Sauna 1

Franco Rampazzo

November 6, 2008

Nel caso di risposte multiple ve ne può essere una di esatta, o più di una, o anche nessuna.

1 Norme, successioni, serie

Esercizio 1.1 *L'insieme $C^1([0,1])$ è costituito dalle funzioni $f:[0,1]\to\mathbb{R}$*

a) *derivabili in $[0,1]$ e tali che $f':[0,1]\to\mathbb{R}$ è continua.*

   NO, non ha senso parlare di derivabilità in O e1.

b) *continue in $[0,1]$ e derivabili in $]0,1[$, con derivata continua.*

   NO: $f(x)=\sqrt{x}$

c) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' può essere estesa ad una funzione continua in $[0,1]$.*

   SÌ

d) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' ha limite destro finito in a e limite sinistro finito in b.*

   NO: $f(x)=(x-1/2)^2\sin(1/(x-1/2))$, $f(1/2)=0$, ha derivata non continua in $1/2$ (fare i conti!).

e) *derivabili in $]0,1[$, e tali che f' può essere estesa ad una funzione continua in $[0,1]$.*

   NO: potrebbe essere dicontinua in a o b. Es. $f(x)=\sin x$ per $x\neq 0$, $f(0)=1$

f) *continue in $[0,1]$, derivabili in $]0,1[$, e tali che f' è continua e ha limite destro finito in a e limite sinistro finito in b.*

   SÌ: è equivalente a c)

Esercizio 1.2 *Prendendo per buona la risposta f) nel precedente esercizio, si dimostri che*

a) si dimostri che la funzione $\|\cdot\|^1 : C^1([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|^1 \doteq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

è una norma;

VERIFICHIAMO GLI ASSIOMI:

- *Se* $f = 0$. *allora* $\|f\|^1 = \|0\|_\infty + \|0\|_\infty = 0$
- *Se* $\|f\|^1 = 0$, *allora* $\|f\|_\infty = 0$, *dunque* $f = 0$ *perchè* $\|\cdot\|_\infty$ *èuna norma.*
- $$\|\lambda f\|^1 = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda|(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty) = \lambda\|f\|^1$$
- $$\|f+g\|^1 = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\|^1 + \|g\|^1$$

b) si calcoli $\|g\|^1$ *ove* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) \doteq x^3$ *per ogni* $x \in [0,1]$;

$$\|g\|^1 = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty = 4$$

c) si mostri (con un esempio) che $C^1([0,1])$ *non è completo rispetto alla norma* $\|\cdot\|_\infty$;

GIÀ VISTO: $f(x) = n^{-1}\sin(nx)$

d) si dimostri che $C^1([0,1])$ *risulta completo quando è munito della norma* $\|\cdot\|^1$.

TRACCIA: Se (f_n)*è di Cauchy rispetto alla norma* $\|\cdot\|^1$ *allora* (f_n) *e* (f_n') *risultano di Cauchy rispetto alla norma* $\|\cdot\|_\infty$. *Perciò* f_n *convergerà a una f (continua) in norma* $\|\cdot\|_\infty$*,e, ugualmente,* f_n' *convergerà a una g (continua) in norma* $\|\cdot\|_\infty$. *Per il teorema della convergenza sotto il segno di derivata segue che* $g = f'$. *Perciò*

$$\|f_n - f\|^1 = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f\|_\infty \to 0$$

Esercizio 1.3 Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ spazi vettoriali normati, e sia $L : V \to W$ un operatore lineare. Si mostri che

L **è continuo se e solo se esiste una costante** $K \geq 0$ **tale che**

$$\|L(v)\|_W \leq K\|v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{1}$$

MOSTRIAMO CHE (1) $\Rightarrow$ continuità:
Sia v_n convergente a v. Allora:

$$\|L(v_n) - L(v)\|_W = \|L(v_n - v)\|_W \leq K\|v_n - v\|_V \to 0.$$

Dunque L è continua.

