Palestra 1

Franco Rampazzo

November 6, 2008

Esercizio 0.*Svolgere tutti i passaggi lasciati per esercizio a lezione e nelle dispense*

Negli esercizi che seguono, nel caso di risposte multiple ve ne può essere una di esatta, o più di una, o anche nessuna.

1 Norme, successioni, serie

Esercizio 1.1 *L'insieme $C^1([0,1])$ è costituito dalle funzioni $f:[0,1] \to \mathbb{R}$*

a) *derivabili in $[0,1]$ e tali che $f':[0,1] \to \mathbb{R}$ è continua.*

b) *continue in $[0,1]$ e derivabili in $]0,1[$, con derivata continua.*

c) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' può essere estesa ad una funzione continua in $[0,1]$.*

d) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' ha limite destro finito in a e limite sinistro finito in b.*

e) *derivabili in $]0,1[$, e tali che f' può essere estesa ad una funzione continua in $[0,1]$.*

f) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' è continua e ha limite destro finito in a e limite sinistro finito in b.*

Esercizio 1.2 *Prendendo per buona la risposta f) nel precedente esercizio, si dimostri che*

a) *si dimostri che la funzione $\|\cdot\|^1 : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$,*

$$\|f\|^1 \doteq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è una norma;

b) *si calcoli $\|g\|^1$ ove $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) \doteq x^3$ per ogni $x \in [0,1]$;*

c) si mostri (con un esempio) che $C^1([0,1])$ non è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$;

d) si dimostri che $C^1([0,1])$ risulta completo quando è munito della norma $\|\cdot\|^1$.

Esercizio 1.3 *Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ sp azi vettoriali normati, e sia $L : V \to W$ un operatore lineare. Si mostri che*

L è continuo se e solo se esiste una costante $K \geq 0$ tale che

$$\|L(v)\|_W \leq K\|v\|_V \qquad \forall v \in V.$$

Esercizio 1.4 *(a) Usando il risultato dell'esercizio precedente si dimostri che il funzionale lineare $L : C([a,b]) \to C([a,b])$*

$$L : f \to F(x) \doteq \int_c^x f(t)dt$$

, dove $c \in [a,b]$, è continuo.

(b) Si mostri che L è continuo anche se sul dominio prendiamo la norma $\|\cdot\|_1$

Esercizio 1.5 *Per ogni $\alpha > 2$, si studi la convergenza (puntuale, uniforme, totale, etc.) della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^\alpha}) \cos(nx).$$

Nel caso di convergenza uniforme ad una funzione derivabile si dica quando si può effettuare la derivazione termine a termine.

Esercizio 1.6 *Si consideri la successione (f_n)*

$$f_n(x) \doteq \arctan(nx)$$

. Si dica

a) Se (f_n) converge puntualmente in $[0,1]$

b) Se (f_n) converge uniformemente in $[0,1]$

c) Se (f_n) converge uniformemente in $]0,1]$

d) Se (f_n) converge uniformemente in $[1/2,1]$

e) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in $[0,1]$

f) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi/2 - f_n)^{5/4}$ converge totalmente in $[1/2,1]$.

Esercizio 1.7 *Si consideri la successione* (f_n)

$$f_n(x) \doteq |x|^{2+1/n}$$

. Si dica

a) *Se* (f_n) *converge puntualmente in* $[-1, 1]$.

b) *Se* (f_n) *converge uniformemente in* $[-1, 1]$..

c) *Se le derivate* (f_n) *convergo uniformemente in* $[0, 1]$ *alla derivata del limite delle* f_n.

