Brevi appunti sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

Versione provvisoria. Aggiornamenti sulla pagina web del docente http://www.math.unipd.it/˜ rampazzo

1. Introduzione

Le *equazioni differenziali* costituiscono un capitolo vastissimo dell'indagine matematica, almeno da un quattrocento anni a questa parte[1].

In parole povere, in una equazione differeziale :

i)una soluzione —se esiste!— è da cercarsi in una certa classe di funzioni (a differenza delle equazioni finite, dove una soluzione é un numero, una coppia di numeri, etcetc.);

ii) la relazione che definisce l'equazione stessa contiene la funzione incognita *e le sue derivate.*

Ad esempio, se con $y(x)$ indichiamo la funzione incognita,

$$y'(x) - y(x) = 0 \qquad y''(x) - y'(x) = \cos x$$

sono equazioni differenziali (del primo e secondo ordine, rispettivamente, l'ordine dell' equazione essendo il massimo ordine di derivazione che appare nell' equazione stessa).

Invece,

$$\sqrt{1 + (y(x))^2} = 1 + e^x$$

non è un'equazione differenziale [2].

Il campo delle equazioni differenziali costituisce a tutt'oggi l' oggetto di studio per intere scuole di matematici, e moltissimi problemi restano ancora da *risolvere.* (L' uso del corsivo è riferito al fatto che "risolvere" qui spesso non si riferisce all' idea di "trovare una soluzione", il che resta comunque il fine ultimo, anche se spesso irrealizzabile.)

Qui ci occuperemo di una porzione veramente minuscola dell' intero ambito di questa vastissima materia, e cioè di alcune semplici classi di *equazioni differenziali ordinarie.* Queste sono caratterizzate dal fatto che le funzioni incognite sono *funzioni di una sola variabile*, come quelle studiate fin qui in questo corso. *Per brevità*, dunque, diremo *equazione differenziale* al posto di *equazione differenziale ordinaria.*

Definizione 1.1. *Data un'equazione differeziale, l'insieme delle sue soluzioni viene detto soluzione generale dell' equazione*[3]

---

[1]Essendo modelli di fenomeni naturali basato sulla nozione di derivata, le equazioni differenziali appaiono in realtà molto prima, in forme arcaiche. Una sistemazione organica avviene tuttavia negli ultimi quattro secoli

[2]Anche se ha una, anzi due, soluzioni continue:

$$y_1(x) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x}, \qquad y_2(x) = -\sqrt{e^{2x} + 2e^x}.$$

[3]Qualche volta tale insieme è anche chiamato *integrale generale* della soluzione, ad indicare il fatto che la più elementare delle equazioni differenziali è la ricerca della primitativa di una funzione.

Le soluzioni particolari che formano la soluzione generale sono spesso parametrizzati da un certo numero di parametri che vengono determinati dall' imposizione delle condizioni iniziali.

2. Tipi di equazioni differenziali

Un' equazione differenziale ha la seguente forma

$$G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \tag{1}$$

dove G è una funzione, e $y^{(i)}$ sta per "derivata i-esima" (le derivate prime e seconde, per semplicità, si scrivono come al solito, cioè y' e y''.).

• Il numero n, cioè l' ordine di derivazione massimo che appare in (**??**), è detto *l'ordine dell' equazione (**??**)*. Cosí, ad esempio, le equazioni

$$\begin{gathered} y^{(3)}y - y'y''\cos x + \arctan x^7 = 0 \\ y' + x^4 y"y - 3\ln x = 0 \\ y'y = 2x^3 \end{gathered}$$

sono, rispettivamente di terzo , secondo, e primo ordine.

Convenzione sulla notazione: :Quando non ci sia il rischio di confusione, ometteremo di scrivere la dipendenza di y da x. Per esempio, scriveremo, rispettivamente, y, y', e y'' al posto di $y(x)$, $y'(x)$, e $y''(x)$.