VICEVERSA, MOSTRIAMO CHE continuità $\Rightarrow$ (1):
Per assurdo: sia v_n è una successione tale che

$$\|L(v_n)\|_W > n\|v_n\|_V,$$

vale a dire

$$\left\| L\left(\frac{v_n}{\|v_n\|_V}\right)\right\|_W > n \qquad \forall n. \tag{2}$$

Poniamo $v'_n \doteq \frac{v_n}{\|v_n\|_V}$. In particolare $\|v'_n\|_V = 1$. Dunque la successione $\frac{v'_n}{n}$ converge a zero. Perciò per la continuità , si ha:

$$0 = \|0\|_W = \|L(0)\|_W = \|L(0) - 0\|_W = \lim_{n\to\infty} \left\| L\left(\frac{v'_n}{n}\right)\right\|_W = \lim_{n\to\infty} \|L(\frac{v_n}{n\|v_n\|_V})\|_W$$

Questo è impossibile, in quanto, da (2), si ha

$$\|L(\frac{v_n}{n\|v_n\|_V})\|_W > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Esercizio 1.4 *(a) Usando il risultato dell'esercizio precedente si dimostri che il funzionale lineare* $L : C([a,b]) \to C([a,b])$

$$L : f \to F(x) \doteq \int_c^x f(t)dt,$$

dove $c \in [a,b]$*, è continuo.*

Soluzione. Per ogni $x \in [a,b]$ si ha SS

$$|L(f)(x)| = |\textstyle\int_c^x f(t)dt| \leq |\int_c^x |f(t)|dt \leq |\int_a^b |f(t)|dt$$

$$\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = (b-a)\|f\|_\infty$$

dunque

$$\|L(f)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |L(f)(x)| \leq A\|f\|_\infty,$$

con $A = b - a$, e si conclude per l'esercizio precedente.

(b) Si mostri che L *è continuo anche se sul dominio prendiamo la norma* $\|\cdot\|_1$

Soluzione. *Come prima, per ogni $x \in [a,b]$, si ha*

$$|L(f)(x)| = \leq |\int_a^b |f(t)|dt \|f\|_1, dacui$$

$$\|L(f)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |L(f)(x)| \leq |\int_a^b |f(t)|dt = \|f\|_1,$$

e si conclude per l'esercizio precedente.

Esercizio 1.5 *Per ogni $\alpha > 2$, si studi la convergenza (puntuale, uniforme, totale, etc.) della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^\alpha}) \cos(nx).$$

Soluzione Per ogni $\alpha > 2$ la serie è convergente totalemente. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sin(\frac{1}{n^\alpha}) \cos(nx) \right\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^\alpha})$$

e la serie a secondo membro è convergente se e solo se $\alpha 21$.

Nel caso di convergenza uniforme ad una funzione derivabile si dica quando si può effettuare la derivazione termine a termine.

Soluzione La serie delle derivate è totalmente convergente, come si verifica facilmente. Dunque si applica il teorema di derivazione termine a termine, e si trova che per ogni $\alpha > 2$ la serie di partenza converge uniformemente ad una funzione derivabile, la cui derivata è la somma (uniforme) della serie delle derivate.

Esercizio 1.6 *Si consideri la successione (f_n)*

$$f_n(x) \doteq \arctan(nx)$$

. Si dica

a) *Se (f_n) converge puntualmente in $[0,1]$*

   Soluzione SÌ, converge a f definita da : $f(0) = 0$, e $f(x) = \pi/2$ se $x \in]0,1]$.

b) *Se (f_n) converge uniformemente in $[0,1]$*

   Soluzione No, perché f discontinua.

c) *Se (f_n) converge uniformemente in $]0,1]$* **Soluzione.**

   NO. Se per assurdo convergesse uniformemente in $]0,1]$, allora per ogni x_n convergente a 0, da

$$|f_n(x_n) - \pi/2| \leq \|f_n - \pi/2\|_\infty = \sup_{t\in]0,1]} |f_n(t) - \pi/2|$$

si avrebbe

$$|f_n(x_n) - \pi/2| \to 0. \tag{3}$$

Ma scegliendo $x_n \doteq \frac{1}{n^2}$ si ha

$$f_n(x_n) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

che è in contraddizione con (3).

