

Appunti sulle Equazioni differenziali

Franco Rampazzo

October 13, 2008

Queste note verranno continuamente aggiornate e appariranno sul mio sito personale, www.math.unipd.it rampazzo nel link "Didattica". Esse costituiscono un'integrazione un supporto didattico per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria che terrò nell'a.a. 2008-2009, presso la Facoltà di Ingegneria. Sono intese come un' aiuto alla comprensione del materiale che si trova sul libro di testo *A first Course in Partial Differential Equations, with complex variables and transform methods*, di Hans F. Weinberger, Dover edition. Per questioni didattiche darò privilegio alla velocità di pubblicazione rispetto alla forma. Per la stessa ragione, soprattutto le prime versioni, potranno contenere sviste, inesattezze, e mancanza di rigore. Sarò grato a chiunque voglia segnalarmele (rampazzo@math.unipd.it). Vanno un po' usate come "appunti di lezione", ad integrazione degli appunti presi a lezione, del libro di testo, e dei libri di consultazione. Esse faranno riferimento spesso a parti del libro di testo, con rimandi tipo (W, Cap...., Sez...., pag... th....), dove W significa il libro di testo. Altri riferimenti saranno DM (De Marco: Analisi Due) e In alcun modo queste note sono da considerarsi un prodotto editoriale finito o utilizzabile a tale scopo.

Chapter 1

Un'esempio per cominciare

1.1 Questioni cruciali nello studio delle PDE's

Per equazioni differenziali con condizioni al bordo, sono di cruciale importanza le seguenti questioni, che saranno approfondite per varie classi di problemi:

- **Esistenza.** Come già nelle equazioni finite ¹ e nelle ODE's, non è detto che una soluzione di una data equazione differenziale con date condizioni al contorno abbia una soluzione. Un'esempio di ODE che *non ha soluzione* è il seguente problema di Cauchy:

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = 0$$

dove $f(x) = 1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = -1$ per $x > 0$. Com'è noto, se f fosse continua una soluzione locale esisterebbe.

- **Unicità o molteplicità.** Così come l'equazione finita $z^2 + 1$ in $\mathbb{C}$ ha due soluzioni distinte, nel caso differenziale le soluzioni possono essere più d'una, anche infinite. Un'esempio di soluzione non unica viene dalle ODE's: il problema di Cauchy

$$y' = \sqrt{|y|} \quad y(0) = 0$$

ha infinite soluzioni oltre alla soluzione costante $y(x) = 0$ (Provarlo per esercizio). Al contrario, se f è di classe C^1 in un intorno di t_0 –ma basta anche meno– allora il problema di Cauchy

$$y' = f(y) \quad y(t_0) = y^0$$

ha un'unica soluzione, definita in un intorno sufficientemente piccolo di t_0 .

¹Qui *finite* sta in opposizione a *differenziali*: ad esempio $x^2 + 1 = 0$ è un'equazione finita, che non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, mentre ha due soluzioni in $\mathbb{C}$

- **Dipendenza continua dai dati** Questo concetto, che andrà precisato rigorosamente in seguito, stabilisce che la soluzione *cambia poco* se vengono variate di poco i dati del problema. Questi possono essere la forma dell'equazione oppure le condizioni al bordo. La dipendenza continua dai dati è una proprietà cruciale perchè un modello matematico (come, appunto, un'equazione differenziale) sia affidabile. Di fatto, *in pratica* non sarà mai vero che i dati del problema siano dati con esattezza. La continuità rispetto a tali dati garantisce perciò che piccoli errori nelle condizioni iniziali generino solo piccole variazioni nella soluzione. Nel caso delle ODE's si hanno noti criteri per stabilire la dipendenza dal dato iniziale. Nel caso che il campo vettoriale sia continuo e si abbia unicità della soluzione, tale continuità è assicurata. Naturalmente ciò richiede la precisazione di cosa si intenda per *vicinanza tra due funzioni*, concetto che sarà visto nel Capitolo ??.
- **Costruzione della soluzione o sua approssimazione.** Nei casi più fortunati si riesce a stabilire una procedura per trovare un'espressione esplicita dell'equazione. Nella maggior parte dei casi il meglio che si possa fare consiste nell'escogitare un buon meccanismo di approssimazione della soluzione. Il problema della corda vibrante ci dà l'opportunità di introdurre un metodo, quello di "separazione delle variabili", utile sia per trovare la soluzione esatta che per approssimarla con accuratezza notevoli.