• L'equazione (**??**) è detta in *forma esplicita* se essa si puó esplicitare rispetto alla derivata di ordine massimo, vale a dire se puó essere scritta nella forma

$$y^{(n)} - F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

2.1. Tre tipi particolari di equazione differenziale.

In queste brevi note concentreremo l' attenzione su tre tipi particolari di equazione differenziale, tutte in forma esplicita:

1) Le **equazioni lineari del primo ordine**. Hanno forma

$$y' - a(x)y - b(x) = 0$$

dove a e b sono funzioni date della variabile x.(Perciò, rispetto alla forma generale: $n = 1$, e $F(x, y) = a(x)y - b(x)$.) Sono dette "lineari" perché F è lineare nella variabile y [4]

2) Le **equazioni (del prim'ordine) a variabili separabili.** Hanno forma

$$y' = f(x)g(y).$$

(Perciò, rispetto alla forma generale: $n = 1$, e $F(x, y) = f(x)g(y)$.) In generale non sono lineari, ma la particolare forma di F come prodotto di una funzione $f(x)$ e una funzione $g(y)$ in molti casi permette di determinare una soluzione.

---

[4] In realtá il termine è inesatto, ma lo si usa lo stesso, per tradizione. Dovrebbero essere dette "affini", e lineari solo nel caso in cui $b = 0$

3) Le **equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti**. Hanno forma

$$y'' + ay' + by - f(x) = 0,$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ è una funzione, detta talvolta "termine forzante". (Perciò, rispetto alla forma generale: $n = 2$, e $F(x, y, y') = ay' + by - f(x)$.) "Lineari" perchè F lo è nelle variabili y e y'–ma si veda la nota a piè di pagina sull' uso improprio del termine lineare–, e "a coefficienti costanti" perchéa a e b sono delle costanti, anziché delle funzioni di x, come nel caso generale.

3. Esistenza e unicitá delle soluzioni

Questo problema, delicato e importante, non verrá trattato in queste stringatissime note. Diamo solo un paio di definizione equazione differenziale un teorema che giustifica la trattazione dei casi particolari che verrá svolta nei prossimi paragrafi.

3.1. IL problema di Cauchy. Per una equazione differenziale generale in forma esplicita (**??**) si possono dare delle *condizioni iniziali*:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{3}$$

dove x_0 è' detto l "istante iniziale" e $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$ sono i *valori iniziali* di y e delle sue derivate fino all' ordine $(n - 1)$.

Il problema di Cauchy per (**??**) consiste nel ricercare una funzione $y : E \to \mathbb{R}$ –dove E, l' "intervallo di esistenza" della soluzione y, è un intorno di x_0— che soddisfi sia l'equazione differenziale (**??**) che le condizioni iniziali (3):

$$\begin{cases} y^{(n)} - F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0, \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} = y_0^{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

Nei casi particolari del primo e second' ordine —che sono gli unici che verranno qui considerati—, il problemi di Cauchy divengono:

$$\begin{cases} y' - F(x, y) = 0 \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

e

$$\begin{cases} y'' - F(x, y, y') = 0 \\ \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{6}$$

rispettivamente.

Teorema 3.1. *Supponiamo che le funzioni $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$, $g(y)$) siano continue. Allora:*

A) *Ognuno dei problemi di Cauchy 1),2) e 3) considerati al paragrafo precedente ammette una soluzione y in un opportuno intorno E di x_0;*

B) *Nei problemi di Cauchy per equazioni di tipo 1) e 3) (vale a dire, lineari, di primo ordine e di secondo ordine a coefficienti costanti) l' intervallo E di definizione di una soluzione si può estendere al comune intervallo di definizione delle funzioni a, b, e f. Inoltre, le soluzioni del problema di Cauchy sono* **uniche**.

C) *Nel caso in cui la funzione g sia derivabile, con derivata limitata, allora vale la conclusione di* **B)** *anche per i problemi di Cauchy per equazioni di tipo 2) (vale a dire, a variabili separabili).*

Basandoci su quanto sopra, ci occuperemo ora della risoluzione esplicita di alcune classi di equazioni.

4. Equazioni lineari del primo ordine

. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - a(x)y - b(x) = 0 \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7}$$

nell' ipotesi che a e b siano funzioni continue e derivabili con derivate limitate in un intorno I di x_0.

Ci occupiamo prima di trovare soluzioni dell' equazione, equazione differenziale in sequito imporremo la condizioni iniziale $y(x_0) = y_0$.

