\Gamma_{F,|F|-h}[\rho]}{\Gamma_{F,|F|}[\rho]}\,, \tag{4.0.17}$$

per ogni $h = 1, ..., |F|$, dove abbiamo posto $\Gamma_{F,0} := 1$, e quindi le funzioni elementari simmetriche degli autovalori $\Lambda_{F,h}[\rho]$ sono funzioni analitiche di $\rho \in \mathcal{R}[F]$. Mostriamo adesso la formula (4.0.15). La funzione $\Gamma_{F,h}[\rho]$ è data dalla composizione della funzione $M_{F,h}[T]$ definita nel Teorema 4.0.11 con la funzione che a $\rho \in \mathcal{R}[F]$ associa T_ρ. Dalle regole usuali del calcolo differenziale, e dal Teorema 4.0.11 segue subito che

$$d\Gamma_{F,h}[\rho][\dot\rho] = \binom{|F|-1}{h-1}\lambda_F^{1-h}\sum_{l=1}^{|F|}\langle dT_\rho[\dot\rho][u_l], u_l\rangle_\rho\,, \tag{4.0.18}$$

per ogni $\rho \in \mathcal{R}[\mathcal{F}], \dot\rho \in L^\infty(\Omega)$. Calcoliamo ora $\langle dT_\rho[\dot\rho][u_l], u_l\rangle_\rho$. Dalla (3.0.1) ricaviamo l'uguaglianza $-\Delta[u_l] = \lambda_F J_\rho[u_l]$. Allora si ha che

$$\begin{aligned}
\langle dT_\rho[\dot\rho][u_l], u_l\rangle_\rho &= J_\rho[dT_\rho[\dot\rho][u_l]][u_l] = -J_\rho[u_l][\Delta^{(-1)}dJ_\rho[\dot\rho][u_l]] \\
&= \lambda_F^{-1}[\rho]\Delta[u_l][\Delta^{(-1)}dJ_\rho[\dot\rho][u_l]] = \lambda_F^{-1}[\rho]\Delta[\Delta^{(-1)}dJ_\rho[\dot\rho][u_l]][u_l] \\
&= \lambda_F^{-1}[\rho]dJ_\rho[\dot\rho][u_l][u_l] = \lambda_F^{-1}[\rho]\int_\Omega u_l^2\dot\rho\,dx\,,
\end{aligned} \tag{4.0.19}$$

per ogni $\dot\rho \in L^\infty(\Omega), l \in F$. Ora da (4.0.17), (4.0.18) e (4.0.19), e dalle regole usuali del calcolo differenziale, segue che

$$\begin{aligned}
d\Lambda_{F,h}[\rho][\dot\rho] &= \frac{d\Gamma_{F,|F|-h}[\rho][\dot\rho]\Gamma_{F,|F|}[\rho] - \Gamma_{F,|F|-h}[\rho]d\Gamma_{F,|F|}[\rho][\dot\rho]}{\Gamma_{F,|F|}^2[\rho]} \\
&= \left\{\binom{|F|-1}{|F|-h-1}\lambda_F^{1-2|F|+h}[\rho] - \binom{|F|}{h}\lambda_F^{h+1-2|F|}[\rho]\right\} \\
&\quad\cdot\lambda_F^{2|F|}[\rho]\sum_{l=1}^{|F|}\langle dT_\rho[\dot\rho][u_l], u_l\rangle_\rho = -\lambda_F^h[\rho]\binom{|F|-1}{h-1}\sum_{l=1}^{|F|}\int_\Omega u_l^2\dot\rho\,dx\,.
\end{aligned}$$

Il teorema è stato così provato. □

Per concludere la sezione, osserviamo che se $j \in F$, allora la restrizione della funzione di $\mathcal{R}$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in \mathcal{R}$ associa $\lambda_j[\rho]$ a $\Theta[F]$ è una funzione analitica: infatti $\lambda_j[\cdot]$ coincide su $\Theta[F]$ con la funzione analitica $\frac{\Lambda_{F,1}[\cdot]}{|F|}$.

5. SULLE DENSITÀ DI MASSA CRITICHE

In questa sezione discuteremo un risultato relativo alla non esistenza di densità di massa critiche $\rho \in \mathbb{R}$ per le funzioni $\Lambda_{F,h}$ sotto la sola condizione

$$\int_\Omega \rho \, dx = \text{costante.} \tag{5.0.1}$$

Abbiamo quindi bisogno di opportune condizioni necessarie affinchè un elemento $\rho \in \mathcal{R}$ sia un punto critico per tali funzioni sotto la restrizione (5.0.1). Introduciamo la definizione di sottovarietà di Banach, che ci servirà per richiamare la teoria dei massimi e minimi vincolati per spazi di Banach.

