Introduzione non rigorosa al Teorema della Divergenza

January 19, 2009

1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Una delle *formule* di Analisi Matematica che in qualche modo rimangono impresse a studentesse e studenti è la seguente:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

che ovviamente non significa nulla finché non si siano specificati i significati degli oggetti in gioco.[1] Per renderla precisa, si può assumere quanto segue:

- $a, b \in I\!R$, e $a \leq b$
- la funzione $f : [a, b] \to I\!R$ è continua e l'integrale usato è il solito integrale di Riemann[2];
- $F : [a, b] \to I\!R$ è una funzione continua, derivabile su $]a, b[$, e tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a, b[$. Una tale funzione viene detta una *primitiva di* f. [3] [4]

Scriviamo ora la (1), con F' al posto di f:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a). \tag{TFCI}$$

Ci riferiremo a (TFCI) come al *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.*

---

[1] v. angolo via Barbarigo-via Dottori, a Padova.

[2] Esistono altre nozioni di integrale, ad esempio quello di Lebesgue; inoltre si possono dare versioni di (1) con ipotesi meno restrittive della continuità sulla funzione integranda f.

[3] È ben noto che, nelle nostre ipotesi, *F è una primitiva di f se e solo se per ogni $c \in I\!R$ $G \doteq F + c$ è una primitiva di f.* (Guardarsi dal credere che il "solo se" sia valido nel caso di domini diversi da un segmento, come, ad esempio, $] - 1, 1[-\{0\}$)

[4] È altresì ben noto che *una* primitiva di f è data da

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)dt \qquad \forall x. \in I\!R \tag{2}$$

Chiediamoci ora se

A) (TFCI) abbia un **senso intuitivo** chiaro;

B) esistano **generalizzazioni** di (TFCI) per $x \in I\!R^n$, con $n > 1$ (In altre parole: *c'è un analogo di (TFCI) per integrali su domini piani, solidi, o anche di dimensione maggiore di* 3?)

1.1 Sul significato intuitivo del (TFCI)

Essendo che l'integrale generalizza la nozione di somma, il (TFCI) dice, grosso modo, che *la somma degli $F'dx$al variare di x in $[a,b]$ e' uguale della differenza della sua primitiva agli estremi.* Per trovarne un significato intuitivo soddisfacente (oltre alla dimostrazione che ovviamente e' la piu' soddisfacente delle spiegazioni), pensiamo all'intervallo $[0,N]$, dove N e' un numero naturale. Poi:

i) sostituiamo l'intervallo $[0,N]$ con l'insieme discreto $D \doteq \{0,1,\ldots,N\}$, e *l' incremento dx* con $(n+1)-n = 1$;

ii) al posto della *derivata $F'(n)$*, consideriamo il rapporto incrementale

$$F^\flat \doteq \frac{F(n+1)-F(n)}{(n+1)-n} = F(n+1) - F(n)$$

;

iii) sostituiamo l'integrale $\int_0^N F'(x)dx$ con la somma

$$\sum_{n=0}^{N-1} (F^\flat(n)) \cdot 1$$

Si ha allora:

$$\int_0^N F'(x)dx \approx \sum_{n=0}^{N-1} F^\flat(n) =$$

$$(F(1)-F(0)) + (F(2)-F(1)) + \ldots + (F(N)-F(N-1)) =$$

$$F(N) - F(0).$$

$\diamond$ Qualora ciò appaia troppo rozzo (lo è, in effetti), si potrebbe rendere il precedente ragionamento *un po' più rigoroso* sostituendo F con una funzione continua $\tilde{F} : [0,N] \to I\!R$, coincidente con F per $x = 0,1,\ldots,N$ e lineare negli intervalli $[n,n+1]$, $n = 0,\ldots,N$. In questo modo, almeno, le derivate rimangono tali, senza bisogno dei rapporti incrementali...

Se neppure questo ci soddisfa pienamente, allora conviene passare alla dimostrazione vera e propria del (TFCI).