• *La soluzione generale è data da*

$$y(x) = e^{A(x)} \left(k + \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s) ds \right) \tag{8}$$

Infatti, sia $y : I \to \mathbb{R}$ una soluzione dell' equazione (che per quanto visto nel Teorema 3.1, esiste). Sia $A(x)$ definita da

$$A(x) \doteq \int_{x_0}^{x} a(s) ds$$

In particolare, $A'(x) = a(x)$ cioè A è una primitiva di a. Moltiplicando entrambi i membri dell' equazione per la funzione $e^{-A(x)}$ si ottiene

$$e^{-A(x)} y' - e^{-A(x)} a(x) y = e^{-A(x)} b(x),$$

Si noti che

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-A(x)} y \right) = e^{-A(x)} y' - e^{-A(x)} a(x) y,$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-A(x)} y \right) = e^{-A(x)} b(x)$$

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, integrando in entrambi i membri si ottiene che

$$e^{-A(x)} y = \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s) ds + k,$$

dove k è una costante arbitraria.

Moltiplicanto entrambi i membri per $e^{A(x)}$ si ottiene la soluzione generale(8).

Vogliamo ora ricavare la soluzione del problema di Cauchy (7). Chiamiamo per un momento y_k la generica soluzione particolare, per ricordare la dipendenza dal parametro k.

Per determinare il valore di k, dobbiamo imporre la condizione iniziale:

$$y_k(x_0) = y_0$$

vale a dire

$$e^{A(x_0)}\left(k + \int_{x_0}^{x_0} e^{-A(s)}b(s)ds\right) = y_0$$

Poichè $A(x_0) = 0$ e $\int_{x_0}^{x_0} e^{-A(s)}b(s)ds = 0$, si ottiene

$$k = y_0.$$

La soluzione del problema di Cauchy (7) è dunque completamente determinata:

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(s)}b(s)ds$$

Scrivendo $A(x)$ esplicitamente, i.e. $A(x) \doteq \int_{x_0}^{x} a(s)ds$, si ottiene

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + \int_{x_0}^{x} (e^{-\int_s^x a(t)dt})b(s)ds \tag{9}$$

4.1. Esempi. Vediamo alcune applicazioni della formula risolutiva (9):

1) Se le funzioni a e b sono costanti, allora la formula risolutiva diviene

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(x-x_0)} - 1)$$

Per esempio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha soluzione $y(x) = e^x$ (ma lo sapevamo già).

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y - 4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

ha soluzione

$$y(x)\left(= 2e^{3x} - \frac{4}{3}(e^{3x-1})\right) = \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$$

2) Si consideri il problema di Cauchy,

$$\begin{cases} y' = (\sin x)y - 4\sin x \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

e se ne trovi la soluzione $y : \mathbb{R}\mathbb{R}$.

La formula risolutiva dà:

$$y(x) = -4\int_0^x e^{\int_s^x \sin(t)dt}\sin(s)ds.$$

Perciò:

$$y(x) = 4 - 4e^{1-\cos x}$$

5. Equazioni differenziali a variabili separabili

Consideriamo un problema di Cauchy avente forma

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0\,, \end{cases} \quad , \tag{10}$$

dove $f : I \to \mathcal{R}$ èuna funzione limitata continua definita su di un intervallo I contenente x_0 al suo interno, e $g : J \to \mathcal{R}$ èuna funzione definita in un intervallo J contenente y_0 al suo interno, derivabile con derivata limitata.

Come nel caso precedente, ci occupiamo prima di trovare la soluzione generale, cioé una famiglia di soluzioni della sola equazione , parametrizzate da un numero reale k. Dopodiché imporremo la condizione iniziale.

Sia $y : E \to \mathbb{R}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = f(x)g(y)\,.$$

(Per il Teorema (3.1) tale soluzione esiste. Si noti che deve essere $E \subset Y$, $y(E) \subset J$.)