d) Se (f_n) converge uniformemente in $[1/2, 1]$

SÌ (facile, ma il sì non viene dal mero fatto che in quell'intervallo f_n converge puntualmente...)

e) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente in $[0, 1]$

NO, a parte $x = 0$, non è neppure soddisfatta la condizione necessaria che il termine infinitesimo vada a zero

f) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\pi/2 - f_n)^{5/4}$ converge totalmente in $[1/2, 1]$.

SÌ, basta provare che esiste $a > 0$ tale che, per n sufficientemente grande, si ha $\pi/2 - \arctan(n) < a/n$

Esercizio 1.7 *Si consideri la successione (f_n)*

$$f_n(x) \doteq |x|^{2+1/n}.$$

Si dica

a) Se (f_n) converge puntualmente in $[-1, 1]$.

SÌ, a x^2

b) Se (f_n) converge uniformemente in $[-1, 1]$. SÌ: basta mostrare la cosa in $[0, 1]$ perche

$$\||x|^{2+1/n} - x^2\|_\infty = \sup_{[-1,1]} \left||x|^{2+1/n} - x^2\right| = \sup_{[0,1]} \left|x^{2+1/n} - x^2\right|$$

Troviamo il minimo di $\left|x^{2+1/n} - x^2\right| = x^2 - x^{2+1/n}$ in $[0, 1]$. Ponendo $h_n \doteq x^2 - x^{2+1/n}$, si ha $h_n'(x) = 2x - (2+1/n)x^{1+1/n}$, cosicché $h_n'(x) \geq 0$ se e solo se $x \in]0, x_n[$ (Calcolare x_n). Basta ora mostrare che $\lim h_n(x_n) = 0$ (farlo, tenendo conto del limite fondamentale $\lim(1 + 1/n)^n = e$): infatti

$$\||x|^{2+1/n} - x^2\|_\infty = max_{[0,1]} h_n(x_n) \to 0$$

c) Se le derivate (f_n) convergo uniformemente in $[0, 1]$ alla derivata del limite delle f_n. 'SÌ: con un conto simile a quello precedente si trova che la serie costruita con le derivate è convergente a $2x$. **Osservazione***:* se si fosse per primo risposto al fatto che la serie delle derivate converge uniformemente (non importa a cosa), in virtù del Th. di di derivazione termine a termine si poteva concludere su immediatamente a tutte le domande

Esercizio 1.8 *Sia $[x]$ la funzione parte intera, dove cioè $[x]$ è il massimo intero minore uguale di x. Si calcolino, sul dominio $[-1,1]$, la distanza*

$$\|[x]-x^2\|_\infty, \qquad \|g-f\|_\infty$$

dove $g(x)=x^3$ e $f(x)=4\ln(1+x^2)$

Soluzione:

$$\|[x]-x^2\|_\infty = 2$$

$$\|g-f\|_\infty = \max_{[0,1]} |x^3-4\ln(1+x^2)| \quad \text{fare i conti}$$

Esercizio 1.9 *Si calcoli $\|f-g\|_\infty$, ove $f,g \in C([-1,1])$, nei seguenti casi*

a) $f(x)=x^3, g(x)=1+3x$

b) $f(x)=x+1, g(x)=e^x$

c) $f(x)=\sin(\pi x) \quad g(x)=\cos(\pi x)$

Soluzione: *Fare il conto*

Esercizio 1.10 *Ripassare la nozione di* distanza. *Dimostrare che*

$$d(x,y)=\arctan(|x-y|)$$

è una distanza.