Definizione 5.0.2. *Sia Y uno spazio di Banach e M un sottoinsieme di Y non vuoto. Si dice che M è una sottovarietà di Banach di Y di classe C^k, con $k \geq 1$, se esiste uno spazio di Banach X tale che per ogni $y_0 \in Y$ esiste $x_0 \in X$, un intorno U_{x_0} di x_0 in X, un intorno V_{y_0} di y_0 in Y ed un diffeomorfismo φ di classe C^k di U_{x_0} in $V_{y_0} \cap M$, con $\varphi(x_0) = y_0$. Inoltre se φ_1 è diffeomorfismo di classe C^k di U_{x_1} su $V_{y_1} \cap M$ e φ_2 è diffeomorfismo di classe C^k di U_{x_2} su $V_{y_2} \cap M$, allora l'applicazione $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è un diffeomorfismo di classe C^k di $\varphi_1(V_1 \cap V_2 \cap M)$ su $\varphi_2(V_1 \cap V_2 \cap M)$, per ogni $y_1, y_2 \in M$.*

La definizione è analoga a quella data per sottovarietà di spazi di dimensione finita. Si osserva però che se $\dim X = \infty$, ci sono alcune differenze dalla usuale situazione.

Definizione 5.0.3. *Sia X uno spazio di Banach. Sia $G \subset X$ un sottospazio chiuso di X. Si dice che un sottospazio L di X è il supplementare topologico di G se*

i) $G \cap L = \{0\}$ *e* $G + L = X$

ii) Le proiezioni canoniche di X su G e di X su L sono operatori lineari e continui.

La prossima proposizione si vede essere banalmente verificata quando $\dim X < \infty$.

Proposizione 5.0.4. *Siano X, Y spazi di Banach, e siano $x_0, y_0, U_{x_0}, V_{y_0}, \varphi$ come nella Definizione 5.0.2. Allora $d\varphi(x_0)$ è iniettivo e $\mathrm{Im} d\varphi(x_0)$ è un sottospazio chiuso di Y che ammette un supplementare topologico in Y.*

Si capisce che nei teoremi delle immersioni e delle sommersioni nel caso di spazi di dimensione infinita servono delle ipotesi aggiuntive, che in dimensione finita sono banalmente vere.

Teorema 5.0.5. (Teorema delle immersioni) *Siano X, Y spazi di Banach. Sia $\Omega \subseteq X$ un aperto di X. Sia $x_0 \in \Omega$ e sia φ una funzione di Ω in Y di classe C^k. Sia $\varphi(x_0) = y_0$. Si assuma inoltre che φ soddisfi le seguenti condizioni:*

i) $d\varphi(x_0)$ *sia iniettivo, cioè che φ sia immersiva in x_0*

ii) $\operatorname{Im} d\varphi(x_0)$ *sia un sottospazio chiuso di Y che ammette un supplementare topologico Z.*

Allora esistono un intorno U_{x_0} di x_0 in Ω, un intorno V_{y_0} di y_0 in Y, una funzione ψ di V_{y_0} su U_{x_0} di classe C^k tale che $\psi \circ \varphi = \mathbb{I}$. Inoltre esiste una funzione g di classe C^k definita su V_{y_0} a valori in Z tale che $dg(y_0)$ sia suriettivo e tale che

i) $\varphi(U_{x_0}) = \{y \in V_{y_0} \, : \, g(y) = 0\}$

ii) $\ker dg(y_0) = \operatorname{Im} d\varphi(x_0)$.

Teorema 5.0.6. (Teorema delle sommersioni) *Siano Y, Z spazi di Banach. Sia $y_0 \in Y$, V_{y_0} un intorno di y_0 in Y e sia g una funzione di V_{y_0} in Z di classe C^k sommersiva in y_0, ovvero tale che $dg(y_0)$ sia suriettivo su Z. Si supponga inoltre che $T := \ker dg(y_0)$ ammetta un supplementare topologico K in Y. Sia $y_0 = t_0 + k_0$, con $t_0 \in T$, $k_0 \in K$. Allora esiste un intorno $\mathcal{T}_{t_0}$ di t_0 in T e un intorno $\mathcal{K}_{k_0}$ di k_0 in K e una funzione η di $\mathcal{T}_{t_0}$ in $\mathcal{K}_{k_0}$ con $\eta(t_0) = k_0$ di classe C^k tale che*

i) $\{y \in \mathcal{T}_{t_0} + \mathcal{K}_{k_0} \, : \, g(y) = g(y_0)\} = \{t + \eta(t) \, : \, t \in \mathcal{T}_{t_0}\}$,

ii) la funzione che a $t \in \mathcal{T}_{t_0}$ associa $t + \eta(t) \in Y$ è immersiva in t_0 e l'immagine del suo differenziale in t_0 coincide con $\ker dg(y_0)$.

I teoremi delle immersioni e delle sommersioni forniscono localmente una varietà di Banach M come il grafico di una funzione immersiva, o come l'insieme degli zeri di una funzione sommersiva. Nelle notazioni dei teoremi precedenti, se M è una varietà di Banach di Y, $y_0 \in M$ e φ è una parametrizzazione locale attorno a y_0 definita su $\Omega \subseteq X$, e g definita su Y a valori in Z è un sistema di vincoli per M, abbiamo visto che si ha $\operatorname{Im} d\varphi(x_0) = \ker dg(y_0)$. Tale sottospazio vettoriale è detto spazio tangente alla varietà M in y_0, e si indica con $T_{y_0}M$. Esso è omeomorfo allo spazio delle coordinate X, e non dipende dalle carte con cui la varietà viene rappresentata.

