UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Laboratorio di Calcolo Numerico
Laboratorio 8: Quadratura numerica

Andrea Franceschini

E-mail: franceschini@dmsa.unipd.it

Dispense:
http://www.math.unipd.it/~putti/teaching/calcolo_ambientale/index.html

05 Maggio 2016

Quadatura Numerica: metodo dei trapezi composito

Esempio 1

Si vuole calcolare l'integrale I:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

Scrivere un programma in fortran che implementi la formula dei trapezi composita utilizzando m sottointervalli. Posti $h = (b-a)/m$ e $x_0 = a$, l'integrale I viene approssimato con:

$$I \approx I_{T,m} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right), \tag{1}$$

dove $x_{i+1} = x_i + h$.

Istruzioni

Il programma è costituito da:

1. Un programma principale, chiamato *integrale*, che legge da file i valori a, b, ed m. Il main chiama la funzione *trapezi*(a, b, m). Alla fine del main si calcola l'errore di integrazione e si effettuano le stampe.
2. La funzione *trapezi*(a, b, m), che restituisce il valore approssimato dell'integrale, $I_{T,m}$. La sommatoria della formula (1) si può implementare come segue:

```
somma = 0.d0
do i = 0,m-1
    somma = somma + trap(x_i, x_i + h)
end do
```

   dove la variabile x_i va opportunamente inizializzata e aggiornata.
3. La funzione *trap*$(x_i, x_i + h)$, che implementa (1)
4. La funzione *funzF*, per il calcolo della funzione $f(x)$.

Integrali test

Verificare l'esattezza del codice con il calcolo dei seguenti integrali:

1. $I = \int_1^2 x \, \log(x) \; dx$
2. $I = \int_{-1}^1 5x^4 - 6x^2 + 1 \; dx$
3. $I = \int_0^5 (x-3)^{-2/3} \; dx$

Provare con $m = 1, 2, 4, 8, 16$ e calcolare l'errore tra l'integrale esatto e l'integrale approssimato, $E_{T,m} = |I - I_{T,m}|$.

Stampa dei rapporti

Automatizzare il calcolo dell'integrale per diversi valori di m. Infatti, si può scrivere: $m = \left(2^0, 2^1, \ldots, 2^8\right)$. Questo si ottiene inserendo la chiamata della funzione *trapezi* all'interno di un ciclo nel programma principale:

```
do j = 0,8
    m = 2**j
    int_trap = trapezi(a, b, m)
end do
```

Per ogni valore di m, stampare in una tabella i valori di: m, $I_{T,m}$, $E_{T,m}$ e $E_{T,m/2}/E_{T,m}$.

Domande

Il rapporto degli errori converge nella stessa maniera nei tre casi test? Graficare le tre funzioni integrande e capire a cosa sono dovuti i diversi comportamenti degli errori di integrazione.

Funzione test 1

$$I = \int_1^2 x \log(x) \; dx$$

m	I	$I_{T,m}$	$E_{T,m}$	$E_{T,m/2}/E_{T,m}$
1	0.636294E+00	0.693147E+00	0.568528E-01	–
2	0.636294E+00	0.650672E+00	0.143781E-01	0.395414E+01
4	0.636294E+00	0.639900E+00	0.360612E-02	0.398713E+01
8	0.636294E+00	0.637197E+00	0.902282E-03	0.399666E+01
16	0.636294E+00	0.636520E+00	0.225618E-03	0.399916E+01
32	0.636294E+00	0.636351E+00	0.564075E-04	0.399979E+01
64	0.636294E+00	0.636308E+00	0.141021E-04	0.399995E+01
128	0.636294E+00	0.636298E+00	0.352552E-05	0.399999E+01

Funzione test 2

$$I = \int_{-1}^{1} 5x^4 - 6x^2 + 1 \, dx$$

m	I	$I_{T,m}$	$E_{T,m}$	$E_{T,m/2}/E_{T,m}$
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	–
2	0.000000E+00	0.100000E+01	0.100000E+01	0.000000E+00
4	0.000000E+00	0.312500E+00	0.312500E+00	0.320000E+01
8	0.000000E+00	0.820312E-01	0.820312E-01	0.380952E+01
16	0.000000E+00	0.207520E-01	0.207520E-01	0.395294E+01
32	0.000000E+00	0.520325E-02	0.520325E-02	0.398827E+01
64	0.000000E+00	0.130177E-02	0.130177E-02	0.399707E+01
128	0.000000E+00	0.325501E-03	0.325501E-03	0.399927E+01

Funzione test 3

$$I = \int_0^5 (x-3)^{-\frac{2}{3}} \; dx$$

m	I	$I_{T,m}$	$E_{T,m}$	$E_{T,m/2}/E_{T,m}$
1	0.810651E+01	0.277678E+01	0.532974E+01	–
2	0.810651E+01	0.535689E+01	0.274962E+01	0.193835E+01
4	0.810651E+01	0.505348E+01	0.305303E+01	0.900619E+00
8	0.810651E+01	0.646110E+01	0.164542E+01	0.185548E+01
16	0.810651E+01	0.620609E+01	0.190042E+01	0.865816E+00
32	0.810651E+01	0.707578E+01	0.103073E+01	0.184376E+01
64	0.810651E+01	0.691078E+01	0.119573E+01	0.862011E+00
128	0.810651E+01	0.745756E+01	0.648955E+00	0.184255E+01

Cavalieri-Simpson

Pensare a come utilizzare i programmi appena scritti per implementare la formula di quadratura numerica di Cavalieri-Simpson.
La struttura del codice è la stessa della forumla dei trapezi, con l'unica differenza data dall'approssimazione:

$$I \approx I_{CS,m} = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{m-1} \left(f\left(x_i\right) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + f\left(x_{i+1}\right) \right),$$

dove $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ e $x_{i+1} = x_i + h$.