Confronto asintotico per Integrali Generalizzati

Sia $[a,b)$ un intervallo con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. (Tutto quanto andiamo a dire può ripetersi, con le ovvie modifiche, per un intervallo del tipo $(a,b]$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$.)

Teorema 0.1. *Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, per ogni $x \in [a,b)$. Inoltre siano entrambi integrabili (in senso proprio) in ogni sottointervallo $[a,c] \subset [a,b)$.*

1) *Sia*

$$\int_{[a,b)} g(x)dx < +\infty$$

e

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha anche

$$\int_{[a,b)} f(x)dx < +\infty\,.$$

2) *Sia*

$$\int_{[a,b)} g(x)dx = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} > l > 0 \qquad \textit{(anche} = +\infty\textit{)}$$

Allora si ha anche

$$\int_{[a,b)} f(x)dx = +\infty\,.$$

3) **In particolare**, *quando*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0, +\infty[$$

allora

$$\int_{[a,b)} f(x)dx < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{[a,b)} g(x)dx < +\infty\,.$$

(Il che equivale a

$$\int_{[a,b)} f(x)dx = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{[a,b)} g(x)dx = +\infty\,. \quad)$$

Dimostrazione. 1) Per l'ipotesi sul limite si ha

$$f(x) = g(x)(l + e(x))$$

dove $e(x)$ è $o(1)$. Sia U un intorno (sinistro) di b tale che $|e(x)| < 0.5$ per ogni $x \in U \backslash \{b\}$. Dunque

$$f(x) < (l + 0.5)g(x) \qquad \forall x \in U \backslash \{b\}$$

il che permette di concludere per il teorema del confronto (si noti in particolare che è necessariamente $l \geq 0$, e dunque $l + 0.5 > 0$.)

2) Se $l < +\infty$ si ha che esiste U intorno di b tale che

$$l/2 < f(x)/g(x) < 3l/2$$

per ogni $x \in x \in U \setminus \{b\}$. In particolare

$$g(x) < \frac{2}{l} f(x) \qquad \forall x \in U \setminus \{b\}$$

il che permette di concludere per il teorema del confronto. Se $l = \infty$, che esiste U intorno di b tale che

$$1 < f(x)/g(x)$$

per ogni $x \in x \in U \setminus \{b\}$, e si conclude ancora per il teorema del confronto.

3) Non c'è nulla da dimostrare perchè segue da 1) e 2).

Esercizio 1. Determinare le coppie $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ per le quali l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

converge.

Soluzione.

Cominciamo con l'intervallo $[2, +\infty)$.

Sia $\alpha > 1$.

Si noti per cominciare che per $\beta \neq 0$ NON esiste un ordine di $\frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta}$ rispetto a $\frac{1}{(x-1)}$.

Tuttavia, scelto un numero reale $1 < \tilde{\alpha} < \alpha$, e ponendo $f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta}$ e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^{\tilde{\alpha}}}$, si ha che

$$\int_{[2,\infty)} g(x) dx < +\infty \qquad (\text{perché } \tilde{\alpha} > 1)$$

e

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)^{\tilde{\alpha}-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = 0$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, come si verifica facilmente.

Allora, per il Teorema 0.1 si ha anche

$$\int_{[2,+\infty)} \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta} dx < +\infty\,.$$

Sia ora $\alpha < 1$.

Come nel caso precedente, se $\beta \neq 0$ NON esiste un ordine di $\frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta}$ rispetto a $\frac{1}{(x-1)}$.

Tuttavia, scelto un numero reale $\tilde{\alpha}$ tale che $\alpha < \tilde{\alpha} < 1$, e ponendo $f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta}$ e $g(x) = \frac{1}{(x-1)^{\tilde{\alpha}}}$, si ha che

$$\int_{[2,\infty)} g(x) dx = +\infty \qquad (\text{perché } \tilde{\alpha} < 1)$$

e

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-1)^{\tilde{\alpha}-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, come si verifica facilmente.

Allora, per il Teorema 0.1 si ha anche

$$\int_{[2,+\infty)} \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta} dx = +\infty\,.$$

Infine, se $\alpha = 1$,
sappiamo che l' integrale converge se e solo se $\beta > 1$.