Ora, sia f una funzione definita su un intorno di M a valori in $\mathbb{R}$. Un punto $y_0 \in M$ sarà di massimo o di minimo locale per f su M se e solo se $x_0 \in X$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$ è di massimo o di minimo locale per $f \circ \varphi$. E questo è facile vedere che è equivalente a dire che $\ker df(y_0) \supseteq \operatorname{Im} d\varphi(x_0) = T_{y_0}M$. Ma allora ciò è equivalente a dire che $\ker dg(y_0) \subseteq \ker df(y_0)$. Ma poichè $dg(y_0)$ è suriettivo, dal teorema di omomorfismo per spazi vettoriali segue che questo accade se e solo se esiste una funzione Λ lineare e continua di Z in $\mathbb{R}$ tale che

$$\Lambda \circ dg(y_0) = df(y_0). \tag{5.0.7}$$

Possiamo ora dare la seguente

Definizione 5.0.8. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia F una funzione differenziabile, definita su un aperto U di $L^\infty(\Omega)$ a valori in $\mathbb{R}$. Sia $M[\rho] = \int_\Omega \rho\, dx$ per ogni $\rho \in L^\infty(\Omega)$. Diciamo che $\rho \in U$ è una densità di massa critica per F sotto la condizione (5.0.1) se*

$$ker\, dM[\rho] \subseteq ker\, dF[\rho]\,. \tag{5.0.9}$$

Prima di mostrare che non esistono densità di massa critiche per le funzioni $\Lambda_{F,h}$ sotto la condizione (5.0.1), ricordiamo alcuni risultati preliminari.

Lemma 5.0.10. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $p \in [1, +\infty]$. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ tali che $\lim_{m\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Allora*

i) Esiste una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(x) = f(x) \ \text{ q.o. su } \Omega.$$

ii) Esiste $h \in L^p(\Omega)$ tale che

$$|f_{k_j}(x)| \leq h(x) \ \text{ q.o. su } \Omega\,, \ \text{ per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo ora mostrare questo risultato

Proposizione 5.0.11. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Siano $u_1, ..., u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Allora $\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_k^2} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Mostriamo il risultato per $k = 2$. Per induzione seguirà la tesi. Dividiamo la dimostrazione in 4 punti.

1. Siano $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$. Per il Teorema 2.1.17 esistono successioni $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ tali che $\lim_{m\to\infty} u_m = u$ in $W^{1,2}(\Omega)$ e $\lim_{m\to\infty} v_m = v$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f = f(x, y)$, tale che $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano limitate, e che $f(0, 0) = 0$. Esisterà quindi $M > 0$ tale che $\sup_{\mathbb{R}^2} |\frac{\partial f}{\partial x}| < M$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} |\frac{\partial f}{\partial y}| < M$. Ora la funzione $f(u_m, v_m)$ di Ω in $\mathbb{R}$ è chiaramente di classe C^1, per cui vale la ben nota regola della catena per la derivazione della composizione di funzioni:
$$\frac{\partial f(u_m, v_m)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(u_m, v_m)}{\partial x} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial f(u_m, v_m)}{\partial y} \frac{\partial v_m}{\partial x_j}\,.$$
Ora $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono limitate, mentre $\frac{\partial u_m}{\partial x_j}, \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, quindi $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u_m, v_m) \in L^2(\Omega)$.
Poichè $f(0, 0) = 0$, ed f è di classe almeno C^1, esiste $\alpha > 0$ tale che $|f(x, y)| \leq \alpha \|(x, y)\|_2$, e quindi $|f(u_m, v_m)| \leq \alpha\sqrt{u_m^2 + v_m^2}$, e $\sqrt{u_m^2 + v_m^2} \in L^2(\Omega)$, quindi $f(u_m, v_m) \in L^2(\Omega)$. Si conclude che $f(u_m, v_m) \in W^{1,2}(\Omega)$.

2. Per lo stesso argomento del punto 1, $f(u, v) \in L^2(\Omega)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Sappiamo che $\lim_{m\to\infty} u_m = u$ in $L^2(\Omega)$, $\lim_{m\to\infty} v_m = v$ in $L^2(\Omega)$, e che per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| = 1$, $\lim_{m\to\infty} D^\alpha u_m =$

$D^\alpha u$ in $L^2(\Omega)$, $\lim_{m\to\infty} D^\alpha v_m = D^\alpha v$ in $L^2(\Omega)$. Vogliamo mostrare che $f(u,v) \in W^{1,2}(\Omega)$, dobbiamo dunque far vedere che

$$\int_\Omega f(u,v)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega (\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x_j})\phi\,dx\,, \tag{5.0.12}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Poichè il differenziale df è limitato su $\mathbb{R}^N$, ovvero esiste $K > 0$ tale che $\|df(x,y)\| \le K$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha chiaramente che $\lim_{m\to\infty} f(u_m,v_m) = f(u,v)$ in $L^2(\Omega)$, infatti