I caso: $g(y_0) \neq 0$

Poiche $g(y(x_0)) = g(y_0) \neq 0$, per continuità deve esistere un intervallo $\tilde{E} \subset E$ che sia intorno dix_0 e tale che

$$g(y(x)) \neq 0$$

per ogni $x \in \tilde{E}$. Allora, dividendo, per ogni $x \in E'$, entrambi i membri per $g(y(x))$ si ottiene

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \qquad \forall x \in E'\,.$$

Sia $H(y)$ una primitiva di $\frac{1}{g}$ e sia $F(x)$ una primitiva di f. Allora:

$$H(y(x)) = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{ds}\big(H(y(s))\big)ds + k = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{g(y(s))}ds + k = \int_{x_0}^{x} f(s)ds + k = F(x) + k\,.$$

Dunque

$$H(y(x)) = F(x) + k\,. \tag{11}$$

Questo dàla soluzione $y(x)$ in forma implicita. La si può esplicitare se H èinvertibile. Supponiamo che ciò sia vero, e denotiamo l' inversa di H con H^{-1}. Risulta, componendo H^{-1} con il membro destro e sinistro di quest'ultima relazione:

$$y(x) = H^{-1} \circ (F(x) + k)$$

Come si vede, anche in questo caso, la soluzione dell' equazione differenziale risulta dipendere da un parametro reale k. Ora si può determinare *la* soluzione del problema di Cauchy semplicemente imponendo la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0.$$

Utilizzando la forma implicita (11) si ottiene:

$$k = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0).$$

Pertanto, la formula risolutiva del problema di Cauchy (6) risulta essere

$$y(x) = H^{-1} \circ \Big(F(x) + H(y_0) - F(x_0)\Big) \tag{12}$$

II caso: $g(y_0) = 0$ per un $\bar{x} \in E$

In tal caso la *funzione costante* $\hat{y}(x) \doteq y_0$ ($\forall x \in I$), è *una soluzione della nostra equazione differenziale.* Infatti

$$0 = f(x)g(y_0) = g(\hat{y}(x)) = \hat{y}'(x)$$

Per l unicità della soluzione (enunciata nel Teorema 3.1), *la* funzione costante

$$\hat{y}(x) \doteq y_0$$

è la soluzione del problema di Cauchy (6).

Esercizio (Non Facile). Provare che la soluzione $y : E \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy (6) verifica la seguente alternativa: *o $y(x)$ è costantemente uguale a y_0, oppure non può mai succedere che essa sia costante in un sotto-intervallo $K \subset E$.*

5.1. Esempi. Anzichè memorizzare la formula di risoluzione, è più utile (e sensato) affrancarsi con il metodo, tramite qualche esercizio.

1)

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

Siamo nel I caso:

Dividiamo per $g(y) = y$:

$$\frac{y'}{y} = x$$

Una primitiva di $\frac{1}{y}$ è $H(y) = \ln y$ (siamo in un intorno di 1, perciò $y > 0$). Una primitiva di $f(x) = x$ è $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Dunque integrando si ottiene

$$\ln y(x) = \frac{x^2}{2} + k.$$

Determiniamo k con la condizione iniziale:

$$\ln 1 = 0 + k,$$

dunque $k = 0$.

La soluzione è dunque:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

2)

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+x^2} \\ y(1) = 1\,, \end{cases}$$

Siamo nel I caso:

Dividiamo per $g(y) = \sqrt{1+y^2}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Una primitiva di $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ è $H(y) = \text{settcosh}\; y$. Una primitiva di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è $F(x) = \arctan x$. Dunque integrando si ottiene

$$\text{settcosh}\; y(x) = \arctan x + k.$$

Determiniamo k con la condizione iniziale:

$$\text{settcosh}\; 1 = 1 + k,$$

dunque $k = 0$.

La soluzione è dunque:

$$y(x) = \cosh \circ \arctan x \quad \left(= \frac{e^{\arctan x} + e^{-\arctan x}}{2} \right).$$

3)

$$\begin{cases} y' = \sin x \sin y \\ y(1) = \pi\,, \end{cases}$$

Siamo nel II caso, perché $g(y_0) = g(\pi) = \sin\pi = 0$: dunque l'unica soluzione é quella costante:

$$y(x) = \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6. Equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti costanti

