

Sulle Equazioni Differenziali Ordinarie

Franco Rampazzo

December 10, 2008

1 Tipi di equazioni differenziali

Un' equazione differenziale ha la seguente forma

$$G(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) \quad (1)$$

dove G è una funzione, e $x^{(i)}$ sta per "derivata i -esima" (le derivate prime e seconde, per semplicità, si scrivono come al solito, cioè x' e x'').

• Il numero n , cioè l'ordine di derivazione massimo che appare in (1), è detto *l'ordine dell'equazione (1)*. Così, ad esempio, le equazioni

$$\begin{aligned} x^{(3)}x - x'x'' \cos t + \arctan t^7 &= 0 \\ x' + t^4 x''x - 3 \ln t &= 0 \\ x'x &= 2t^3 \end{aligned}$$

sono, rispettivamente di terzo, secondo, e primo ordine.

Convenzione sulla notazione: Quando non ci sia il rischio di confusione, ometteremo di scrivere la dipendenza di x da t . Per esempio, scriveremo, rispettivamente, x , x' , e x'' al posto di $x(t)$, $x'(t)$, e $x''(t)$.

• L'equazione (1) è detta in *forma esplicita* se essa si può esplicitare rispetto alla derivata di ordine massimo, vale a dire se può essere scritta nella forma

$$x^{(n)} - F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

2 Esistenza, unicità, dipendenza continua dai dati

2.1 Riduzione al prim'ordine

Al prezzo di elevare il numero delle variabili si pu sempre ridurre un problema di Cauchy di ordine $k > 1$ ad un problema di ordine 1. Infatti, se $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $\Omega \mathbb{R}^n$ un insieme aperto,

$$F : J \times \Omega \times (\mathbb{R}^n)^{k-1} \rightarrow (\mathbb{R}^n)$$

una funzione, e se si considera il problema di Cauchy su Ω di dimensione n ¹ e di ordine d ²

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \\ x(\bar{t}) = y^0 \\ x^{(1)}(\bar{t}) = y^1 \\ \dots \\ \dots \\ x^{(n-1)}(\bar{t}) = y^{n-1} \end{array} \right. \quad (3)$$

ponendo

$$z_0 = x, \quad z_1(\cdot) = x^{(1)}(\cdot), \dots, z_{n-1}(\cdot) \doteq x^{(n-1)}(\cdot)$$

¹La dimensione uguale al il numero delle componenti di x , cio al numero delle equazioni scalari che formano la nostra equazione differenziale, che è vettoriale, cioè quello che si dice anche un *sistema differenziale*

²L' ordine dell'equazione è l'ordine massimo di derivazione che vi compare

si ottiene il seguente problema di Cauchy nk -dimensionale (nella variabile $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ e di ordine 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_0 = z_1 \\ z'_1 = z_2 \\ \dots \\ \dots \\ z'_{n-1} = F(t, x, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ z_0(\bar{t}) = y^0 \\ z_1(\bar{t}) = y^1 \\ \dots \\ \dots \\ z_{n-1}(\bar{t}) = y^{n-1}, \end{array} \right. \quad (4)$$

Chiaramente i due problemi sono equivalenti. Si noti che il problema (4) si può scrivere nella forma standard

$$\left\{ \begin{array}{l} z' = f(t, z) \\ z(\bar{t}) = y, \end{array} \right.$$

dove si è posto

$$z \doteq (z_0, \dots, z_{n-1})^\dagger, \quad y \doteq (y^0, \dots, y^{n-1})^\dagger$$

e

$$f(t, z) \doteq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ \dots \\ z_{n-1} \\ F(t, x, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Sarà perciò sufficiente dimostrare teoremi di esistenza, unicità, e dipendenza dai dati, per problemi di Cauchy del primo ordine.

2.2 Esistenza e unicità in piccolo

Si considerino un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, un intervallo aperto $J \subseteq \mathbb{R}$, un campo vettoriale

$$f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

un punto (tempo, spazio) $(\bar{t}, \bar{x}) \in J \times \Omega$ e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, \end{cases} \quad (5)$$

Definizione 2.1 Sia $\delta > 0$. Diremo che una funzione derivabile $x :]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[\rightarrow \Omega$ **risolve localmente** il problema di Cauchy (5) se $]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[\subseteq J$ e $x(\cdot)$ verifica sia l'equazione che la condizione iniziale in (5).