1.2 L'equazione della corda vibrante

Una corda perfettamente elastica, omogenea (cioè di densità di massa costante) tesa tra due estremi viene qui schematizzata come una curva su un piano verticale, dove sono introdotte una coordinata orizzontale x e una coordinata verticale y , quest'ultima orientata verso l'alto.

Fissiamo gli estremi della corda nei punti $0,0$ e $(0,\ell)$: in assenza forze esterne, sotto l'azione della tensione la corda, possiamo assumere che la corda abbia una posizione di equilibrio coincidente col segmento $[0,\ell]$.

Vedremo ([?]) che, in prima approssimazione e sotto alcune ipotesi quantitative e qualitative, l'**equazione differenziale** del moto verticale $y = u(x,t)$ della corda ha la seguente forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.1)$$

dove $c > 0$ è una costante derivante dalle proprietà elastiche della corda stessa. Si noti che c ha le dimensioni $\frac{[spazio]}{[tempo]}$, e può quindi essere pensata come una *velocità*. È la cosiddetta velocità d'onda, concetto che sarà reso rigoroso più avanti. Fissando gli estremi nei punti $0,0$ e $(0,\ell)$ stiamo assegnando le cosiddette **condizioni al bordo** (boundary conditions)

$$u(0,t) = 0 \quad u(\ell,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0. \quad (1.2)$$

Inoltre, trattandosi di un problema di meccanica classica si dovranno assegnare la posizione e la velocità dei punti della corda all'istante iniziale. Questo si traduce nell'assegnazione delle cosiddette **condizioni iniziali** (initial conditions):

$$u(x, t) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x), \quad \forall (x, t) \in [0, \ell] \times]0, \infty[\quad (1.3)$$

1.3 Il metodo di separazione delle variabili

Cerchiamo funzioni $v = v(x)$ e $w = w(t)$ tali che

$$u(x, t) = v(x)w(t)$$

risulti soluzione di (1.1), (1.2) (le quali, in generale, non saranno soluzioni di (1.3)). Affinchè $u = u(x, t)$ sia di classe C^2 assumiamo v e w di classe C^2 . Inoltre assumiamo che la funzione $w = w(t)$ non sia identicamente uguale a 0, altrimenti avremmo anche $u(t, x) = 0$ per ogni $(t, x) \in [0, \infty[\times]0, \ell]$.²

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{dv}{dx}(x)w(t) & \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= v(x)\frac{dw}{dt}(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{d^2v}{dx^2}(x)w(t) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= v(x)\frac{d^2w}{dt^2}(t) \end{aligned}$$

da (1.1), otteniamo

$$v(x) \cdot \frac{d^2w}{dt^2}(t) - c^2 \frac{d^2v}{dx^2}(x) \cdot w(t) = 0 \quad (1.4)$$

Perciò

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{c^2 w''(t)}{w(t)} \quad \forall]0, \ell[,]\times \mathbb{R}^+. \quad (1.5)$$

Poichè il primo membro è funzione della sola x mentre il secondo è funzione della sola t essi non possono essere che costanti. Esiste dunque $r \in \mathbb{R}$ tale che v e w soddisfano, rispettivamente,

$$v''(x) - rv(x) = 0 \quad (1.6)$$

$$w''(t) - rc^2 w(t) = 0 \quad (1.7)$$

(1.6) e (1.7) sono ODE's lineari di secondo ordine. Ad esse vanno aggiunte delle condizioni al contorno.

²Notare che la $u(t, x) \equiv 0$ è una soluzione di (1.1), (1.2), corrispondente alla posizione di equilibrio della corda, ma essa soddisfa le condizioni iniziali (1.3) se e solo se entrambe (posizione e velocità) sono nulle, i.e. $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$.

³Questo procedimento **non** è rigoroso, perchè dovrebbero essere non nulli i denominatori. Tuttavia lo si trova in molti libri (ma non nelle dispense di G. De Marco, scaricabili in rete, dove (1.6) e (1.7) sono rigorosamente dedotte) e qui lo adottiamo per non rallentare questa presentazione elementare. Più avanti vedremo come si fa ad evitare tale inesattezza.

Se $w(t)$ non è identicamente nulla^{4a}

$$0 = u(0, t) = v(0)w(t) \quad 0 = u(\ell, t) = v(\ell)w(t)$$

si ottengono le condizioni agli estremi

$$v(0) = 0 \quad v(\ell) = 0 \quad (1.8)$$

da considerarsi insieme all'equazione (1.6).

