Equazione del Calore

January 21, 2009

Bibliografia:

- L.C. Evans, Partial Differential Equations, GSM, American Mathematical Society.
- S. Salsa, Equazioni a Derivate Parziali, Unitext, Springer

Si consideri un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $T > 0$, e il cilindro $Q_T \doteq \omega \times [0, T]$. Sia $\partial_p Q_T$ la cosiddetta frontiera parabolica:

$$\partial Q_T \doteq (\partial\Omega \times]0, T[) \cup (\bar{\Omega} \times \{0\}) \subset \partial Q_T$$

L'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f \tag{1}$$

è detta *del calore*, o anche, *di diffusione*. Il termine f è detto *di sorgente*. Se $f = 0$, l'equazione è detta omogenea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = 0 \tag{2}$$

Teorema 0.1 (Principio del Massimo.) *Sia $u : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$ continua e di classe C^2 nell'aperto Q_T —basta che sia C^1 nella variabile tempo t . Se*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - A\Delta u(x, t) = q(x, t) \leq \quad \forall (x, t) \in Q_T \tag{3}$$

(si dice in questo caso che u è sottosoluzione dell'equazione omogenea del calore) allora il massimo di u viene raggiunto sulla frontiera parabolica, i.e.,

$$\max_{\partial_p Q_T} u(x, t) = \max_{\bar{Q}_T} u(x, t) \tag{4}$$

In particolare, se $u \leq 0$ sulla frontiera parabolica, essa è ≤ 0 in tutto $\bar{Q}_T$.

Teorema 0.2 (Principio del Minimo.) *Sia $u : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$ continua e di classe C^2 nell'aperto Q_T —basta che sia C^1 nella variabile tempo t . Se*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - A\Delta u(x, t) = q(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in Q_T \tag{5}$$

(si dice un questo caso che u è soprasoluzione dell'equazione omogenea del calore) allora il massimo di u viene raggiunto sulla frontiera parabolica, i.e.,

$$\max_{\partial_p Q_T} u = \max_{\overline{Q_T}} u \quad (6)$$

In particolare se $u \geq 0$ sulla frontiera parabolica, essa è ≥ 0 su tutto $\overline{Q_T}$.

Poichè u è soluzione di (2) se e solo se essa è sia sotto- che sopra-soluzione di (2), si ha:

Corollario 0.3 Se u di è soluzione di(2), continua in $\overline{Q_T}$ e di classe C^2 in Q_T , allora sia il massimo che il minimo vengono assunti sulla frontiera parabolica. In particolore, per ogni $(x, t) \in \overline{Q_T}$, vale

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u.$$

Corollario 0.4 (Confronto, unicità, e dipendenza dai dati). Siano u_1 e u_2 , rispettivamente, soluzioni di

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f_1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f_2.$$

Allora:

- (1)(Confronto e, di conseguenza, unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet) Se $u_1 \geq u_2$ su $\partial_p Q_T$ e $f_1 \geq f_2$ in Q_T , allora $u_1 \geq u_2$ in tutto $\overline{Q_T}$.
- (2)(Dipendenza dai dati). Vale la stima

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_1 - u_2| + T \max_{\overline{Q_T}} |f_1 - f_2|$$

Dimostrazione. (1). Per le ipotesi, la funzione $w \doteq u_1 - u_2$ è sopra-soluzione dell'equazione omogenea (2), ed è ≥ 0 sulla frontiera parabolica. Per il Pricipio del Minimo risulta perciò $w \geq 0$, i.e. $u_1 \geq u_2$, in $\overline{Q_T}$.

(2). Si ponga $w \doteq u_1 - u_2$,

$$z^+ \doteq w + Mt, \quad z^- \doteq w - Mt,$$

dove

$$M \doteq \max_{\overline{Q_T}} |f_1 - f_2|.$$

Allora

$$\frac{\partial z^-}{\partial t}(x, t) - A\Delta z^-(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - M - A\Delta w(x, t) = f_1(x, t) - f_2(x, t) - M \leq 0$$

e

$$\frac{\partial z^+}{\partial t}(x, t) - A\Delta z^+(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + M - A\Delta w(x, t) = f_1(x, t) - f_2(x, t) + M \geq 0$$

Di conseguenza, per ogni $(x, t) \in \overline{Q_T}$,

$$z^-(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} z^- \leq \max_{\partial_p Q_T} w \quad z^-(x, t) \geq \max_{\partial_p Q_T} z^- \geq \min_{\partial_p Q_T} w,$$

vale a dire

$$w(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} w + Mt \leq \max_{\partial_p Q_T} |w| + MT$$

e

$$w(x, t) \geq \min_{\partial_p Q_T} w - Mt \geq \min_{\partial_p Q_T} |w| - MT = -(\max_{\partial_p Q_T} (-|w|) + MT),$$

da cui

$$|w(x, t)| \leq \max_{\partial_p Q_T} |w| + MT.$$

Passando al massimo in $\overline{Q_T}$ al primo membro e ricordando la definizione di w si ha la tesi.

◇