Consideriamo un problema di Cauchy avente forma

$$
\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \,, \end{cases} \tag{13}
$$

dove $f : I \to \mathbb{R}$ èuna funzione limitata, continua, definita su di un intervallo I contenente x_0 al suo interno. Per il Teorema 3.1 esiste ed è unica una soluzione del problema di Cauchy (13) definita in I. Si noti come ora, trattandosi di un problema di second' ordine, le condizioni iniziali siano su due funzioni: la y e la sua derivata prima y', cioè la velocità. [5]

Come nei casi precedenti, ci occupiamo prima di trovare una soluzione generale, vale a dire la famiglia di tutte soluzioni della sola equazione, parametrizzate questa volta da due parametri reali k_1, k_2. Dopodiché imporremo le condizione iniziali. Ci serve a tal fine un risultato generale, che giustifichi perché *bastino due parametri.*

Cominciamo col dare delle definizioni. Consideriamo la nostra equazione differenziale:

$$
y'' + ay' + by = f(x) \tag{14}
$$

Ad essa associamo un'altra equazione, ottenuta ponendo $f(x) = 0$:

$$
y'' + ay' + by = 0 \tag{15}
$$

Quest'ultima equazione si chiama *equazione omogenea associata a (14).* Vedremo tra le soluzioni dell'equazione di partenza (14) e dell'omogenea associata (15) esiste una semplice relazione, utile per il calcolo delle prime quando si conoscono le seconde.

Si ha, precisamente:

Teorema 6.1. *Siano $\hat{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una soluzione dell'equazione non omogenea (14). Allora $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione non omogenea (14) se e solo se si ha*

$$
y \doteq \hat{y} + \tilde{y}
$$

dove $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata (15).

Osservazione importante. Questo teorema dà un'indicazione su come costruire la soluzione generale (cioè tutte le soluzioni) per l'equazione non omogenea (14) posto che si conoscano

i) *una soluzione particolare* della stessa (14)

e

[5] Rammentiamo che le equazioni di secondo ordine, lineari e non, trovano la più importante apllicazione in Meccanica. La seconda legge di Newton infatti non è che una equazione differenziale del secondo ordine:

$$
y'' = \frac{F(y, y', x)}{m}
$$

(F è la forza e m è la massa). E ovviamente, le condizioni iniziali sono "posizione" e "velocità".

ii) *la soluzione generale (cioè tutte le soluzioni) dell'omogenea associata* (15). Infatti il teorema dice che ogni soluzione di (14) è la somma della soluzione particolare $\hat{y}$ e di una (opportuna) soluzione dell'omogenea (15). Da qui si deduce il seguente procedimento generale.

PROCEDIMENTO PER TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY (13).

Passo 1 Trovare la soluzione generale dell'omogenea associata (15). In base al Teorema 7.2, ciò significa che troveremo una classe di soluzioni $\tilde{y}_{k_1,k_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dipendenti da due parametri k_1, k_2. A tale scopo si veda il paragrafo 7.

Passo 2 Trovare una soluzione particolare $\hat{y}$ dell'equazione non omogenea (14). A tale scopo si veda il paragrafo 8.

Passo 3 Considerare le funzioni, dipendente dai parametri k_1, k_2,

$$y_{k_1,k_2} \doteq \tilde{y}_{k_1,k_2} + \hat{y}.$$

In base al teorema 6.1 le y_{k_1,k_2} costituiscono la soluzione generale dell'equazione non omogenea (14).

Passo 4 Determinare il valore particolare dei parametri k_1, k_2 affinchè y_{k_1,k_2} sia proprio la soluzione del Problema di Cauchy (13). A tale scopo basta imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{l} y_{k_1,k_2}(x_0) = y_0 \\ y'_{k_1,k_2}(x_0) = y'_0 \end{array}$$

.

Esempio. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{array}{l} y'' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}$$

Passo 1: Si verifica che sia $\sin x$ che $\cos x$ sono soluzioni dell'omogenea associata

$$y'' + y = 0.$$

Esse sono certamente linearmente indipendenti. Dunque la soluzione generale dell'omogenea associata è

$$\tilde{y} \doteq k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

Passo 2: Si verifica che la funzione

$$\hat{y}(x) \doteq \frac{e^x}{2}$$

è una soluzione particolare dell' equazione non omogenea di partenza (ma non del problema di Cauchy!)

