Esercizi e Complementi al Corso di Matematica A, a.a. 2007-2008, Prof. F.Rampazzo

November 9, 2007

Questo documento sarà aggiornato di continuo, e va inteso come complemento ufficiale per il corso in oggetto. Più tardi sarà trasformato in un link, ove si troveranno anche informazioni come il programma e le date degli esami.

1 Esercizi

1.1 Disequazioni in una variabile

$$2x - 1 \geqslant 0 \tag{1}$$

$$x^2 - 3 > 0 \tag{2}$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \tag{3}$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x} + 1 \tag{5}$$

$$\frac{1}{x-2} < 3 \tag{6}$$

$$\sqrt{3x-8} > \sqrt{5x+3} + \sqrt{x+5} \tag{7}$$

$$1 < \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 2 \tag{8}$$

$$\left|\frac{x^2-1}{x}\right| \geqslant \alpha x \quad (\alpha \text{ parametro reale}) \tag{9}$$

$$3\log_{1/2}(x-1) < 2\log_{1/2}(x) + \log_{1/2}(x-3) \tag{10}$$

$$x^{\sin x} \geqslant 1 \tag{11}$$

$$(x^2-3)^x < (x^2-3) \tag{12}$$

$$1-\cos x \geqslant \sqrt{\sin x} \tag{13}$$

1.2 Disequazioni in due variabili

$$y \leqslant -3x+2 \tag{14}$$

$$y < (x-1)^2 \tag{15}$$

$$x^2+y^2 \leqslant 4 \tag{16}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} > 1 \tag{17}$$

$$xy > 1 \tag{18}$$

$$y > \frac{1}{x} \tag{19}$$

$$\frac{x+y}{xy} < 1 \tag{20}$$

$$y \geqslant \sqrt{x^2-4y-4} \tag{21}$$

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+(y-1)^2}}} < 1 \tag{22}$$

$$\frac{\sqrt{1-\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+(y-1)^2}}} < 1 \tag{23}$$

1.3 Sistemi di equazioni in due variabili

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+1=0 \\ xy^2+x+1=0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} x^3-y-x=0 \\ xy+x^2-1=0 \end{cases} \tag{25}$$

1.4 Numeri complessi

Trovare e disegnare nel piano di Gauss le soluzioni dei seguenti problemi

$$z^3 - (3+i)z^2 + (2+3i)z - 2i = 0 \tag{26}$$

$$|z+i| = |z-1| \tag{27}$$

$$\begin{cases} Im(z^2 - \overline{z}^2) \leqslant 4 \\ |z-1-i| \leqslant 1 \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} |z-1-2i| \leqslant |z+1+2i| \\ |z+2+i| \leqslant |z-2-i| \\ Re(iz^2 - i\overline{z}^2) \leqslant 4 \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} (z+\overline{z})^2 \geqslant 1 \\ |z-2| \leqslant |z+i| \\ Im(z) - Re(z) \geqslant 0 \end{cases} \tag{30}$$

$$|z-i|^2 + \overline{z}(1+i) = z^2 + 1 + 2i + z(1+3i) \tag{31}$$

$$\frac{\sqrt{1-|z-1|}}{\sqrt{1-|z-i|}} < 1 \tag{32}$$

$$z^4 + 5\sqrt{3}iz^2 - 25 = 0 \tag{33}$$

$$z^4 = 16e^{i\pi/4} \tag{34}$$

$$z^3 = f(1+i\sqrt{3}) \quad , \quad f(z) = \frac{z+\overline{z}-18}{|z|} \tag{35}$$

$$|z+1| + |z-1| \leqslant 2\alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{36}$$

Dato il polinomio

$$P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + \lambda z + 6 \tag{37}$$

determinare il valore di $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $2i$ sia radice di $P(z)$; per tale valore di λ trovare le altre due radici di $P(z)$.

Dato il polinomio

$$P(z) = z^3 + \lambda z^2 + \mu z + 1 \tag{38}$$

trovare i due valori di λ e μ tali che i e $-i$ siano radici di $P(z)$; per tali valori di λ e μ trovare la terza radice di $P(z)$.