Esercizio 1.8 *Sia* $[x]$ *la funzione parte intera, dove cioè* $[x]$ *è il massimo intero minore uguale di* x*. Si calcolino, sul dominio* $[-1, 1]$*, la distanza*

$$\|[x] - x^2\|_\infty, \qquad \|g - f\|_\infty$$

dove $g(x) = x^3$ *e* $f(x) = 4\ln(1 + x^2)$

Esercizio 1.9 *Si calcoli* $\|f - g\|_\infty$*, ove* $f, g \in C([-1, 1])$*, nei seguenti casi*

a) $f(x) = x^3, g(x) = 1 + 3x$

b) $f(x) = x + 1, g(x) = e^x$

c) $f(x) = \sin(\pi x) \quad g(x) = \cos(\pi x)$

Esercizio 1.10 *Ripassare la nozione di* distanza. *Dimostrare che*

$$d(x, y) = \arctan(|x - y|)$$

è una distanza.

Esercizio 1.11 *Ripassare la nozione di* norma. *Sia* $L > 0$ *fissata. Nello spazio* $C([a, b])$ *si mostri che*

$$|||f||| \doteq \max_{x\in[a,b]} e^x |f(x)|$$

è una metrica, (C'era un errore nel testo della versione precedente) e che esistono due costanti positive A, B *tali che*

$$A\|f\|_\infty \leq |||f||| \leq B\|f\|_\infty$$

Ponendo $A = e^{-b}$ *si ha* $Ae^x|f(x)| \leq |f(x)|$ *per ogni* $x \in [a, b]$*, da cui si ha la prima diseguaglianza passando ai rispettivi massimi. La seconda diseguaglianza si ha allo stesso modo, con* $B = e^b$.

Esercizio 1.12 *a) Mostrare che esistono costanti positive* A, B *tali che*

$$A\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq B\|f\|_\infty$$

per ogni $f \in C([a, b])$.

b) Mostrare (più difficile) che tali maggiorazioni non sono invertibili

c) Riflettere sul fatto che a) dice che la convergenza uniforme (in $C([a, b])$*) implica quella* L^2*, e che questa implica la convergenza* L^1*. Invece b) dice che le implicazioni opposte sono false.*

Esercizio 1.13 *Costruire una successione di funzioni continue f_n che convergono a 0 in norma $\|\cdot\|_1$ ma che non convergono a 0 in almeno due punti.*

Esercizio 1.14 *Calcolare il limite puntuale e dire se è uniforme delle seguenti successioni:*

a) $\sqrt{\sin^2 x + n^{-2}}$

b) $\frac{3x+n}{x+n}, \quad x \geq 0;$

c) $n^2 x^2 (1-x)^n, \qquad x \in [0,1];$

d) $\frac{1+x}{x^n+n^2}, \quad x \geq 0.$

.

2 Serie di Fourier

Esercizio 2.1 *Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Allora:*

a) $f \in L^1([-\pi,\pi])$;

b) f *è limitata;*

c) *la serie di Fourier di f converge puntualmente a f;*

d) *la serie la serie di Fourier di f converge a f in media quadratica (cioè nella norma $\|\cdot\|_2$.)*

e) *la serie di Fourier di f converge uniformemente a f*

Esercizio 2.2 *Determinare la serie di Fourier della funzione $f \in L^2[-\pi,\pi]$, $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Prima di fare il conto, prevedere che la serie converge nello 0 e dire a quale somma converge.*

Esercizio 2.3 *Sia f quella del precedente esercizio. Determinare i coefficienti reali a, b, c, d, e in modo che, posto*

$$P(x) = a + b\cos x + c\sin x + d\cos 2x + e\sin 3x \quad x \in [\pi, +\pi]$$

sia minima la distanza

$$\|P(x) - f(x)\|_2$$

Esercizio 2.4 *Scrivere la serie di Fourier delle seguenti funzioni, e discutere il tipo di convergenza.*

a) $|\sin x|$

b) *La funzione 2π-periodica dispari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0,\pi]$.*

c) *La funzione 2π-periodica pari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0,\pi]$.*

d) *La funzione 2π-periodica che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0,\pi]$ e vale 0 in $[\pi, o]$.*

e) *La funzione 2π-periodica dispari che coincide con x^2 coincida in $[0,\pi]$.*