Fac-simile del primo compitino

Franco Rampazzo

November 6, 2008

Esercizio 0.1 *Si consideri la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodica di* 2π*, e la cui restrizione a* $[-\pi, \pi[$ *sia data da*

$$f(x) = x \ \ \forall x \in [0, \pi[, \quad f(x) = -\frac{x}{2} \ \ \forall x \in [-\pi, 0[.$$

La restrizione di tale funzione a $[-\pi, \pi]$ *è chiaramente appartenente a* $L^2([-\pi, \pi])$*.*

- *a) Senza calcolare la serie di Fourier, si giustifichi il fatto che essa converge puntualmente in ogni punto, e per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *se ne trovi il limite. Si dica se essa converge uniformemente in* $[-\pi, \pi]$*.*
- *b) Si calcoli la serie di Fourier di* f*.*
- *c) Si trovino* a, b *affinchè, nel dominio* $[-\pi, \pi]$ *, la distanza*

  $$\|f - (a\cos(2x) + b\sin(5x))\|_2$$

  sia minima.

Esercizio 0.2 *a) Si provi che nello spazio* $C([0, 1])$

$$\|f\|_1^\sharp \doteq \int_0^1 (1 + x^2)|f(x)|dx$$

definisce una norma.

b)Si provi che esistono costanti $A, B > 0$ *tali che*

$$A\|f\|_1^\sharp \leq \|f\|_1 \leq B\|f\|_1^\sharp \quad \forall f \in C([0, 1])$$

c) (facoltativo) Si provi con un esempio che $C([0, 1])$ *con la norma* $\|\cdot\|_1^\sharp$ *non è completo. (Suggerimento: grazie a b) ciò è equivalente alla non completezza con la norma* $\|\cdot\|_1$*).*

Esercizio 0.3 *Si enunci e si dimostri la disuguaglianza di Bessel.*

Esercizio 0.4 *Trovare infinite soluzioni continue* $u_n : [0,1] \times [0,10]$ *del problema*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial t} - \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t) \in]0,1[\times]0,10[\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in [0,10] \end{aligned} \tag{1}$$

Suggerimento: separazione di variabili.(Notare che non viene data una condizione iniziale).

Facoltativo *Mostrare che la serie*

$$\sum_{n=1} \frac{u_n(x,t)}{n^4}$$

definisce una funzione continua in $[0,1] \times [0,10]$ *che è soluzione del problema (1). (Suggerimento: derivazione termine a termine e convergenza totale)*