Passo 3: Si considera la classe di funzioni

$$y(x) \doteq \hat{y}(x) + \tilde{y}(x) = \frac{e^x}{2} + k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

che, per quanto visto, è la soluzione generale dell' equazione non omogenea di partenza. Si noti che

$$y'(x) = \frac{e^x}{2} + k_1 \cos x - k_2 \sin x$$

Passo 4: Si impongono le condizioni iniziali:

$$\begin{array}{l} 0 = y(0) = \frac{1}{2} + k_2 \\ 1 = y'(0) = \frac{1}{2} + k_1 \end{array}$$

Ne deriva: $k_2 = -\frac{1}{2}$, $\quad k_1 = \frac{1}{2}$.

Perciò la soluzione del nostro Problema di Cauchy è

$$y(x) \doteq y(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

Commento. Naturalmente i passi più difficili sono il primo e il secondo. Nel precedente esempio sia le soluzioni dell'omogenea che la soluzione particolare della non omogenea sono stati dati miracolisticamente. Tuttavia c'è un modo sistematico di procedere, e questo sarà esposto nei due paragrafi seguenti.

Errore incredibilmente frequente. Un errore commesso spesso dallo studente o studentessa acritici è il seguente: trovata la soluzione generale $\tilde{y}_{k_1,k_2}$ della omogenea associata, si vanno ad imporre a questa le condizioni iniziali, e poi si aggiunge la soluzione particolare $\hat{y}$. Si tratta di un grave errore che denota uno studio puramente mnemonico (e quindi destinato al fallimento). Conviene rifletterci ora anziché dopo (l'esame!). $\diamondsuit$

7. Equazioni differenziali lineari omogenee del II ordine a coefficienti costanti

Abbiamo visto nel precente paragrafo che un passo importante (il Passo 1) nella determinazione delle soluzioni del problema di Cauchy per un' equazione del secondo ordine a coefficienti costanti è la determinazione delle soluzioni dell' equazione omogenea associata.

Ciò motiva lo studio delle soluzioni delle equazioni omogenee.

Ci serve la nozione di funzioni linearmente indipendenti:

Definizione 7.1. *Sia I un intervallo reale. Due funzioni $\phi_1 : I \to \mathbb{R}$ e $\phi_2 \to \mathbb{R}$ si dicono* **linearmente dipendenti** *se esiste una coppia reale $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tale che*

$$\alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I. \tag{16}$$

$\phi_1 : I \to \mathbb{R}$ e $\phi_2 \to \mathbb{R}$ si dicono **linearmente indipendenti** *se non sono linearmente dipendenti, cio*è *se l'unica coppia per cui vale (16)* è *la coppia nulla* $(\alpha, \beta) = (0,0)$

Esempio 1.

$I = \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

Le funzioni $e^{\lambda_1 x}$, e $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Infatti, se $\lambda_1 = \lambda_2$ le due funzioni coincidono e dunque sono linearmente dipendenti —basta prendere $(\alpha, \beta) = (1, -1)$. Viveversa, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e

$$\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

allora necessariamente si ha $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Infatti, se per esempio fosse $\alpha \neq 0$ allora si ricaverebbe —dividendo tutto per $\alpha e^{\lambda_1 x}$—

$$\frac{\beta}{\alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = -1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

il che è ovviamente falso. Una simile contraddizione si trova anche nel caso in cui $\beta \neq 0$, cosicché l'asserto è provato.

Esempio 2.
$I = \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = e^{\lambda x}$, $\phi_2(x) = xe^{\lambda x}$.
Per qualsiasi valore di λ, le funzioni $e^{\lambda x}$, e $xe^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti.
Infatti,

$$\alpha e^{\lambda x} + \beta x e^{\lambda x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

prendendo $x = 0$ si ottiene $\alpha = 0$. Quindi, da $\beta x e^{\lambda x} = 0$ (valida, per esempio per $x = 1$) si ottiene anche $\beta = 0$.

