8 novembre 2008

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA IAS,IM,IH

I compitino, TEMA 1

Cognome e Nome:

Matricola:

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di 2π, e la cui restrizione a $[-\pi, \pi]$ sia definita da

$$f(x) = 2x \ \ \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \pi - x \ \ \forall x \in [-\pi, 0[.$$

a) Provare che f è C^1 a tratti.

b) Stabilire per quali x la serie di Fourier di f converge, e trovarne il limite.

c) Calcolare la serie di Fourier di f.

Esercizio 2.

a) Si trovino infinite soluzioni continue $u_n : [0,\pi] \times [0,+\infty[$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in]0,\pi[\times]0,\infty[\\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty[\end{cases} \tag{1}$$

Suggerimento: separazione di variabili.

b) **Facoltativo**(Da svolgere sul foglio a sei facciate)

Si trovi la *soluzione formale* u del problema (1) con condizione iniziale

$$u(x,0) = x(x-\pi),$$

8 novembre 2008

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA IAS,IM,IH

I compitino, TEMA 2

Cognome e Nome:

Matricola:

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di 2π, e la cui restrizione a $[-\pi, \pi]$ sia definita da

$$f(x) = -x \ \ \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \pi + 2x \ \ \forall x \in [-\pi, 0[.$$

a) Provare che f è C^1 a tratti.

b) Stabilire per quali x la serie di Fourier di f converge, e trovarne il limite.

c) Calcolare la serie di Fourier di f.

Esercizio 2.

a) Si trovino infinite soluzioni continue $u_n : [0,\pi] \times [0,+\infty[$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,y) \in]0,\pi[\times]0,\infty[\\ \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty[\end{cases} \tag{2}$$

Suggerimento: separazione di variabili.

b) **Facoltativo**(Da svolgere sul foglio a sei facciate)

Si trovi la *soluzione formale* u del problema (2) con condizione iniziale

$$u(x,0) = x(x-\pi),$$

8 novembre 2008
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA IAS,IM,IH
I compitino, TEMA 3
Cognome e Nome:
Matricola:

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di 2π, e la cui restrizione a $[-\pi, \pi]$ sia definita da

$$f(x) = x + 1 \ \ \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = -(\pi^{-1} + 1)x \ \ \forall x \in [-\pi, 0[.$$

a) Provare che f è C^1 a tratti.

b) Stabilire per quali x la serie di Fourier di f converge, e trovarne il limite.

c) Calcolare la serie di Fourier di f.

Esercizio 2.

a) Si trovino infinite soluzioni continue $u_n : [0,\pi] \times [0,+\infty[$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in]0,\pi[\times]0,\infty[\\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty[\end{cases} \tag{3}$$

Suggerimento: separazione di variabili.

b) **Facoltativo**(Da svolgere sul foglio a sei facciate)

Si trovi la *soluzione formale* u del problema (3) con condizione iniziale

$$u(x,0) = x(x-\pi), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

8 novembre 2008

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA IAS,IM,IH

I compitino, TEMA 4

Cognome e Nome:

Matricola:

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di 2π, e la cui restrizione a $[-\pi, \pi]$ sia definita da

$$f(x) = 2(x+1) \ \ \forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = -2(\pi^{-1}+1)x \ \ \forall x \in [-\pi, 0[.$$

a) Provare che f è C^1 a tratti.

b) Stabilire per quali x la serie di Fourier di f converge, e trovarne il limite.

c) Calcolare la serie di Fourier di f.

Esercizio 2.

a) Si trovino infinite soluzioni continue $u_n : [0, \pi] \times [0, +\infty[$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in]0, \pi[\times]0, \infty[\\ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty[\end{cases} \tag{4}$$

Suggerimento: separazione di variabili.

b) **Facoltativo**(Da svolgere sul foglio a sei facciate)

Si trovi la *soluzione formale* u del problema (4) con condizione iniziale

$$u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x(x - \pi)$$