Soluzione: verifichiamo gli assiomi:

- $d(x,x)=\arctan 0 = 0$;
- se $d(x,y)=0$, allora

  $$0=\arctan(|x-y|) \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x=y;$$

- $d(x,y)=d(y,x)$: immediato;
- *La disuguaglianza triangolare*:

  $$d(x,z)=\arctan(|x-z|)=\arctan(|x-y+y-z|)\le\arctan(|x-y|+|y-z|)\le\arctan(|x-y|)+\arctan(|y-z$$

  la penultima disuguaglianza valendo perché

  $$|x-y+y-z|\le|x-y|+|y-z|$$

  e arctan è una funzione crescente, e l'ultima valendo perché, per ogni $r,s\ge 0$ si ha

  $$\arctan(r+s)\le\arctan(t)+\arctan(s).$$

Esercizio 1.11 *Ripassare la nozione di* norma. *Sia $L > 0$ fissata. Nello spazio $C([a,b])$ si mostri che*

$$|||f||| \doteq \max_{x \in [a,b]} e^x |f(x)|$$

è una metrica, (C'era un errore nel testo di Palestra 1) e che esistono due costanti positive A, B tali che

$$A\|f\|_\infty \leq |||f||| \leq B\|f\|_\infty$$

Ponendo $A = e^{-b}$ si ha $Ae^x|f(x)| \leq |f(x)|$ per ogni $x \in [a,b]$, da cui si ha la prima diseguaglianza passando ai rispettivi massimi. La seconda diseguaglianza si ha allo stesso modo, con $B = e^b$.

Esercizio 1.12 *a) Mostrare che esistono costanti positive A, B tali che*

$$A\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq B\|f\|_\infty$$

per ogni $f \in C([a,b])$.

Soluzione*: Con la disuguaglianza di Schwarz:*

$$\|f\|_1 = \int_a^b 1 \cdot |f(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b (1)^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} = \sqrt{b-a}\,\|f\|_2.$$

Dunque basta prendere $A = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$ per avere la prima diseguaglianza. Per provare la seconda, sia $M \doteq \|f\|_\infty$. Allora

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b M^2 dt} = M\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

Dunque basta prendere $B \doteq \sqrt{b-a}$.

b) Mostrare (più difficile) che tali maggiorazioni non sono invertibili:

Soluzione *Per assurdo: si supponga che esista $\beta > 0$ tale che*

$$\|f\|_2 \leq \beta\|f\|_1 \tag{4}$$

. Si consideri la successione

$$f_n(t) = nt \quad t \in [0, 1/\sqrt{n}], \quad f_n(t) = 2\sqrt{n} - nt \quad t \in [1/n, 2/\sqrt{n}], \quad f_n(t) = 0 \quad t \in [2/\sqrt{n}, 1].$$

È immediato constatare che $\|f_n\|_1 = 1$ mentre $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = +\infty$, il che contraddice (4).

c) Riflettere sul fatto che a) dice che la convergenza uniforme (in $C([a,b])$) implica quella L^2, e che questa implica la convergenza L^1. Invece b) dice che le implicazioni opposte sono false.

Esercizio 1.13 *Costruire una successione di funzioni continue f_n che convergono a 0 in norma $\|\cdot\|_1$ ma che non convergono a 0 in almeno due punti.*

Soluzione: $f_n \in C^0([0,1])$

$f_n(x) = 1-nx,\ \forall x \in [0,1/n], \quad f_n(x) = 0\ \forall x \in]1/n, 1-1/n[, \quad f_n(x) = nx-(n-1)\ \forall x \in [1-1/n, 1]$