Dato il polinomio reale

$$P(x) = (x^3 - 1) \tag{39}$$

decomporlo in fattori primi nell' ambito dei polinomi reali.

Soluzione.

Primo metodo: ci si ricorda la decomposizione

$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$$

e si nota che il secondo fattore non puo' essere ulteriormente decomposto in quanto non ha radici reali (il discriminante $b^2 - 4ac$ è negativo).

Secondo metodo: si trovano le tre radici complesse di $1: 1, -1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Successivamente si applica il teorema per la decomposizione di polinomi reali (conseguenza del teorema fondamentale dell' algebra e di quello che afferma l' esistenza di radici coniugate per polinomi reali). Ottenendo

$$P(x) = (x-1)(x+1/2-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)(x+1/2+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i) =$$

$$(x-1)\Big((x+1/2)^2+3/4\Big)\Big(=(x-1)(x^2+x+1)\Big)$$

1.5 Limiti

Intuire il risultato dei seguenti limiti e verificarne l' esattezza usando la definizione di limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log(e^x+4) \tag{40}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(e^x+1) \tag{41}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{1}{e^x-1}\right) \tag{42}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh(x) \tag{43}$$

$$\lim_{x\to\pm 1^{\mp}} \operatorname{arctanh}(x) \tag{44}$$

Dire se i seguenti limiti esistono e in caso affermativo calcolarli :

$$\lim_{x\to+\infty} [x] \tag{45}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \tag{46}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a_n}{x-a} \qquad (n \text{ intero positivo}) \tag{47}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} \qquad (n,m \text{ interi positivi, } a_n,b_m\neq 0\ ) \tag{48}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx} \qquad n,m>0 \tag{49}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} \tag{50}$$

$$\lim_{x\to 0} sin(\frac{1}{x}) \tag{51}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha sin(\frac{1}{x}) \qquad \alpha>0 \tag{52}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+x-3}} \tag{53}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{(\pi-x)^2} \tag{54}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+\sqrt{x})(\log x+6)}{\sqrt{x^7+3x}-\sqrt{x^4-x}} \tag{55}$$

Soluzioni

(45)$+\infty$ (per confronto: $[x]\geqslant x-1$)
(46) 1/4 (da $(x^2-1)=(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$)
(47) $na^{(n-1)}$ (da $x^n-a^n=(x-a)\sum_{i=1}^n x^{n-i}a^i$)
(48) 0 se $n<m$;
$+\infty$ se $n>m$ e $a_n/b_n>0$;
$-\infty$ se $n=m$ e $a_n/b_n<0$;
a_n/b_n se $n=m$;
(da $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_nx^n(1+o(1))$
e $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0=b_mx^m(1+o(1))$).
(49) n/m (da $\frac{\sin nx}{\sin mx}=\frac{\sin nx}{mx}\frac{nx}{\sin mx}n/m$);
(50) 0 (dividendo numeratore e denominatore per x)

(51) *non esiste il limite* perchè, posto $f(x) \doteq \sin\frac{1}{x}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi}) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2n\pi + \pi/2}) = 1.$$

E in base ad un noto teorema (quello che sul testo è indicato come "teorema ponte"), se il limite esistesse questi due ultimi limiti di successioni dovrebbero coincidere.

(52) 0 (da $x^\alpha = o(1)$ e dal fatto che sin è una funzione limitata)

(53) 0 (da

$$\tfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+x-3}} + = \tfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+x-3}}\,\tfrac{x+\dot{\sqrt{x^2+3}}}{x+\sqrt{x^2+x-3}}\,\tfrac{x+\dot{\sqrt{x^2+x-3}}}{x+\sqrt{x^2+3}} =$$

$$\tfrac{-3x(2+o(1))}{(-x+3)(2+o(1))}$$

(54) 1/4 (operare la sostituzione $y = \pi - x$)

(55) 0 (da

$$\frac{(x^3+\sqrt{x})(\log x + 6)}{\sqrt{x^7+3x} - \sqrt{x^4-x}} = \frac{x^3 \log x + o(x^3 \log x)}{\sqrt{x^7+3x} + o(\sqrt{x^7+3x})})$$