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_m,v_m) - f(u,v)|^2\,dx &\le K^2\int_\Omega (u_m-u)^2 + (v_m-v)^2\,dx \\ &= K^2(\|u_m-u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|v_m - v\|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Ora, per il Lemma 5.0.10 sappiamo che esistono sottosuccessioni $\{u_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ rispettivamente, tali che convergono puntualmente a u, v rispettivamente, quasi ovunque su Ω. Senza perdita di generalità possiamo supporre che gli indici m_k e m_j delle due sottosuccessioni siano gli stessi, ed anzi d'ora in poi indicheremo queste sottosuccessioni nuovamente con $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Mostriamo che

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x_j} \text{ in } L^2(\Omega). \tag{5.0.13}$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\ =\ &\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ \le\ &\left\|\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \\ \le\ & M\left\|\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ora, il primo termine tende a 0 per m che tende a ∞, poichè $\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$ converge a $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ in $L^2(\Omega)$. Inoltre, dalla continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$, segue che $\frac{\partial f(u_m,v_m)}{\partial x}$ converge a $\frac{\partial f(u,v)}{\partial x}$ quasi ovunque su Ω, quindi sono verificate le ipotesi del Teorema della convergenza dominata per il secondo membro. Allora è chiaro che la (5.0.13) è vera. Dalla disuguaglianza di Hölder segue subito la validità di (5.0.12)

3. Consideriamo ora $f_\varepsilon = \sqrt{x^2+y^2+\varepsilon^2} - \varepsilon$. Chiaramente essa è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Per quanto mostrato al punto precedente si ha

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u,v)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\varepsilon^2}}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_j} + v\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\phi\,dx\,, \quad (5.0.14)$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Passando ora al limite per $\varepsilon \to \infty$ nella (5.0.14) otteniamo

$$\int_\Omega \sqrt{u^2+v^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_j} + v\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\phi\,dx \quad (5.0.15)$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ciò si può fare ad esempio prendendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e facendo tendere n a $+\infty$, e applicando il Teorema della convergenza dominata. Quindi abbiamo provato che $\sqrt{u^2+v^2} \in W^{1,2}(\Omega)$.

4. se ora $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sono successioni in $C_c^\infty(\Omega)$ tali che convergono rispettivamete a $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, la successione $\left\{\sqrt{u_m^2+v_m^2+\frac{1}{m}^2} - \frac{1}{m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ è in $C_c^\infty(\Omega)$, e imitando le dimostrazioni al punto 2 e al punto 3, si mostra che converge in $W^{1,2}(\Omega)$ a $\sqrt{u^2+v^2}$, che quindi è in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

□

Abbiamo dunque tutti gli strumenti necessari per dimostrare il seguente Teorema.

Teorema 5.0.16. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Allora per ogni $h = 1, ..., |F|$ la funzione $\Lambda_{F,h}$ di $\mathcal{R}[F]$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in \mathcal{R}[F]$ associa $\Lambda_{F,h}[\rho]$ non ha densità di massa critiche in $\mathcal{R}[F]$ sotto la condizione (5.0.1).*

Dimostrazione. Fissiamo $\tilde\rho \in \mathcal{R}[F]$. Esiste pertanto un intero $n \in \mathbb{N}$ e una partizione $\{F_1, ..., F_n\}$ di F tale che $\tilde\rho \in \cap_{k=1}^n \Theta[F_k]$. Per quanto osservato in conclusione del capitolo precendente, le restrizioni a $\Theta[F_k]$ delle funzioni $\lambda_k[\cdot]$ sono analitiche, allora deduciamo che esiste un intorno $\mathcal{W}$ di $\tilde\rho$ in $\mathcal{R}[F]$ tale che $\mathcal{W} \subset \cap_{k=1}^n \mathcal{R}[F_k]$. Sia $h \in \{1, ..., |F|\}$. Riscriviamo la funzione $\Lambda_{F,h}$ in una maniera più conveniente ai fini della dimostrazione, ovvero

$$\Lambda_{F,h}[\rho] = \sum_{\substack{0\le h_1\le|F_1|,...,0\le h_n\le|F_n| \\ h_1+\cdots+h_n=h}} \prod_{k=1}^n \Lambda_{F_k,h_k}[\rho]\,, \quad (5.0.17)$$

per ogni $\rho \in \mathcal{W}$. Calcoliamo il differenziale di (5.0.17) in $\tilde\rho$. Grazie alla formula (4.0.15) scriviamo il differenziale per ogni funzione Λ_{F_k,h_k}. Otteniamo

$$\begin{aligned} d\Lambda_{F,h}[\tilde\rho][\dot\rho] &= \sum_{\substack{0\le h_1\le|F_1|,...,0\le h_n\le|F_n| \\ h_1+\cdots+h_n=h}} \left(\sum_{k=1}^n d\Lambda_{F_k,h_k}[\tilde\rho][\dot\rho]\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \Lambda_{F_j,h_j}[\tilde\rho]\right) \\ &= \sum_{\substack{0\le h_1\le|F_1|,...,0\le h_n\le|F_n| \\ h_1+\cdots+h_n=h}} \left(\sum_{k=1}^n b_{h_k}(-\lambda_{F_k}^{h_k}[\tilde\rho])\binom{|F|-1}{h_k-1}\sum_{l\in F_k}\int_\Omega u_l^2\dot\rho\,dx\right)\,, \end{aligned}$$