Diremo che $x : J \rightarrow \Omega$ **risolve globalmente** il problema di Cauchy (5) se essa verifica sia l'equazione che la condizione iniziale in (5).

Teorema 2.2 (Esistenza locale e unicità). Si assuma che la funzione f sia continua, e che esistano $\eta, L > 0$ e un intervallo aperto $I \subseteq J$ tali che $\bar{t} \in I$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in I \times B[\bar{x}, \eta] \quad (6)$$

Allora esiste $\delta > 0$ e una funzione derivabile

$$x :]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[\rightarrow \Omega$$

che risolve localmente il problema di Cauchy (5).

Inoltre se $x_1 :]\bar{x} - \delta_1, \bar{x} + \delta_1[\rightarrow \Omega$ è un'altra soluzione locale, si ha

$$x(t) = x_1(t) \forall t \in]\bar{t} - \tilde{\delta}, \bar{t} + \tilde{\delta}[$$

dove si è posto $\tilde{\delta} \doteq \max\{\delta, \delta_1\}$.

Osservazione 2.3 Le ipotesi di questo teorema sono verificate nel caso particolare in cui $f \in C^1(J \times \Omega)$. Sono anche verificate nel caso in cui $f(t, x) = h(t)g(x)$, con h continua e g di classe C^1 . (Verificare entrambe le osservazioni, naturalmente con il Teorema di Lagrange in versione vettoriale.)

Teorema 2.4 (Esistenza globale e unicità). Sia $\omega = \mathbb{R}^n$. Si assuma che la funzione f sia continua, e che esista $L > 0$ tale che

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in J \times \mathbb{R}^n \quad (7)$$

Allora esiste ed è unica una funzione derivabile

$$x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che risolve globalmente il problema di Cauchy (5).

Osservazione 2.5 Le ipotesi di questo teorema sono verificate nel caso particolare in cui $f \in C^1(J \times \mathbb{R}^n)$ e le derivate parziali sono limitate. Sono anche verificate nel caso in cui $f(t, x) = h(t)g(x)$, con h continua e limitata e g di classe C^1 con derivate limitate. (Verificare entrambe le osservazioni, naturalmente con il Teorema di Lagrange in versione vettoriale.)

Teorema 2.6 (Dipendenza continua dai dati iniziali). Nelle ipotesi del Teorema 2.4, siano $x(\cdot), y(\cdot)$ le soluzioni globali corrispondenti a due diversi punti iniziali $\bar{x}, \bar{y}$ (cioè $x(\bar{t}) = \bar{x}$, $y(\bar{t}) = \bar{y}$). Allora, per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{L(t-\bar{t})}|\bar{x} - \bar{y}|.$$

In particolare, se $T \geq \bar{t}$, allora

$$\|x - y\|_\infty \leq e^{L(T-\bar{t})}|\bar{x} - \bar{y}|.$$

dove la norma $\|\cdot\|_\infty$ si intende calcolata sull'intervallo $[\bar{t}, T]$.

ESERCIZI

- Mostrare che un sistema differenziale lineare

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

soddisfa alle condizioni del Teorema 2.2 quando i coefficienti delle matrici $A(t)$ e $B(t)$ (di che dimensione sono queste matrici?) sono funzioni continue.

- Mostrare che un sistema differenziale lineare

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)$$

soddisfa alle condizioni del Teorema 2.4 quando i coefficienti delle matrici $A(t)$ e $B(t)$ sono funzioni continue e limitate.

- Dare un esempio di non unicità.
- Dare un esempio di esistenza locale ma non globale
- Verificare che

$$x' = -x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

NON soddisfa alle ipotesi di esistenza globale, eppure ammette una soluzione (unica) globale (cioè definita per $t \in \mathbb{R}$).

- (Molto difficile): inventarsi un teorema che giustifichi il comportamento delle soluzioni nel precedente esercizio.
- Dare la riduzione al primo ordine della seguente equazione

$$x'''(t) = x \cdot x' \cdot (x'')^3$$

- C'è un risultato di esistenza e unicità valido per la riduzione al primo ordine dell'esercizio precedente?