1.2 Preparandosi ad una generalizzazione del TFCI a dimensione > 1

Riscriviamo (TFCI):

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) + (-1)F(a). \tag{TFCI}$$

Osservazione 1.1 *Il secondo membro e' stato scritto in quel modo apparentemente bizzarro per dare un aiuto a chi sta cercando di indovinare una generalizzazione sensata di TFCI.*

Il dominio della funzione F è la chiusura $[a, b]$ dell'intervallo aperto $]a, b[$, che è un sottoinsieme di $I\!R$, e il codominio di F è R.

Per un qualsiasi n naturale, una funzione definita in un aperto $A \subset I\!R^n$ e a valori in $I\!R^n$ si dice un *campo vettoriale* (n-dimensionale) su A (la cosa importante qui è che dominio e codominio hanno la stessa dimensione).

Vogliamo arrivare ad enunciare una generalizzazione del TFCI a campi vettoriali n-dimensionali, con n qualsiasi. Tale teorema è generalmente detto *Teorema della divergenza*: la sua importanza in Matematica e nelle applicazioni è assolutamente cruciale.

Prima di arrivare ad un enunciato di questo teorema, cerchiamo di indovinarne la forma a partire dalla sua versione unidimensionale, vale a dire il TFCI.

A tale scopo pensiamo ad un fluido che scorre su di un tubo sottile rappresentato dal segmento $[a, b]$. Vogliamo interpretare il campo vettoriale unidimensionale F come la velocità euleriana del fluido: per ogni $x \in [a, b]$, $F(x)$ è la velocità della porzione di fluido che si trova in x.Perciò, nel tempo Δt, tal nostro tubo si troverà ad *uscire* la quantità

$$F(b)\Delta t - F(a)\Delta t$$

In particolare

$$F(b) - F(a) \tag{3}$$

è la quantità di fluido uscente dal tubo $[a, b]$ nell'unità di tempo. Siccome l'insieme $\{a, b\}$ coincide con la la frontiera $\partial(]a, b[$ di $]a, b[$, tale quantità è anche detta il *flusso istantaneo del fluido attraverso la frontiera* $\partial(]a, b[$.

Ora, (3) non è che il secondo membro di (TFCI). Si noti che tale secondo membro rimane invariato per qualunque modifica del campo F all'interno del tubo!! (purche' il campo modificato sia ancora derivabile).

Possiamo allora enunciare in modo efficace anche se non rigoroso il contenuto del TFCI come segue:

Versione *trivial* **del (TFCI):**

Per calcolare il flusso istantaneo uscente attraverso la frontiera $\partial(]a, b[) = \{a, b\}$ *e' sufficiente integrare la derivata* F' *lungo il tubo* $]a, b[$.

1.3 Indovinando ad una generalizzazione del TFCI a dimensione > 1

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una aperto, e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1.

Le considerazioni fatte nella sezione precedente ci portano a sperare in una generalizzazione del (TFCI) avente **grosso modo** la seguente forma:

Versione *sperata* **per una generalizzazione del (TFCI)**

Sia Ω aperto connesso e con qualche altra proprietà della frontiera. Per calcolare il flusso istantaneo uscente di un campo vettoriale F attraverso la frontiera $\partial\Omega$ e' sufficiente integrare una opportuna funzione delle derivate prime di F in Ω

Si tratta di capire:

- **[RH]**(Reasonable Hope) se la speranza sia fondata;
- **[BP]**(Boundary Properties) quali siano le proprietà da imporre alla frontiera $\partial\Omega$;
- **[WF]**(Who's "Flow"?) cosa sia il *flusso istantaneo uscente* per un campo F;
- **[WI]** (Who's "Integrand"?) cosa debba essere questa *funzione delle derivate...*

"Risposte":

1.3.1 [RH].