dove $b_{h_k} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \Lambda_{F_j,h_j}[\tilde{\rho}]$, e $\{u_l\}_{l\in F_k}$ è una base ortonormale in $L^2_{\tilde{\rho}}(\Omega)$ dell'autospazio relativo a $\lambda_{F_k}[\tilde{\rho}]$ e $\lambda_{F_k}[\tilde{\rho}]$ è il valore assunto da tutti gli autovalori $\lambda_j[\tilde{\rho}]$ con $j \in F_k$. Da ciò segue che

$$d\Lambda_{F,h}[\tilde{\rho}][\dot{\rho}] = -\sum_{k=1}^{n} c_k \int_\Omega \sum_{l\in F_k} u_l^2 \dot{\rho}\, dx = -\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l\in F_k} u_l^2 \right) \dot{\rho}\, dx\,, \qquad (5.0.18)$$

per ogni $\dot{\rho} \in L^\infty(\Omega)$, per opportuni $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$. Notiamo che le costanti c_k sono chiaramente positive per ogni $k = 1, ..., n$. Ragioniamo ora per assurdo, e supponiamo che $\tilde{\rho}$ sia una densità di massa critica per la funzione $\Lambda_{F,h}$ sotto la restrizione (5.0.1). Dalla (5.0.7) segue che deve esistere una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $d\Lambda_{F,h}[\tilde{\rho}] = -c dM[\tilde{\rho}]$, cioè deve esistere $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l\in F_k} u_l^2 \right) \dot{\rho}\, dx = c \int_\Omega \dot{\rho}\, dx\,,$$

per ogni $\tilde{\rho} \in L^\infty(\Omega)$. Quindi dall'arbitrarietà di $\dot{\rho}$ segue che

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{l\in F_k} u_l^2 \right) = c\,, \quad \text{q.o. in } \Omega\,.$$

Tale uguaglianza implica $c \geq 0$, poichè abbiamo osservato che le costanti c_k sono positive. Ora $u_l \in W^{1,2}_0(\Omega)$, e allora la funzione $(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l\in F_k} (\sqrt{c_k} u_l)^2)^{1/2}$ è in $W^{1,2}_0(\Omega)$ per la Proposizione 5.0.11, ed è uguale quasi ovunque su Ω a $\sqrt{c}$. Quindi $\nabla u = 0$ quasi ovunque su Ω, e dalla disuguaglianza di Poincaré segue che $c = 0$, e quindi che $u_l = 0$ per ogni $l \in F$. Ma ciò non è possibile. □

Per quanto provato nel secondo capitolo, l'autovalore principale $\lambda_1[\rho]$ è semplice per ogni $\rho \in \mathcal{R}$. Segue immediatamente il

Corollario 5.0.19. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Allora non ci sono densità di massa critiche in $\mathcal{R}$ per la funzione che a $\rho \in \mathcal{R}$ associa $\lambda_1[\rho] \in \mathbb{R}$, sotto la condizione (5.0.1).*

Dimostrazione. Poniamo $F = \{1\}$ nel teorema precedente. È immediato osservare che $\mathcal{R}[F] = \Theta[F] = \mathcal{R}$. La dimostrazione del corollario segue ora immediatamente dal teorema precedente. □

Dal Teorema 5.0.16 segue anche

Corollario 5.0.20. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Sia $M > 0$ e sia $L_M = \{\rho \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega \rho\, dx = M\}$. Allora per ogni $h = 1, ..., |F|$ la funzione $\Lambda_{F,h}$ di $\mathcal{R}[F] \cap L_M$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in \mathcal{R}[F] \cap L_M$ associa $\Lambda_{F,h}[\rho]$ non ha massimi o minimi locali.*

Teorema 5.0.21. (Teorema di Banach-Steinhaus)*Siano X, Y spazi di Banach. Denotiamo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio delle funzioni lineari e continue da X in Y. Sia $\{F_j\}_{j\in J}$ una famiglia qualsiasi di funzioni in $\mathcal{L}(X, Y)$ tali che per ogni $x \in X$*

$$\sup_{j\in J}\|F_j x\|_X < \infty .$$

Allora

$$\sup_{j\in J}\|F_j\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty .$$

Sia X uno spazio di Banach e X^* il suo duale. Definiamo la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ come la più piccola delle topologie su X che rendono continui gli elementi di X^*. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X, scriveremo $x_n \rightharpoonup x$ per indicare che x_n converge ad x per la topologia debole. Elenchiamo alcune proprietà.

Proposizione 5.0.22. *Sia X uno spazio di Banach. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Allora*

i) $x_n \rightharpoonup x$ se e solo se $\langle \phi, x_n\rangle \to \langle \phi, x\rangle$ per ogni $\phi \in X^*$ *;*

ii) se $x_n \to x$ *allora* $x_n \rightharpoonup x$ *;*

iii) se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\|x_n\|$ è limitata e $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$ *;*

iv) se $x_n \rightharpoonup x$ e $\phi_n \to \phi$ in X^*, allora $\langle \phi_n, x_n\rangle \to \langle \phi, x\rangle$.