1.6 Studi di funzione

$$\frac{2x+5}{5x+7}$$

$$x^2(x^2-1)^{-1}$$

$$\frac{x}{x^2-1}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

$$\sin\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right)$$

$$e^{-\frac{1}{x}}$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la seguenti funzione:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \forall x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Trovare i valori di α per i quali f_α è ovunque derivabile e quelli per cui la funzione derivata risulta continua. (Risp.: $\alpha \geqslant 2$ e $\alpha > 2$)

1.7 Esercizi "teorici"

1. Dimostrare che se X è un insieme finito $f: X \to X$ è iniettiva se e solo se è suriettiva

2. Calcolare il perimetro e l'area del poligono regolare di N lati inscritto nella circonferenza di raggio R

3. Calcolare il perimetro e l'area del poligono regolare di N lati circoscritto alla circonferenza di raggio R

4. Data la funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ , \ x \leqslant 0 \\ \lambda x + 1 \ , \ x > 0 \end{cases}$$

   disegnarne il grafico e discuterne iniettività, suriettività e invertibilità al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Per i valori di λ per cui f è invertibile trovare l'espressione esplicita della funzione inversa f^{-1} e disegnarne il grafico.

5. Calcolare per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{4N} i^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{4N+2} i^n$$

6. Calcolare la somma delle n radici n-esime dell'unità. (Suggerimento: porre $\omega = e^{2\pi i/3}$; allora si deve calcolare
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1} \; . \Big)$$
Giustuficare il risultato con un argomento geometrico che sfrutti le simmetrie (sia per n pari che per n dispari).

7. Dire se si può considerare la legge $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ $(n \geqslant 2)$ una funzione di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, motivando la risposta.

8. Mostare che se una seccessione (a_n) diverge a $+\infty$ allora
$$lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$$
(Sfruttare
$$(1 + \frac{1}{[a_n] + 1})^{[a_n]} \leqslant (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \leqslant (1 + \frac{1}{[a_n]})^{[a_n]+1}$$

2 Complementi

2.1 Aperti, chiusi, funzioni continue.

Per la definizioni di **punto di accumulazione**, **punto isolato**, **punto interno** , **insieme aperto** , e **insieme chiuso** si veda il libro di testo.

Inoltre, diversamente dal testo, chiameremo Teorema di Bolzano-Weirstrass il seguente risultato (che nel libro di testo è il Teorema 5.3):

Teorema 2.1 Bolzano-Weirstrass. *Una successione limitata ha una sottossuccessione convergente.*

Osservazione 2.1 *Si noti che ogni successione convergente è limitata (dimostrarlo per esercizio!), ma il viceversa è falso (es.* $a_n \doteq \cos(n\pi)$*). Il Teorema di Bolzano-Weirstrass afferma che tuttavia si trova la convergenza pur di passare ad una (opportuna) sottosuccessione.*

Il seguente teorema fornisce due utili caratterizzazioni (cioè condizioni necessarie e sufficienti) degli insiemi chiusi.

Teorema 2.2 *Sia $C \subseteq \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti (cioè ognuna di esse implica le altre due):*

1) C è chiuso;

2) se $x \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per C allora $x \in C$;

3) se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $x_n \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $x_n \to x$, allora $x \in C$.

Dimostrazione. Dimostreremo che 1) implica 2), che 2) implica 3), e che 3) implica 1), il che chiude il cerchio.

Dimostrazione che 1) implica 2):

Per assurdo: Sia $x \in \mathbb{R}$ di accumulazione per C, e sia. $x \notin C$. In particolare $x \in \mathbb{R}\backslash C$. Poiché $\mathbb{R}\backslash C$ è aperto (in quanto C è chiuso per ipotesi) il punto x risulta interno a $\mathbb{R}\backslash C$, cioè *esiste* $\epsilon > 0$ tale che $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset \mathbb{R}\backslash C$. Ne consegue che $]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap C = \emptyset$, contro l' ipotesi che x sia di accumulazione per C.