È ragionevole sperare, grazie al seguente argomento, non rigoroso ma abbastanza convincente. Siao $P = (a, b, c)$ $n = 3$ e si consideri il *parallelepipedo infinitesimo*

$$\Omega \doteq]a, a + \Delta x[\times]b, b + \Delta y[\times]c, c + \Delta z[,$$

con $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ positivi. Allora è sensato chiamare flusso uscente istantaneo dal parallelepipedo Ω la quantità

$$\begin{gathered}\mathcal{F} = \\ (F_1(P + \Delta x e_1) - F_1(P))\Delta y\Delta z + \\ (F_2(P + \Delta y e_2) - F_2(P))\Delta x\Delta z + \\ (F_3(P + \Delta z e_3) - F_3(P))\Delta x\Delta z\end{gathered}$$

Applicando lo sviluppo al primo ordine si ottiene

$$\mathcal{F} = (F_1)_x(P)\Delta x\Delta y\Delta z + (F_2)_y(P)\Delta x\Delta y\Delta z + (F_3)_z(P)\Delta x\Delta y\Delta z + o(\Delta x\Delta y\Delta z)$$

$$= \Big((F_1)_x(P) + (F_2)_y(P) + (F_2)_z(P)\Big)\Delta V + o(\Delta V)$$

dove si posto $\Delta V \doteq \Delta x\Delta y\Delta z$. D'altra parte, dal teorema della media si ha

$$\int_\Omega \Big((F_1)_x+(F_1)_y+(F_1)_z\Big)dxdydz = \Big((F_1)_x(P)+(F_2)_y(P)+(F_2)_z(P)\Big)\Delta V+o(\Delta V)$$

e dunque

$$\int_\omega \Big((F_1)_x + (F_1)_y + (F_1)_z\Big) dxdydz \approx \mathcal{F}$$

$\diamond$

L'operatore

$$F \mapsto \div F \doteq \Big((F_1)_x + (F_1)_y + (F_1)_z\Big)$$

si chiama *divergenza*, ed è una funzione (lineare!) delle derivate prime di F.

1.3.2 [BP]

Dobbiamo avere la possibilità di *orientare* la frontiera $\partial\Omega$. Questo significa, grosso modo, poter definire un vettore normale esterno ν con continuità su $\partial\Omega$.

1.3.3 [WF]

Una volta data la normale esterna ν alla superficie il flusso sar l'integrale d'area dato da

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$$

1.3.4 [WI]

Il punto [RH] suggerisce che la funzione da integrare su Ω per ottenere il flusso uscente istantaneo attraverso $\partial\Omega$ sia proprio la divergenza di F. Infatti, pensando Ω scomposto in tanti parallelepipedi infinitesimi, si avr che le facce adiacenti si elidono (per l'orientazione) mentre l'unione quelle che *rimangono scoperte* approssima la frontiera $\partial\Omega$.

2 Teorema della divergenza

A questo punto diamo un enunciato del vero teorema della divergenza.

Theorem 2.1 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto ammissibile e f un campo vettoriale definito su un aperto A tale che $\overline{\Omega} \subset A$. Allora il flusso di f uscente da Ω (che è un integrale di superficie) è uguale all'integrale della divergenza di f su Ω (che è un integrale di volume). Cioè,*

$$divergenza \int_\Omega div f(x)\, dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu \; dS \;, \tag{4}$$

dove ν è la normale esterna.

Rimandiamo al testo De Marco "Analisi due" per la definizione di *aperto ammissibile* [5], per la dimostrazione del teorema nei due casi particolari della sfera e del parallelepipedo, per la versione in $I\!R^2$ (che corrisponde alle formule di Green), e per altre interessanti osservazioni sull'argomento.

[5]Grosso modo: i) i punti attorno ai quali $\partial\Omega$ *non* è una supercicie di classe C^1 costituiscono un insieme di misura bidimensionale finita; ii) i punti attorno ai quali $\partial\Omega$ *non* è una supercicie di classe C^1 devono essere contenuti in una unione finita di porzioni compatte di curve di classe C^1.

La proprietà i) una significa che la frontiera ha superficie limitata: sì un cono di altezza limitata, si un parallelepido, una sfera, un poliedro qualsiasi, no un cilindro di altezza infinita, o un parallelepipedo con un lato illimitato, etc.