Cerchiamo valori di r affinché il problema al contorno (1.6), (1.8) abbia una soluzione non nulla.

L'equazione caratteristica della ODE (1.6) è

$$p^2 - r = 0$$

Per $r > 0$ si ottiene perciò la soluzione generale

$$v(x) = Ae^{\sqrt{r}x} + Be^{-\sqrt{r}x}.$$

Imponendo le condizioni agli estremi (1.8) si ottiene $A = B = 0$ e dunque la soluzione banale.

Si ottiene $A = B = 0$ anche per $r = 0$.

Per $r < 0$ si ottiene una soluzione generale in forma complessa

$$v(x) = Ae^{i\sqrt{-r}x} + Be^{-i\sqrt{-r}x}.$$

Volendo un'espressione in forma reale si può, in alternativa, considerare la soluzione

$$v(x) = A \cos(\sqrt{-r}x) + B \sin(\sqrt{-r}x).$$

Imponendo le condizioni agli estremi (1.8) si ottiene $A = 0$, (B qualsiasi) e

$$\sqrt{-r} = \frac{k\pi}{l} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Per ogni k intero non negativo si ha perciò che il problema al contorno (1.6), (1.8) con $r \doteq \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, ha un'unica soluzione data da

$$v_k(x) \doteq \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad x \in [0, \ell].$$

Si vede immediatamente che, per ogni tale r , l'equazione (1.7) ha due soluzioni linearmente indipendenti $w_k, \tilde{w}_k$, definite da

$$w_k(t) = \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right), \quad \tilde{w}_k(t) = \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)$$

Dunque, per ogni k sia

$$u_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)$$

^{4d}

che

$$\tilde{u}_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right)$$

sono soluzioni dell'equazione della corda vibrante (1.1) con condizioni al bordo (1.2). (Si noti che in generale queste soluzioni *non* soddisfano le condizioni iniziali (1.3)).

Se L denota l'operatore (differenziale)

$$u \mapsto Lu \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

e L_1 denota l'operatore "(valutazione in $(0, t)$, valutazione in (ℓ, t) ", vale a dire

$$L_1(u) \doteq (u(1, \cdot), u(\ell, \cdot))$$

allora il problema (1.1) (1.2) si può scrivere nella seguente forma sintetica:

$$\begin{cases} L(u) = 0 \\ L_1(u) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Si noti che sia L che L_1 sono *lineari*. Perciò dati dei qualsiasi coefficienti reali $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$, la funzione

$$u \doteq a_1 u_1 + b_1 \tilde{u}_1 + \dots + a_N u_N + b_N \tilde{u}_N = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{l}t\right) \right)$$

è soluzione di (1.9), vale a dire del problema (1.1) (1.2).

(Infatti, per linearità, $L(u) = \sum_{k=1}^N (a_k L(u_k)) + b_k L(\tilde{u}_k) = 0$. La stessa cosa vale per l'operatore L_1 .)

1.3.1 Condizioni iniziali

Finora abbiamo ottenuto soluzioni

$$u \doteq a_1 u_1 + b_1 \tilde{u}_1 + \dots + a_N u_N + b_N \tilde{u}_N$$

che sono combinazioni lineari di un'insieme infinito di soluzioni (due per ogni k). In generale *nessuna di queste soluzioni soddisfa a date condizioni iniziali* (1.3). **Tuttavia, se f e g hanno la speciale forma**

$$f(x) = \sum_1^N f_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \quad g(x) = \sum_1^N g_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad (1.10)$$

allora possiamo trovare una soluzione tra tali combinazioni lineari che soddisfa non solo (1.1) (1.2) ma anche (1.3).

Infatti, se

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(a_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) \right)$$

si ha

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(-\frac{cka_k\pi}{l} \sin\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) + \frac{ckb_k\pi}{l} \cos\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) \right)$$

In particolare si hanno le relazioni,

$$\begin{aligned} \sum_1^N f_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) &= f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) a_k, \\ \sum_1^N g_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) &= g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \frac{ckb_k\pi}{l}, \end{aligned}$$

che vengono soddisfatte da

$$a_k \doteq f_k \quad b_k = \frac{g_k \ell}{ck\pi}$$

Dunque, per i dati iniziali (1.10), la funzione

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \left(f_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) + \frac{g_k \ell}{ck\pi} \sin\left(\frac{ck\pi t}{l}\right) \right)$$

é una soluzione del problema (1.1),(1.2),(1.3). (In realtà essa è l'unica soluzione, perché, come si vedrà, vale un risultato di unicità).