13 dicenbre 2008

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA IAS,IM,IH

**II compitino**

**Cognome e Nome:**

**Matricola:**

**Esercizio 0.1** a) Si ponga $h \doteq -x + x^2$, e si consideri, per ogni $\epsilon \geq 0$,

$$f_\epsilon = \sin(\pi x) + 2\sin(3\pi x) + \epsilon h(x)$$

Sia $u_\epsilon$ la soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 400u_{xx} = 0 \qquad (x,t) \in ]0,1[\times]0,+\infty[ \\ u(0,t) = u(1,0) = 0 \\ u(x,0) = f_\epsilon(x) \quad u_t(x,0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Per ogni $\epsilon \geq 0$ ,e senza calcolare $u_\epsilon$ esplicitamente, si dica se essa è una soluzione classica.

b) Si determini $u_0(1/4, 10)$.

c) Si mostri che per tutti i punti $(x,t) \in [0,1] \times [0,+\infty[$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} u_{\frac{1}{n}}(x,t) = u_0(x,t)$$

d) Mostrare che la convergenza è uniforme su tutto il dominio, vale a dire, che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,+\infty[} |u_n(x,t) - u_0(x,t)| = 0.$$

**Esercizio 0.2** Per un valore del dato iniziale $\bar{x} \geq 0$, si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x^5 t^2 \\ \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \tag{2}$$

a) Dire se il problema soddisfa alle ipotesi del teorema di esistenza globale.

b) Determinare la soluzione per ogni valore iniziale $\bar{x} \in \mathbb{R}$, nel suo intervallo massimale di definizione.

c) Per quali valori di $\bar{x}$ la soluzione risulta definita per ogni $t \geq 0$?

d) Per quali valori di $\bar{x}$ la soluzione risulta definita su tutto $\mathbb{R}$?

**Soluzioni**

**1.**

a) La soluzione è classica se e solo se l'estesa $f_\epsilon^e$ antisimmetrica e 1-periodica di $f_\epsilon$ è di classe $C^2$, e ciò succede se e solo se si ha che la $f_\epsilon(0) = f_\epsilon(1) = 0$, $f'_{\epsilon+}(0) = f'_{\epsilon-}(0)$, e $f''_{\epsilon\,+}(0) = f''_{\epsilon\,-}(0) = 0$, che, fatti i conti, vale se e solo se $\epsilon = 0$

b) Con la formula di D'Alembert si ottiene $3\sqrt{2}/2$.

c) Si puó fare direttamente ma è conseguenza di d)

d) É conseguenza della formula di D'' Alembert, *tenendo condo che* $\|h_\epsilon^e\|_\infty \leq 1\ \forall\epsilon \leq 1$. (N.B.: errore comune: usare $h_\epsilon$ al posto di $h_\epsilon^e$, ma $\|h_\epsilon\|_\infty = +\infty$).

**2**

a) No, perchè la funzione $x \mapsto -t^2x^5$ è Lipschitziana solo per $t = 0$. (Da giustificare)

b) Con separazione variabili per $\bar{x} > 0$. Per $\bar{x} = 0$ si ha $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

c) Da b) risulta vero $\forall\bar{x} \geq 0$ (e anche $\forall\bar{x} < 0$).

d) Da b) risulta che per $\bar{x} > 0$ la soluzione non è definita tutti i tempi negativi. Dunque la risposta è $\bar{x} = 0$.