TEOREMA 7.2. **(A)***Se $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'omogenea associata (15), e $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, allora*

$$y \doteq k_1 y_1 + k_2 y_2$$

è *soluzione dell'omogenea associata (15).*

(B)*Inoltre, se $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'omogenea associata (15)* e sono linearmente indipendenti*, allora* per ogni *soluzione $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di (15) esiste (unica!) una coppia $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che*

$$\tilde{y} \doteq k_1 y_1 + k_2 y_2$$

.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo **(A)**. Siano $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzioni dell'omogenea associata (15), $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, e sia

$$y \doteq k_1 y_1 + k_2 y_2.$$

Proviamo che y è soluzione dell'omogenea associata (15). Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = (y_1(x) + y_2 v)'' + a(y_1(x) + y_2(x))' + b(y_1(x) + y_2(x)) =$$

$$(y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)) + (y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)) = 0 + 0 = 0$$

Omettiamo la dimostrazione di **(B)**, che si può trovare in qualsiasi libro di testo.

DEFINIZIONE 7.3. *L'equazione di secondo grado*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{17}$$

si dice equazione caratteristica dell' equazione differenziale omogenea (15). Il polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ si dice polinomio caratteristico (di (15)).

Consideriamo il determinante del polinomio caratteristico:

$$\Delta \doteq b^2 - 4c.$$

Com'è noto,
i) (17) ha due soluzioni reali distinte se e solo se $\Delta > 0$
ii) (17) ha un'unica soluzione reale distinte se e solo se $\Delta = 0$
iii) (17) ha due soluzioni complesse coniugate distinte se e solo se $\Delta < 0$
Il seguente teorema mostra come l' equazione caratteristica permetta di trovare la soluzione generale dell' equazione omogenea (15). Come ci si aspettava dal precedente Teorema (7.2), tale soluzione generale è un insieme di funzioni dipendenti da due parametri.

Teorema 7.4. *i) Se $\Delta > 0$, dette λ_1, λ_2 le soluzione dell' equazione caratteristica, la soluzione generale dell' equazione differenziale (15) è*

$$\tilde{y}(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x},$$

dove $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Se $\Delta = 0$, detta λ l'unica soluzione dell' equazione caratteristica, la soluzione generale dell' equazione differenziale (15) è

$$\tilde{y}(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 x e^{\lambda x} = (k_1 + k_2 x) e^{\lambda x},$$

dove $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

iii) Se $\Delta < 0$, dette $\mu \pm i\omega$ le due radici coniugate dell' equazione caratteristica, la soluzione generale dell' equazione differenziale (15) è

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}(k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x))$$

dove $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Cerchiamo soluzioni di (15) del tipo $\tilde{y} = e^{\lambda x}$. Osserviamo che ciò ha senso anche se $\lambda = \mu + i\omega$. Infatti si definisce

$$\tilde{y} e^{\lambda x} = e^{(\mu + i\beta x} \doteq e^{\mu x} \cdot e^{i\beta) x} = e^{\mu x}(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x))$$

Abbiamo cioè una funzione $\tilde{y} = e^{\lambda x}$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Si può estendere la nozione di derivata a queste funzioni ponendo, per una funzione $z(x) = v(x) + iw(x)$, $z'(x) = v'(x) + iw'(x)$.Si verifica facilmente che anche in questo senso esteso si ha

$$\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda(e^{\lambda x})$$

(Verificarlo per esercizio). Allora interpretando l'equazione (15) in senso complesso, se $\tilde{y} = e^{\lambda x}$ è una soluzione allora si ha:

$$y'' + ay' + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

Perciò, dev' essere

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

vale a dire λ deve essere una soluzione dell' equazione caratteristica.

- Se $\Delta > 0$, e λ_1, λ_2 sono le radici (reali) dell'equazione caratteristica, allora risulta che le funzioni (reali!) $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale omogenea (15). Da qui la tesi i), in virtù del Teorema 7.2 (parte (B)) e del fatto che $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti (come visto nell' Esempio 1). Basta infatti porre $y_1 \doteq e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) \doteq e^{\lambda_2 x}$