Esercizio 1.14 *Calcolare il limite puntuale e dire se è uniforme delle seguenti successioni:*

a) $\sqrt{\sin^2 x + n^{-2}}$

Converge uniformemente a $\sqrt{\sin^2 x}$*, su qualsiasi dominio. Infatti, come si può facilmente constatare,*

$$\sup_{[0,\pi]} |\sqrt{\sin^2 x + n^{-2}} - \sqrt{\sin^2 x}| \leq \frac{1}{n},$$

b) $\frac{3x+n}{x+n}, \quad x \geq 0$*;*

Chiaramente converge puntualmente alla costante 1*. Ma il limite non è uniforme su* $[0,+\infty[$*: lo si vede, per esempio, notando che per ogni* n

$$lim_{x\to+\infty} \frac{3x+n}{x+n} - 1 = 2$$

(il che implica $\sup_{x\in[0,+\infty[} |\frac{3x+n}{x+n} - 1| \geq 2$*).*

Si prova facilmente che converge uniformemente (a 1 *!) su ogni sottoinsieme limitato di* $[0,+\infty[$*.*

c) $n^2x^2(1-x)^n, \qquad x \in [0,1]$*;*

Converge puntualmente a 0*. Non converge uniformemente: calcolare il massimo di* $n^2x^2(1-x)^n - 0$ *in* $[0,1]$ *e vedere che non converge a* 0*.*

d) $\frac{1+x}{x^n+n^2}, \quad x \geq 0.$

Puntualmente converge a 0*. Uniformemente converge a* 0 *su tutti i limitati. Su* $[0,+\infty[$ *..... farsi i conti.*

.

2 Serie di Fourier

Esercizio 2.1 *Sia* $f \in L^2([-\pi,\pi])$*. Allora:*

a) $f \in L^1([-\pi,\pi])$*;*
Sì, con il solito Shwarz.

b) f *è limitata;*
No: $f(x) = |x|^{-2/3}$ *se* $x \neq 0$*,* $f(0)$ *qualunque valore (*$f(0) = 0$ *per fissare le idee)*

c) la serie di Fourier di f converge puntualmente a f;

No, se è C^1 a tratti ma con salti, nei punti di salto converge al punto di mezzo, per "Dini migliorato"

(es. se $f(x) = x^2$ per $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = \cos x$ per $x \in]0, \pi]$, la Serie di Fourier nello 0 converge a 0.5.).

d) la serie la serie di Fourier di f converge a f in media quadratica (cioè nella norma $\|\cdot\|_2$.)

Sì, per teoria non ancora fatta.

e) la serie di Fourier di f converge uniformemente a f

NO, v. controesempio di c)

Esercizio 2.2 *Determinare la serie di Fourier della funzione $f \in L^2[-\pi, \pi]$, $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Prima di fare il conto, prevedere che la serie converge nello 0 e dire a quale somma converge.*

Fare i conti, e verificare che nello 0 la serie converge a 1.

Esercizio 2.3 *Sia f quella del precedente esercizio. Determinare i coefficienti reali a, b, c, d, e in modo che, posto*

$$P(x) = a + b\cos x + c\sin x + d\cos 2x + e\sin 3x \quad x \in [\pi, +\pi]$$

sia minima la distanza

$$\|P(x) - f(x)\|_2$$

Basta ricordarsi che i coefficienti di Fourier di f sono, per definizione, esattamente quelli che realizzano il minimo richiesto. Così, ad esempio,

$$b = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f\cos x dx \quad e = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f\sin(3x)dx$$

Esercizio 2.4 *Scrivere la serie di Fourier delle seguenti funzioni, e discutere il tipo di convergenza.*

a) $|\sin x|$ Convergenza uniforme, perché è continua, C^1 a tratti, e $|\sin(-\pi)| = |\sin(\pi)|$.

b) La funzione 2π-periodica dispari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$.

Convergenza uniforme per gli stessi motivi del precedente punto.

c) La funzione 2π-periodica pari che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$.

Convergenza uniforme per gli stessi motivi del precedente punto.

d) La funzione 2π-periodica che coincide con $x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$ e vale 0 in $[-\pi, 0]$.

Convergenza uniforme per gli stessi motivi del precedente punto.

e) La funzione 2π-periodica dispari che coincide con x^2 in $[0, \pi]$.

Per il criterio di Dini ("migliorato") la serie converge puntualmente in tutti i punti $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mentre in tali punti la serie converge a 0.