Dimostrazione che 2) implica 3):

Per assurdo: sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $x_n \in C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $x_n \to x$, e $x \notin C$. Per trovare la contraddizione basta mostrare che x è di accumulazione per C, il che, secondo l' ipotesi 2), comporta che $x \in C$. Ora, poiché $x_n \to x$, *per ogni* $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $a_n \in]x-\epsilon, x+\epsilon[$ per ogni $n > \bar{n}$. Poiiché $a_n \in C$, questo implica che $(]x-\epsilon, x+\epsilon[\backslash\{x\}) \cap C \neq \emptyset$, e dunque x è di accumulazione per C.

Dimostrazione che 3) implica 1):

Si hanno due casi. O $C = \mathbb{R}$, e allora C è chiuso e 1) è dimostrata. Nel caso opposto, $C \neq \mathbb{R}$, procediamo per assurdo. Se C non fosse chiuso, cioè $\mathbb{R}\backslash C$ non fosse aperto, esisterebbe $x \in \mathbb{R}\backslash C$ (che è non vuoto per l'ipotesi $C \neq \mathbb{R}$) *non interno* a $\mathbb{R}\backslash C$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe un punto $x_n \in C$ tale che $x_n \in]x-1/n, x+1/n[$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chiaramente converge a x. Pertanto, per l' ipotesi 3), $x \in C$, in contraddizione con $x \in \mathbb{R}\backslash C$.

Un importante conseguenza del Teorema **??** è il seguente corollario:

Corollario 2.1 *Sia $C \subset \mathbb{R}$ un insieme chiuso e limitato. Allora esistono il massimo ed il minimo di C*

Dimostrazione. Mostriamo che esiste il massimo. La dimostrazione dell' esistenza del minimo è analoga.

Poiché C è superiormente limitato, per la proprietà di completezza esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $s = \sup C$. Basta ora dimostrare che $s \in C$. A tale scopo, osserviamo che, per le proprietà dell' estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in C$ tale che

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leqslant s.$$

Perciò, dal teorema del confronto si ha che la successione (x_n) converge a s. Poiché C è chiuso, dal teorema 2.2 segue che $s \in C$.

Rimandiamo al testo per la definizione di *continuità* ed alcuni relativi risultati. Il seguente risultato p — noto come Teorema di Weierstrass— afferma l' esistenza di un massimo e di un minimo per una funzione *continua definita su un insieme chiuso e limitato*. Prima di studiarlo si costruisca un esempio per ognuno dei seguenti tre casi (il che mostra che le ipotesi del Teorema di Weirstrass sono essenziali): i) una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$, con E limitato non chiuso, che non ha massimo; ii)una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}$, con E chiuso non limitato, che non ha massimo; iii) una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ non continua in un punto $x_0 \in E$, con E chiuso e limitato, che non ha massimo.

Teorema 2.3 (Weirstrass). *Sia E un insieme chiuso e limitato, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono sia il massimo che il minimo di f in E.*

Dimostrazione. Poniamo

$$s \doteq \sup f(E).$$

Siccome non sappiamo a priori se $f(E)$ sia superiormente limitato, intendiamo che in caso contrario $\sup(f(E)) = +\infty$. Ora dimostreremo che in realtà tale estremo superiore appartiene a $f(E)$ e dunque è un massimo (e perciò $< +\infty$!). Questo chiaramente dimostra il teorema.

Dalle proprietà dell' estremo superiore si ha che (dimostrarlo!) esiste una successione (y_n), con $y_n \in f(E)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tale che

$$\lim y_n = s.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in E$ tale che $y_n = f(x_n)$. In particolare (x_n) è una successione a valori in E, e dunque essa è limitata (essendo E limitato). Per il Teorema di Bolzano-Weirstrass esiste quindi una sottosuccessione $(x_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ *convergente ad un elemento* $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Poiché E é chiuso, dal Teorema 2.2 segue che $\bar{x} \in E$. Perció, dal "Teorema ponte" (Teorema 6.1 nel libro) e dalla continuità di f, si ha

$$f(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_{k'}) = \lim_{k' \to \infty} y_{k'} = s.$$

Dunque $s \in f(E)$, cioè

$$s = f(\bar{x}) = \max f(E).$$