Vediamo ora l'intervallo $(1, 2]$.
Per $x \to 1+$ si ha

$$\ln x = (x-1) + o((x-1).$$

Perciò, come si verifica banalmente, $\frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta}$ è di ordine $\alpha+\beta$ rispetto a $\frac{1}{(x-1)}$.[1]
Ne consegue che

$$\int_{(1,2]} \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha + \beta < 1$

Concludendo, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha (\ln x)^\beta} dx < +\infty$$

se e solo se

$$(\alpha, \beta) \in \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha + \beta < 1 \ \alpha > 1\right\}$$

(Rappresentare questo insieme sul piano di coordinate (α, β).)

Confronto asintotico per serie reali.

Vale un risultato analogo al Teorema 0.1

Teorema 0.2. *Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni tali che $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

1) *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$$

e

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty\,.$$

[1]Si intende "ordine di infinito" o "ordine di infinitesimo", a seconda che $\alpha + \beta$ sia, rispettivamete, < 0 o > 0. Il caso $\alpha + \beta = 0$ corrisponde alla situazione in cui la funzione integranda f ha limite finito

2) *Sia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

e

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l > 0 \qquad \textit{(anche } = +\infty\textit{)}$$

Allora si ha anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

3) **In particolare**, *quando*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty\,.$$

(Il che equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty\,. \quad)$$

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 0.1 ed è lasciata per esercizio (obbligatorio).

Infinitesimi, infiniti, integrali generalizzati e serie

Sia $[a, b)$ un intervallo con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. (Tutto quanto andiamo a dire può ripetersi, con le ovvie modifiche, per un intervallo del tipo $(a, b]$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbb{R}$.)

Teorema 0.3. *Siano $h, k : [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni non negative tali che $h(x) > 0$, $k(x) > 0$, per ogni $x \in U \backslash \{b\}$, per un opportuno intorno U di b.*

1) *Se vale*

$$\lim_{x \to b-} \frac{h(x)}{k(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora si ha

$$\lim_{x \to b-} \frac{h(x) + o(h(x))}{k(x) + o(k(x))} = \lim_{x \to b-} \frac{h(x)}{k(x)} = l$$

ove gli "o piccolo" sono da interpretarsi come "infinitesimi di ordine superiore" o "infiniti di ordine inferiore" a seconda che si riferiscano, rispettivamente, a infinitesimi o a infiniti.

2) *Se vale*

$$\lim_{x \to b-} \frac{h(x)}{k(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora

$$\int_a^b \frac{h(x) + o(h(x))}{k(x) + o(k(x))} dx < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b \frac{h(x)}{k(x)} dx < +\infty$$

Dimostrtazione. Per dimostrare 1), osserviamo dapprima che la tesi ha senso, perchè anche $k(x)+o(k(x))$ risulta strettamente positiva in $x \in U' \setminus \{b\}$, per un opportuno intorno (sinistro) $U' \subset U$ di b (provarlo!). Stesso discorso vale ovviamente per $h(x)+o(h(x))$. Inoltre,

$$\frac{h(x)+o(h(x))}{k(x)+o(k(x))} = \frac{h(x)+o(h(x))}{h(x)} \frac{k(x)}{k(x)+o(k(x))} \frac{h(x))}{k(x))},$$

da cui la tesi.

Per dimostrare 2) nella direzione $\Leftarrow$, basta porre

$$f \doteq \frac{h(x)+o(h(x))}{k(x)+o(k(x))} \quad g(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$$

e applicare il Teorema 0.1. L'implicazione $\Rightarrow$ si dimostra in modo analogo.

Teorema 0.4. *Siano $(c_n), (d_n)$ due successioni non negative tali che $c_n > 0$, $d_n > 0$, per ogni n maggiore di un opportuno $\bar{n}$.*

1) *Se vale*

$$\lim \frac{c_n}{d_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora si ha

$$\lim \frac{c_n + o(c_n)}{d_n + o(d_n)} = \lim \frac{c_n}{d_n} = l$$

ove gli "o piccolo" sono da interpretarsi come "infinitesimi di ordine superiore" o "infiniti di ordine inferiore" a seconda che si riferiscano, rispettivamente, a infinitesimi o a infiniti.

2) *Se vale*

$$\lim \frac{c_n}{d_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

allora

$$\sum_1^\infty \frac{c_n + o(c_n)}{d_n + o(d_n)} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_1^\infty \frac{c_n}{d_n} < +\infty$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 0.3.