- Se $\Delta = 0$ e λ è l'unica radice (reale!) dell' equazione caratteristica, allora si verifica che le due funzioni $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono soluzioni della nostra equazione omogenea (ciò è vero per costruzione per $e^{\lambda x}$, mentre per $e^{\lambda x}$ si deve verificarlo: farlo per esercizio). Inoltre, per l'Esempio 2, esse sono linearmente indipendenti.Dunque ponendo $y_1 \doteq e^{\lambda x}$ e $y_2(x) \doteq xe^{\lambda_1 x}$ nel Teorema 7.2 (parte (B) si ha la tesi ii).
- Sia ora $\Delta < 0$, e siano $\mu \pm i\omega$ le due radici coniugate dell' equazione caratteristica. Allora, per costruzione, $e^{(\mu+i\omega)x}$ e $e^{(\mu+i\omega)x}$ sono soluzioni (complesse!) dell' equazione differenziale omogenea (15). Dalla prima parte del teorema 7.2[6], prendendo $(k_1, k_2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $(k_1, k_2) = (\frac{1}{2i}, \frac{1}{2i})$, si ha che anche
$$e^{\alpha x}\cos(\omega x) = \frac{1}{2}e^{(\mu+i\omega)x} + \frac{1}{2}e^{(\mu+i\omega)x}$$
e
$$e^{\alpha x}\sin(\omega x) = \frac{1}{2i}e^{(\mu+i\omega)x} - \frac{1}{2i}e^{(\mu+i\omega)x}$$
sono soluzioni dell' equazione differenziale omogenea (15).E queste sono funzioni reali! (Verificare che sono anche indipendenti.) Ancora dal Teorema 7.2, ponendo $y_1 \doteq e^{\alpha x}\cos(\omega x)$ e $y_2(x) \doteq e^{\alpha x}\sin(\omega x)$, si ottiene la tesi iii).

$\diamondsuit$

Esempi di soluzioni generali

E.1)
$$y'' - y' - 2 = 0$$
L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$
le cui radici sono 2 e -1. Dunque la soluzione generale è:
$$\tilde{y} = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}.$$

E.2)
$$y'' - 2y' + y = 0$$
L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
la cui unica radice è 1. Dunque la soluzione generale è:
$$\tilde{y} = k_1 e^{x} + k_2 x e^{x}.$$

E.3)
$$y'' + y = 0$$
L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
le cui radici sono i numeri complessi coniugati$i$ e $-i$. Dunque la soluzione generale è:
$$\tilde{y} = k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$

[6]Più precisamente, da una estensione alle funzioni complesse del teorema 7.2, che si dimostra valere, senza difficoltà

8. Soluzioni particolari dell' equazione non omogenea (14)

Per compiere il Passo 2 nella soluzione del problema di Cauchy (13) si deve saper calcolare una soluzione particolare dell' equazione non omogenea (14). Per fare ciò vi ce un metodo, detto di "Variazione delle costanti", che tralasciamoper ragioni di tempo. Alternativamente si possono usare, in certi casi, dei semplici metodi ad hoc. Rimandiamo per questo al paragrafo (14.3.2-*Metodo ad hoc*) del libro di testo, dove tale argomento è svolto in modo chiaro.

Terminiamo con un alcuni esempi esempi:

• 1) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}&y'' - y' - 2y = 2x\\&y(1) = 1\\&y'(1) = 0.\end{aligned}$$

Abbiamo già trovato la soluzione della equazione omogenea associata:

$$\tilde{y} = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}$$

Dobbiamo trovare una soluzione particolare (qualsiasi). Il metodo ad hoc ci suggerisce di cercarne una tra quelle di forma

$$\hat{y}(x) = Ax + B.$$

. Imponendo che $\hat{y}$ soddisfi l'equazione (non omogenea) si ottiene:

$$\hat{y}'' - \hat{y}' - 2y = -2A - 2Ax - 2B = 2x,$$

il che dà: $A = -1$, $B = 1$. Dunque

$$\hat{y}(x) = -x + 1$$

La soluzione generale è dunque

$$y = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} - x + 1$$

la cui derivata è

$$y' = 2k_1 e^{2x} - k_2 e^{-x} - 1$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$1 = k_1 e^2 + k_2 e^{-1} \quad 0 = 2k_1 e^2 - k_2 e^{-1}$$

da cui

$$k_1 = \frac{e^{-2}}{3}, \ \ k_2 = \frac{2e}{3}$$

Perciò la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{e^{2x-2}}{3} + \frac{2e^{-x}}{3} - x + 1$$