Possiamo poi considerare il duale di X^*, e indicarlo con X^{**}. Allora ad ogni elemento $x \in X$ si può associare un elemento di $Jx \in X^{**}$ come segue:

$$\begin{aligned} Jx \ &: \ X^* \to \mathbb{R} \\ &\quad\ \phi \ \mapsto \langle Jx, \phi\rangle = \langle \phi, x\rangle \end{aligned}$$

e si ha

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

Possiamo dunque identificare X come un sottospazio di X^{**}. Ovvero $X \subseteq X^{**}$. Se vale l'uguaglianza, lo spazio X è detto riflessivo. Consideriamo allora sullo spazio X^* la topologia debole $\sigma(X^*, X)$, definita come la più piccola topologia che rende continui gli elementi di X. Tale topologia è detta topologia debole*. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in X^*, scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ per indicare che f_n converge ad f nella topologia debole*. Elenchiamo alcune proprietà.

Proposizione 5.0.23. *Sia X uno spazio di Banach. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X^*. Allora*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ se e solo se $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ per ogni $x \in X$ *;*

ii) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ allora $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|$ *;*

iii) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$ in X, allora $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Per spazi di Banach riflessivi, si dimostra che vale il seguente teorema [2, Thm. III.27]

Teorema 5.0.24. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X. Allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge rispetto alla topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Per quanto riguarda gli spazi L^p che a noi interessano, vale il seguente teorema di rappresentazione [2, Sect. IV.3]

Teorema 5.0.25. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $p \in [1, \infty[$. Sia $T \in (L^p(\Omega))^*$. Allora esiste un'unica $u \in L^{p^*}(\Omega)$, dove p^* verifica a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, tale che*

$$\langle T, \phi \rangle = \int_\Omega u\phi \, dx \,,$$

per ogni $\phi \in L^p(\Omega)$. Inoltre vale che $\|T\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$.

Si dimostra poi, [2, Sect. IV.3] che per $p \in]1, \infty[$ lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile e riflessivo, ed il suo duale può essere identificato con $L^{p^*}(\Omega)$; $L^1(\Omega)$ è separabile ma non riflessivo, ed il suo duale può essere identificato con $L^\infty(\Omega)$, mentre $L^\infty(\Omega)$ non è nè riflessivo nè separabile, ed in generale $L^1(\Omega) \subset (L^\infty)^*(\Omega)$. Possiamo a questo punto dimostrare il seguente

Teorema 5.0.26. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $C \subset L^\infty(\Omega)$ compatto rispetto alla topologia debole*. Allora C è limitato in $L^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ può essere identificato col duale di $L^1(\Omega)$ per il Teorema 5.0.25. Sia dunque $\phi_0 \in L^1(\Omega)$. Consideriamo la funzione di valutazione v_{ϕ_0} di $L^\infty(\Omega)$ in $\mathbb{R}$ che a $f \in L^\infty(\Omega)$ associa $f(\phi_0) := \langle f, \phi_0 \rangle = \int_\Omega f\phi_0 \, dx$. Tale funzione è lineare, ed è ovviamente continua nella topologia debole*. Dunque $v_{\phi_0}|_C$ ha massimo e minimo in C per il Teorema di Weierstrass. Dunque esiste $M > 0$ tale che

$$|v_{\phi_0}(f)| = |f(\phi_0)| < M \,,$$

per ogni $f \in C$. Dal Teorema di Banach-Steinhaus segue che

$$\sup_{f\in C} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \,,$$

e quindi C è limitato in $L^\infty(\Omega)$. □

Ci serviremo del seguente Lemma [4, Lemma 4.2]

Lemma 5.0.27. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega)$ tale che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $L^\infty(\Omega)$. Siano poi $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $L^2(\Omega)$ tali che $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ in $L^2(\Omega)$. Allora $lim_{n\to\infty}\langle f_n g_n, h_n\rangle = \langle fg, h\rangle$ in $\mathbb{R}$.*

Nella dimostrazione della prossima proposizione è utile avere la seguente rappresentazione variazionale degli autovalori del problema (3.0.1) [4, Sect. 3].

Lemma 5.0.28. (Principio di Auchmuty) *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia $\rho \in \mathcal{R}$. Allora si ha*

$$\frac{-1}{2\lambda_k[\rho]} = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} \mathcal{A}_k(\rho, u) \,, \tag{5.0.29}$$

dove

$$\mathcal{A}_k(\rho, u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|(\mathbb{I} - P_{k-1}[\rho])u\|_{L^2_\rho(\Omega)}\,,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, e

$$P_j[\rho]u = \sum_{i=1}^{j} \langle u, u_i\rangle_\rho u_i\,,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Il minimo nella (5.0.29) è si raggiunge per $u = u_k$, normalizzata con $\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_k\|_{L^2_\rho(\Omega)} = \lambda_k^{-1}[\rho]$.

Possiamo dimostrare un risultato di continuità per gli autovalori $\lambda_j[\rho]$ con dipendenza da $\rho \in L^\infty(\Omega)$ rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$.

