Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Appello n.1 di **Metodi Matematici per l'Ingegneria Industriale**, Padova 30 Gennaio 2009
Laurea in Ingegneria Chimica-Materiali-Aerospaziale

**(E1)** Per ogni $\epsilon \geq 0$, si consideri il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (x,t) \in ]0,\pi[\times]0,+]\infty[ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = (x-\pi)^3 x^3 + \epsilon(x^2 - \pi x) \qquad \forall x \in [0,\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$

(a) Determinare, mediante la formula di D'Alembert, la soluzione generalizzata $u_\epsilon$.

(b) Per quali $\epsilon$ la funzione $u_\epsilon$ è una soluzione classica?

(c) Dimostrare (con la formula di D'Alembert) che $u_\epsilon$ converge *uniformemente* a $u$ su $[0,\pi] \times [0,+\infty[$.

(d) Per un $\epsilon$ qualsiasi, trovare il termine con la frequenza più bassa della serie "soluzione formale"

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

costruita col metodo di Fourier. (Se $\hat{u}(x,t) = w(x)v(t)$, con $v(\cdot)$ periodica di periodo $T$, la frequenza di $\hat{u}$ è il numero $T^{-1}$. In particolare, si ha la frequenza più bassa in corrispondenza del periodo più alto).

**Cenni di risposta**

(a) Usare la formula di D'Alembert.
Errore frequente: viene usata $f_\epsilon = (x-\pi)^3 x^3 + \epsilon(x^2 - \pi x)$ invece dell'estesa (per antisimmetria e periodicità) $f_\epsilon^e$. L'espressione di $f_\epsilon^e$ può essere un po' laboriosa e perciò si può tralasciare. L'importante è sapere che essa è limitata.

(b) Si vede che le condizioni su $f_\epsilon$ e sulla sua derivata prima sono soddisfatte. Quelle sulla derivata seconda (che richiedono derivate seconde nulle da destra in 0 e da sinistra in $\pi$) sono verificate se e solo se $\epsilon = 0$

(c) Si prova con la formula di D'Alembert.
Errore comune: lo stesso che in (a). Tra l'altro, usando $f_\epsilon$ al posto dell'estesa, la convergenza uniforme non c'è.

**(E2)** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = (1+t^2)\sqrt{|x|} \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$

(a) Per quali valori $\bar{x}$ del dato iniziale esiste almeno una soluzione locale?

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovare la soluzione $x_n(\cdot)$ nell'intervallo temporale $[0,10]$ del problema con dato iniziale $\bar{x} = \frac{1}{n}$, e verificare che le $x_n(\cdot)$ convergono uniformemente ( nell'intervallo $[0,10]$) ad una funzione $\hat{x}(\cdot)$. Determinare tale $\hat{x}(\cdot)$ e verificare che è soluzione del problema di Cauchy con $\bar{x} = 0$

(c) (Facoltativo) La funzione $\hat{x}(\cdot)$ del punto precedente è *l'unica* soluzione in $[0, 10]$ del problema di Cauchy con $\bar{x} = 0$?

**Cenni di risposta**

(a) Per ogni valore, perchè il campo vettoriale è continuo.

(b) Si applica il solito metodo di separazione di variabili, **visto che** $1/n \neq 0$. La convergenza uniforme a una $\hat{x}(\cdot)$ delle $x_n(\cdot)$ è immediata, e che tale $\hat{x}(\cdot)$ sia soluzione dell'equazione e soddisfi la condizione iniziale $\hat{x}(0) = 0$ lo si verifica per sostituzione.

(c) No, c'è anche la soluzione costante $x(t) \equiv 0$.

**(T1)** Enunciare e dimostrare il principio del massimo per l'equazione del calore.

**(T2)** Dare un esempio di successione $f_n$ in $C[0, 1]$ convergente puntualmente alla funzione $f \equiv 0$ e tale che le norme

$$\|f_n\|_1 \quad \left( = \int_0^1 |f(t)|\, dt \right)$$

**non** tendano a zero.

**Risposta** Ad esempio una successione di funzioni continue il cui grafico sia un triangolo isoscele con base $[0, 1/n]$ e altezza $n$ seguito dal grafico della funzione nulla.