Proposizione 5.0.30. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia $C \subset L^\infty(\Omega)$ un sottoinsieme compatto rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\inf_{\rho \in C} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} \rho(x) > 0.$$

allora le funzioni di C in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in C$ associano $\lambda_j[\rho]$ sono continue rispetto alla topologia debole.*

Dimostrazione. Poichè C è limitato e $L^1(\Omega)$ è separabile, allora la topologia debole* indotta su C è metrizzabile, quindi basterà provare la continuità per successioni. Mostriamo che se $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in C convergente a ρ nella topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$, allora la successione $\{\lambda_j[\rho_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\lambda_j[\rho]$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Sia $\alpha := \inf_{\rho\in C} \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} \rho(x) > 0$. Per il Teorema 5.0.26 $\beta := \sup_{\rho\in C} \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \rho(x) < \infty$. Allora per ogni $\rho \in C$ si ha che $\alpha \leq \rho(x) \leq \beta$, per ogni $x \in \Omega$. Indichiamo $\lambda_j[\rho_n]$ con λ_j^n, e con u_j^n le relative autofunzioni, normalizzate con $\|u_j^n\|_{L^2_{\rho_n}(\Omega)} = 1$, e tali che $\langle u_j^n, u_i^n\rangle_{\rho_n} = \delta_{ij}$.
Dalla rappresentazione variazionale (3.0.18) segue immediatamente che $\lambda_j[\beta] \leq \lambda_j^n \leq \lambda_j[\alpha]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi, poichè $\lambda_j^n = \|\nabla u_j^n\|^2_{L^2(\Omega)}$, si ha che $\|\nabla u_j^n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_j[\alpha]$. Possiamo dunque estrarre una sottosuccessione $\{\rho_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che la successione $\{\lambda_1^{n_k}\}$ converge in $\mathbb{R}$.

Lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo [2, Sect. IX.4], e la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ è una norma su $W_0^{1,2}$ topologicamente equivalente a quella standard, per la disuguaglianza di Poincaré. Quindi visto che la successione $\{u_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $W_0^{1,2}(\Omega)$, per il Teorema 5.0.24 si può estrarre una sottosuccessione $\{\rho_{n_{k_h}}\}_{h\in\mathbb{N}}$ di $\{\rho_{n_k}\}$ tale che $\{u_1^{n_{k_h}}\}$ converge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ per la topologia debole $\sigma(W_0^{1,2}(\Omega), (W_0^{1,2})^*)$. Rinominiamo gli indici n_{k_h} nuovamente con n, per semplicità. Per lo stesso ragionamento, possiamo estrarre una sottosuccessione da $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che continueremo a denotare con $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che $\{\lambda_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{R}$ e $\{u_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Continuiamo allora in questo modo, e denotiamo infine con $\overline{\lambda}_j$ il limite della successione $\{\lambda_j^n\}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, e con $\overline{u}_j$ il limite nella topologia debole della successione $\{u_j^n\}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Poichè $W_0^{1,2}(\Omega)$ è immerso in $L^2(\Omega)$, e tale immersione è compatta, le successioni $\{u_j^n\}$ che convergono debolmente in $W_0^{1,2}(\Omega)$, convergono fortemente in $L^2(\Omega)$. Ora, sappiamo che $0 < \lambda_1^n < \lambda_2^n \leq \cdots$, quindi passando al limite si ha anche che $0 < \overline{\lambda}_1 \leq \overline{\lambda}_2 \leq \cdots$. Ora, dal Lemma 5.0.27 deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_j^n \cdot \nabla\phi - \lambda_j^n \rho_n u_j^n \phi\, dx = \int_\Omega \nabla\overline{u}_j \cdot \nabla\phi - \overline{\lambda}_j \rho \overline{u}_j \phi\, dx\,,$$

per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Di conseguenza si ha che

$$\int_\Omega \nabla \overline{u}_j \cdot \nabla \phi \, dx = \overline{\lambda}_j \int_\Omega \rho \overline{u}_j \phi \, dx \,, \tag{5.0.31}$$

per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Per il Lemma 5.0.27 si ha anche che

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_i^n, u_h^n \rangle_{\rho_n} = \langle \overline{u}_i, \overline{u}_h \rangle_\rho = \delta_{ij} \,. \tag{5.0.32}$$

La (5.0.31) e la (5.0.32) implicano che $\{\overline{\lambda}_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{\lambda_j[\rho]\}_{j\in\mathbb{N}}$. Notiamo inoltre, visto che $\lim_{n\to\infty} \lambda_j^n = \overline{\lambda}_j$, $\lambda_j^n = \|\nabla u_j^n\|^2_{L^2(\Omega)}$, si ha $\lim_{n\to\infty} \|\nabla u_j^n\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \overline{u}_j\|_{L^2(\Omega)}$.

Dobbiamo mostrare ora che $\{\lambda_j[\rho]\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{\overline{\lambda}_j\}$. Ragioniamo per assurdo. Assumiamo che esista $\overline{\lambda} \in \{\lambda_j[\rho]\}_{j\in\mathbb{N}} \setminus \{\overline{\lambda}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Sia $\overline{u}$ un elemento non nullo dell'autospazio relativo a $\overline{\lambda}$. Si ha che $\langle \overline{u}, \overline{u}_j \rangle_\rho = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Normalizziamo $\overline{u}$ in modo che sia $\|\overline{u}\|_{L^2_\rho(\Omega)} = \overline{\lambda}^{-1}$. Dalla (5.0.29) segue che

$$\frac{-1}{2\lambda_j^n} \leq \mathcal{A}_j(\rho_n, \overline{u}) \,. \tag{5.0.33}$$

Notiamo che

$$\lim_{n\to\infty} P_{j-1}[\rho_n]\overline{u} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \langle \overline{u}, u_k^n \rangle_{\rho_n} u_k^n = \sum_{k=1}^{j-1} \langle \overline{u}, \overline{u}_k \rangle_\rho \overline{u}_k = 0$$

in $L^2(\Omega)$. E quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_j(\rho_n, \overline{u}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 \, dx - \|(\mathbb{I} - P_{j-1}[\rho_n]\overline{u})\|_{L^2_{\rho_n}(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 \, dx - \|\overline{u}\|_{L^2_\rho(\Omega)} = \frac{-1}{2\overline{\lambda}} \,.
\end{aligned}$$

Ora, facendo tendere n a infinito nella (5.0.33), troviamo che

$$\frac{-1}{2\overline{\lambda}_j} \leq \frac{-1}{2\overline{\lambda}}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$, e quindi $\overline{\lambda} \geq \overline{\lambda}_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Ma questo è assurdo, visto che la successione $\{\overline{\lambda}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ deve essere superiormente illimitata. Quindi $\{\overline{\lambda}_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{\lambda_j[\rho]\}_{j\in\mathbb{N}}$. Questo conclude la dimostrazione. □

Siamo pronti a provare il seguente

Teorema 5.0.34. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ di misura finita. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Sia $C \subseteq \mathcal{R}[F]$ un insieme debolmente* compatto in $L^\infty(\Omega)$ tale che $\inf_{\rho\in C} \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} \rho(x) > 0$. Sia $M > 0$ e L_M definito come nel Corollario 5.0.20. Allora per ogni $h = 1, ..., |F|$ la funzione $\Lambda_{F,h}$ di $C \cap L_M$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in C \cap L_M$ associa $\Lambda_{F,h}[\rho]$ ammette massimi e minimi, e tali punti appartengono a $\partial C \cap L_M$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 5.0.30 segue che le funzioni di $C \cap L_M$ in $\mathbb{R}$ che a $\rho \in C \cap L_M$ associano $\lambda_j[\rho]$ sono continue rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Ovviamente $C \cap L_M$ essendo chiuso in un compatto, è compatto rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$. Allora le funzioni $\Lambda_{F,h}$ di $C \cap L_M$ in $\mathbb{R}$, essendo composte da somme e prodotti delle $\lambda_j[\rho]$, ammettono massimo e minimo in $C \cap L_M$. Per il Corollario 5.0.20 si ha necessariamente che tali punti non possono essere punti interni di C e quindi appartengono a $\partial C \cap L_M$. □

BIBLIOGRAFIA

[1] Adams RA (1975) *Sobolev spaces*, Academic Press, New-York-San Francisco-London

[2] Brezis H (1983) *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris

[3] Courant R, Hilbert D (1953) *Methods of mathematical physics* vol. I, Interscience, New York

[4] Cox SJ, McLaughlin JR (1990) Extremal eigenvalue problems for composite membranes, I *Appl. Math. Optim.* **22** 153-167

[5] Cox SJ, McLaughlin JR (1990) Extremal eigenvalue problems for composite membranes, II *Appl. Math. Optim.* **22** 169-187

[6] Deimling K (1985) *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin

[7] Evans L C (1998) *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI

[8] Folland GB (1977) *Real Analysis*, second edition, Jhon Wiley & Sons, Inc, New York

[9] Gilbarg D, Trudinger NS (1983) *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin-New York

[10] Henrot A (2006) *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin

[11] Kato T (1976) *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin

[12] Krein MG (1955) On certain problems on the maximum and minumum of the characteristic values and on the Lyapunov zones of stability *AMS Translations Ser.* **2** 163-187

[13] Lamberti PD (2008) Absence of critical mass densities for a vibrating membrane *Applied Mathematics and Optimization* **59** 319-327

[14] Lamberti PD, Lanza de Cristoforis M (2004) A real analyticity result for symmetric functions of the eigenvalues of a domain dependent Dirichlet problem for the Laplace operator *J. Nonlinear Convex Anal.* **5** 19-42

[15] Lamberti PD, Lanza de Cristoforis M (2006) Critical points of the symmetric functions of the eigenvalues of the Laplace operator and overdetermined problems *J. Math. Soc. Japan* **58** 231-245

[16] Prodi G, Ambrosetti A (1973) *Analisi non lineare*, I quaderno, Editrice tecnico scientifica, Pisa

[17] Rellich F (1969) *Perturbation theory of eigenvalue problems*, Gordon and Breach Science Publ., New York

[18] Tartar L (2000) *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh