Serie

Franco Rampazzo

October 2, 2009

1 Spazi metrici

Definizione 1.1 *Sia M un insieme non vuoto. Una distanza (o metrica) su M è una applicazione $M \times M \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:*

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$;
- $d(x, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$ *(attenzione: vale anche il "solo se"!)*
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$;

Esempi di spazi metrici(verificare caso per caso):

1) Sia n intero positivo, M sottinsieme qualunque di $\mathbb{R}^n$, e $d(xy) \doteq |x - y|$. Allora (M, d) è spazio metrico. In particolare $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico. Identificando (solo per questo scopo) $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$, anche $\mathbb{C}^n$ risulta uno spazio metrico.

2) $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) \doteq 1$ se $x \neq y$, e $d(x, x) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. (*distanza discreta*)

3) Sia M un qualsiasi sottoinsieme di $C([0, 1])$. Allora le seguenti d_1, d_2, d_∞ sono distanze:
$$d_1(f, g) \doteq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$
$$d_2(f, g) \doteq \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$
$$d_\infty(f, g) \doteq \sup\{|f(t) - g(t)| \quad | \quad t \in [0, 1]\}$$

4) Più in generale, se K è un compatto di $\mathbb{R}^n$ e $M \subset C(K, \mathbb{R})$ (funzioni continue da K in $\mathbb{R}$) allora si hanno le distanze:
$$d_1(f, g) \doteq \int_K |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_2(f,g) \doteq \left(\int_K |f(x)-g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$d_\infty(f,g) \doteq \sup\{|f(t)-g(t)| \quad | \quad x \in K\}$$

Definizione 1.2 *Sia M, d uno spazio metrico. Una successione a_n a valori in M si dice* di Cauchy *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero N tale che ogni qualvolta $n, m \geq N$ si ha che*

$$d(a_n, a_m) \leq \epsilon$$

Teorema 1.3 *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione: DM o appunti lezione.

Osservazione 1.4 *Non vale il viceversa! Ad esempio se si prende $M = \mathbb{Q}$ e d la distanza usuale, la distribuzione $a_n \doteq (1+1/n)^n$ è di Cauchy (essendo corvergente in $\mathbb{R}$) ma non è convergente (perché?).*

Definizione 1.5 *Uno spazio metrico (M, d) si dice* completo *se ogni successione di Cauchy è convergente.*

Per l'Osservazione precedente, $\mathbb{Q}$ (con la distanza usuale) **non è completo.** Com'è noto, $\mathbb{R}$ **è completo.**

Provare per esercizio quanto segue:

Lemma 1.6 *Se (M, d),$(\tilde{M}, \tilde{d})$ sono completi, allora munendo $M \times \tilde{M}$ della distanza*

$$\hat{d}((x,\tilde{x}),(y,\tilde{y})) \doteq \sqrt{d^2(x,y) + d^2(\tilde{x},\tilde{y})},$$

lo spazio metrico $(M \times \tilde{M}, \hat{d})$ risulta completo.

Dal precedente risultato si ricava che $\mathbb{R}^n$, e quindi $\mathbb{C}^n$, **è completo**.

Vediamo dei casi di spazi di funzioni:

Teorema 1.7 *Sia E un insieme qualunque di $\mathbb{R}^n$ e sia $B(E)$ la famiglia delle funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ limitate. Allora $B(E)$, munito della distanza d_∞ è completo*

Vogliamo ora dimostrare

Teorema 1.8 *. Se K é un compatto di $\mathbb{R}^n$, allora lo spazio delle funzioni reali continue definite su K, $C(K)$ è completo.*

Ciò è conseguenza dei due seguenti risultati, che sono importanti di per sè:

Teorema 1.9 *Sia (M, d) uno spazio completo e $C \subset M$. Il sottospazio metrico (C, d)è completo se e solo se è chiuso*

Dimostrazione. Sia C chiuso, e sia (a_n) una successione di Cauchy in C. In particolare, essa è una successione di Cauchy anche in M, perchè la distanza è la stessa. Essendo M completo, la successione (a_n) converge ad un limite $a \in M$. Basta dunque mostrare che $a \in C$: ma ciò è certamente vero, essendo C chiuso (si ricordi che un sottoinsieme $C \subset M$ è chiuso se e solo se per ogni successione (a_n) in C convergente ad un limite a, si ha $a \in M$).

Viceversa, sia C completo e sia (a_n) una successione convergente (in M) ad $a \in M$. Allora essa è di Cauchy in M e dunque anche in C. Per l'assunta completezza di C si ha allora che (a_n) converge C, e, per l'unicitá del limite, il limite di (a_n) non può che essere a. Dunque $a \in C$, il che mostra che C é chiuso.

Teorema 1.10 *Rispetto alla distanza d_∞, $C(K)$ è un sottoinsieme chiuso di $B(K)$.*

Dimostrazione. L'enunciato del teorema si puó anche dire così: se f_n sono funzioni continue su K e la funzione (limitata) f è il loro limite uniforme (cioè per d_∞), allora f è continua. Ciò è dimostrato in [DM, Th. 1.5.10] (oltre ad essere stato dimostrato a lezione).

Chiaramente, mettendo insieme i Teoremi 1.9 e 1.10 si ottiene il Teorema 1.8.

Esercizio. Si denoti con $C^1([a,b])$ l'insieme delle funzioni f reali definite in $[a,b]$ continue, derivabili in $]a,b[$, e tali che la derivata f' sia continua e abbia limiti sinistro e destro, rispettivamente, in b e a.

Si mostri con un esempio che $C^1([a,b])$ non è chiuso in $C^0([a,b])(= C([a,b]))$, sempre rispetto alla distanza della convergenza uniforme (cioè d_∞).

Definizione 1.11 *Sia V uno spazio vettoriale. Uno* **norma** *è un'applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che*

- $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$*;*
- $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$*;*
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e ogni* $v \in V$*;*
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *per tutti i* $v, w \in V$*.*

Uno spazio vettoriale V dotato di una norma si dice **spazio normato***.*

Osservazione 1.12 *Ogni spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio metrico, quando si consideri la distanza*

$$d(w,v) \doteq \|w - v\|$$

Definizione 1.13 *Uno spazio normato completo si dice* **spazio di Banach**. [1]

Esercizi.

- Si verifichi la precedente osservazione.
- Si riconoscano quali tra i precedenti spazi metrici sono spazi normati.
- Si osservi che uno spazio metrico non è in generale uno spazio vettoriale, mentre uno spazio normato è vettoriale per definizione. D'altra parte un sottoinsieme di uno spazio normato è certamente uno spazio metrico, ed è anche normato se e solo se è un sottospazio vettoriale. (Per esempio, nel piano, una retta per l'origine è uno spazio normato, mentre una circonferenza, o anche un cerchio, o qualsiasi altro insieme che non sia una retta per l'origine sono metrici ma non normati).
- Lo spazio $M(n \times m)$ delle matrici di n righe e m colonne è uno spazio normato quando lo si identifichi con $\mathbb{R}^{nm}$ con la norma euclidea. Vale a dire che se per ogni matrice $A = (A_{r,s})$ si pone

$$|||A||| \doteq \sqrt{\sum_{r=1,\dots,n}^{s=1,\dots m} |A_{rs}|}$$

allora $||| \cdot |||$ è una norma $M(n \times m)$. Chiaramente $(M(n \times m), ||| \cdot |||)$ è completo, cioè è uno spazio di Banach.

1.1 Norme e distanze equivalenti

Definizione 1.14 . *Sia V uno spazio vettoriale, e siano $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ due diverse norme su di esso. Si dice che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme equivalenti se esistono due costanti $A, B > 0$ tali che*

$$A\|\mathbf{v}\|_1 \leq \|v\|_2 \leq B\|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

(che è ovviamente lo stesso che esistano due costanti $C, D > 0$ tali che

$$D\|\mathbf{v}\|_2 \leq \|v\|_1 \leq D\|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

Basta prendere $C = \dots, D = \dots$

Definizione 1.15 *Analogamente, se E è un insieme , e siano d_1, d_2 sono due diverse distanze su di esso. Si dice che d_1 e d_2 sono norme equivalenti se esistono due costanti $A, B > 0$ tali che*

$$Ad_1(v, w) \leq d_2(v, w) \leq Bd_2(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

[1] Stefan Banach, grande matematico polacco, 1892-1945, v. http://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach

(che è ovviamente lo stesso che esistano due costanti $C, D > 0$ tali che

$$Cd_1(v,w) \le d_2(v,w) \le Dd_2(v,w)$$

Basta prendere $C = \dots, D = \dots$

Esercizio Provare che se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme (su uno spazio vettoriale V) e d_1, d_2 sono le corrispondenti metriche, allora $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti come norme se e solo se d_1 e d_2 sono equivalenti come distanze.

Esercizio Provare che d_1, d_2, d_∞ su $C([0,1],\mathbb{R})$ sono distanze NON equivalenti. Riconoscere anche che tutte provengono da norme.

Esercizio. Sullo spazio vettoriale delle matrici $M(n \times m)$ definire

$$\|M\| \doteq \max_{|v|=1} |Mv|,$$

intendendo il massimo su tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^m$ di norma euclidea uguale a uno. (Se $m = 2$ sono quelli del cerchio di raggio 1). Provare che $\|\cdot\|$ è una norma, e che è equivalente a quella precedentemente definita.

2 Prodotto scalare

Definizione 2.1 *Sia V uno spazio vettoriale (reale). Si chiama* prodotto scalare *una applicazione $<\cdot,\cdot>: V \times V$ che verifica le seguenti proprietà:*

- $< x, y >=< y, x > \qquad \forall x, y \in V$*;*
- $< ax + by, z >= a < x, y > +b < y, z > \qquad \forall x, y, z \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$*;*
- $< x, x >\ge 0 \quad \forall x \in V$ *and* $< x, x >= 0 \leftrightarrow x = 0$.

Osservazione 2.2 *In virtù della prima e seconda proprietà si ha anche*

$$< z, ax + by, >= a < z, x > +b < z, y > \qquad \forall x, y, z \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Definizione 2.3 *Sia V uno spazio vettoriale provvisto di un prodrotto scalare $<,>$. La funzione su V*

$$\|x\| \doteq \sqrt{< x, x >}$$

è detta la norma associata *al prodotto scalare $<,>$.*

Esercizio 2.4 *Verificare che la funzione $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma.*

Definizione 2.5 *Uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare che sia completo rispetto alla norma corrispondente si dice uno* **spazio di Hilbert**. [2]

Esempi-esercizi. Verificare che i seguenti insiemi sono effettivamente degli spazi vettoriali, che le applicazioni $<,>$ sono prodotti scalari, e definire esplicitamente le corrispondenti norme:

[2] David Hilbert, 1862-1943, tedesco, uno dei più grandi matematici dei secoli diannovesimo e ventesimo, v. http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

- $V = \mathbb{R}^n$, $< x, y > \doteq \sum_{i=1}^N x^i y^i$
- $V = \mathbb{R}^n$, $< x, y > \doteq x^\dagger A y$, dove A è una matrice quadrata definita positiva[3], dove i vettori sono pensati come vettori colonna e † indica trasposizione.
- $V = \ell^2 \doteq \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \sum_{n=1}^\infty (a_n)^2 < +\infty\}$ con $< (a_n), (b_n) > = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$. l^2 è detto lo spazio vettoriale delle *successioni a quadrato sommabile* (Verificare primariamente che si tratta di uno spazio vettoriale).
- $V \doteq C([a, b])$ e $< f, g > \doteq \int_a^b f(t)g(t)dt$; In questo caso per la norma si usa il simbolo $\| \cdot \|_2$, e la si chiama norma L^2 (vedi punto successivo)
- $<, >$ come nel punto precedente ma $V = L^2[a, b]$. Non possiamo a questo punto dare una definizione rigorosa dello spazio $L^2[a, b]$. Per farlo, avremmo bisogno della teoria dell'integrazione alla Lebesgue (v. ad es. DM). Accontentiamoci di dire che $L^2[a, b]$ contiene le funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue a tratti* e a quadrato sommabile, tali cioè che esiste un numero finito di punti $a < t_1, \dots, t_N < b$ tali che

  1) f è continua in $]t_i, t_{i+1}[$ per ogni $i = 1, \dots, N + 1$;
  2) $\int_a^b f^2(t)dt < +\infty$ (dove l'integrale è da intendersi in senso generalizzato)

  Va detto inoltre che due funzioni sono in $L^2[a, b]$ due funzioni sono considerate *equivalenti* se esse coincidono per ogni $t \in [a, b] \backslash \mathcal{N}$, dove $\mathcal{N}$ ha *misura nulla*. (Pur non avendo dato la definizione di insieme a misura nulla, ricordiamo che ogni insieme numerabile [4] ha misura (di Lebesgue) nulla.)
- Se $\rho \in C([a, b]$ è una funzione positiva, allora anche

  $$< f, g > \doteq \int_a^b f g \rho dt$$

  è un prodotto scalare su $V = L^2([a, b]$.
- generalizzare i precedenti esempi a $n > 1$, sostituendo l'intervallo $[a, b]$ con un unsieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$.

[3]Cioè $z^\dagger A z > 0$ se e solo se $z \neq 0$.

[4]Un insieme (infinito) E si dice *numerabile* se esiste una corrispondenza biunivoca tra E ed $\mathbb{N}$. Detta male: E è numerabile se ha *tanti elementi quanti ne ha* $\mathbb{N}$. Ricordiamo che $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e l'insieme dei numeri pari positivi sono tutti numerabili. $\mathbb{R}$ non è numerabile, e, dunque neppure $C([0, 1])$

Proposizione 2.6 (**Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**) *Sia V uno spazio vettoriale provvisto di un prodrotto scalare. Allora, per ogni $x, y \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1}$$

Inoltre il segno l'uguaglianza vale se e solo se $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. I casi in cui $x = 0$ o $y = 0$ sono banali, percìo possiamo assumere $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Consideriamo la funzione $k : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$,

$$k(a) \doteq < ax + y, ax + y >= a^2\|x\|^2 + 2a < x, y > +\|y\|^2$$

Se $ax + y \neq 0$ per alcun a, allora $k(a) > 0$ per ogni valore di a. Perciò

$$\Delta/4 \doteq |< x, y >|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 < 0.$$

Se invece esiste $\tilde{a}$ tale che $k(\tilde{a}) = 0$ allora $\tilde{a}x+y = 0$ cioè , posto $c \doteq -\tilde{a}$, valgono l'uguaglianza $y = cx$ e

$$0 = |< x, y >| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

$\diamond$

Scriviamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per alcuni casi importanti:

- (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per $\mathbb{R}^n$):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leq |x||y| \tag{2}$$

- (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per l_2):

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x^i y^i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}(y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

- (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per $L^2([a, b])$):

$$\left|\int_a^b fgdt\right| \leq \left(\int_a^b f^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Come esempio di applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dimostriamo che su $C([a, b])$ la norma $\|\cdot\|_1$ è *dominata* dalla norma $\|\cdot\|_2$.

Proposizione 2.7 *Per ogni $f \in C([a, b])$ si ha*

$$\|f\|_1 \leq (b - a)\|f\|_2 \tag{5}$$

Dimostrazione *Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz allle funzioni f e $g = 1$ si ottiene*

$$\|f\|_1 = \int_a^b (1 \cdot |f(t)|)dt \leq \|1\|_2\|f\|_2 = (b - a)\|f\|_2$$

3 Serie

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato (quindi metrico) e sia (a_n) una successione a valori in V.

Definizione 3.1 *La* successione (s_k) delle somme parziali*, definite, per ogni* $k \in \mathbb{N}$*, da*

$$s_k \doteq \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

è detta la serie associata alla succesiione (a_n)*, e viene indicata con il simbolo*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n.$$

a_n *è detto il* termine generico della serie.

Definizione 3.2 *Si dice che* la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge ad $S \in V$*, o anche che* S è la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, se*

$$\lim s_k = S$$

In tal caso, si scrive [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

È ben noto il seguente fatto, almeno nel caso in cui $V = \mathbb{R}$. La dimostrazione nel caso generale è identica.

Teorema 3.3 *Il termine generico di una serie convergente è infinitesimo. In altre parole, se esiste* S *tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

allora

$$\lim a_n = 0.$$

[5] Con innoquo abuso di notazione: in generale la notazione $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ indica l' oggetto *serie*, che non è altro che la successione delle somme parziali; d'altra parte, con la stessa notazione stiamo indicando la *somma* della serie (supposta quindi convergente!). Il contesto chiarisce, in ogni caso, il vero significato. L'importante è che la distizione sia però chiara a chi legge (...e deve fare l'esame)

È noto che il viceversa è falso: la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente.

Poichè una serie è una successione (di somme parziali), vi si trasporta in particolare la nozione di condizione di Cauchy. Traducendo dalla definizione per le successioni, si ottiene

Definizione 3.4 *Una serie soddisfa la condizione di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero N tale che per ogni n, m per cui $m > n \geq N$ si ha*

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right\| \Big(= \|a_{n+1} + \ldots + a_m\| \Big) \leq \epsilon$$

Per quanto visto sulle successioni, la condizione di Cauchy è necessaria per la convergenza di una serie, mentre l'affermare che essa è anche sufficiente è equivalente a dire che lo spazio in questione è completo.

Veniamo ora ad una nozione specifica per le serie: quella di *convergenza totale* (o *normale*), detta anche *convergenza assoluta* nel caso lo spazio V coincida con $\mathbb{R}$.

Definizione 3.5 *Diciamo* totalmente convergente *una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ per cui risulti convergente la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$$

Una serie può essere convergente senza essere totalmente convergente. Un esempio elementare, in $\mathbb{R}$, è dato da $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Al contrario, in uno spazio completo, la totale convergenza implica la convergenza, come stabilisce il seguente risultato:

Teorema 3.6 *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato completo. Se una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è totalmente convergente allora essa è convergente.*

Dimostrazione. Dire che la serie è totalmente convergente signica dire che la serie delle norme è convergente. Ma allora la serie delle norme è di Cauchy, cioé $\forall \epsilon > 0 \; \exists N$ tale che per $m > n \geq N$ si ha

$$\|a_{n+1}\| + \ldots + \|a_m\| \leq \epsilon.$$

Dalla disuguaglianza triangolare otteniamo che

$$\|a_{n+1} + \ldots + a_m\| \leq \|a_{n+1}\| + \ldots + \|a_m\| \leq \epsilon,$$

vale a dire, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è di Cauchy. Poiche V è completo ne segue che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente.

4 Serie di funzioni

Se specializziamo la nozione di totale convergenza al caso dello spazio $C([a,b])$ con la norma del sup $\|\cdot\|_\infty$, allora il Teorema 3.6 diviene:

Teorema 4.1 *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)$ *una serie di funzioni appartenenti a* $C([a,b])$*. Allora, se essa converge totalmente –vale a dire la serie numerica* $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ *è convergente– allora, per il Teorema 3.6, essa converge anche uniformemente.*

Esercizio. Studiare la convergenza uniforme in $[0,1]$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2(\frac{1}{n})\right) \arctan(n^t + t).$$

Soluzione. Sia $f_n \in C([0,1])$ il suo termine generico. Si ha, per ogni $t \in [0,1]$ e ogni numero naturale n,

$$|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2},$$

da cui

$$\|f_n\| \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$ converge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ converge, vale a dire, la nostra serie di partenza converge totalmente. Dunque, essa converge anche uniformemente.

Consiglio:*Poichè la convergenza totale è una convergenza di serie numeriche a termini positivi, sarà utile ripassare quest'ultime...*

4.1 Passaggio al limite sotto il segno di integrale *(Ovvero, per le serie: integrazione termine a termine)(v. DM §1.6)*

Sia J un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e $f \in C(J)$. Fissato $c \in J$, si consideri la *funzione integrale*

$$I_c(f)(x) \doteq \int_c^x f(t)dt.$$

L'operatore

$$I_c : C(J) \cap B(J) \to C(J) \cap B(J),$$

che manda la funzione $f(\cdot)$ nella funzione $I_c(f)(\cdot)$, è chiaramente *lineare* (cioè: $I_c(\alpha f + \beta g) = \alpha I_c(f) + \beta F_c(g)$). Il seguente teorema dice che esso è anche *continuo*, quando su dominio e codominio di consideri la norma $\| \cdot \|_\infty$. (Detto in breve: se f e g sono vicine nella norma $\| \cdot \|_\infty$, allora lo sono anche le loro funzioni integrali)

Teorema 4.2 (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE) *L'operatore I_c è continuo rispetto alle convergenze uniformi.*

In altre parole, se (f_n) è una successione di funzioni definite in J, continue e limitate,e tali che

$$\lim_{n\to\infty} = f \quad \textit{uniformemente,}$$

allora la successione delle funzioni integrali converge uniformemente alla funzione integrale di f:

$$\lim_{n\to\infty} I_c(f_n) = I_c(f) \quad \textit{uniformemente} \tag{6}$$

La tesi è (6) talvolta scritta nel seguente modo, forse più espressivo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(t)dt = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt \quad \textit{uniformemente}$$

Per la dimostrazione, v. ad esempio DM, Proposizione 1.6.1 (dove è scritto $C_b(J)$ al posto di $C(J) \cap B(J)$).

Sia $a < b$, e si consideri ora il funzionale reale "Integrale su $[a, b]$"

$$I : C([a, b]) \to \mathbb{R}$$

che possiamo denominare "Integrale su $[a, b]$".

Corollario 4.3 *Il funzionale I è (lineare e)* continuo. *Altrimenti detto:*

se (f_n) è una successione di funzioni definite in $[a, b]$, e continue, e tali che

$$f_n \to f \quad \textit{uniformemente,}$$

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \to I(f). \tag{7}$$

La tesi (7)è talvolta scritta nel seguente modo, forse più espressivo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt \ .$$

Esercizio 1. Con un esempio, mostrare che l'ipotesi di limitatezza dell'intervallo J nel Teorema 4.2 è essenziale. (Suggerimento: una piramide (s'intende disegnata, bidimensionale, un triangolo insomma) sempre più bassa ma sempre più larga –quanto più larga?– richiede la stessa quantità di materiale da costruzione)

Esercizio 2. Mostrare che il Teorema 4.2 non vale con la sola assunzione di convergenza puntuale.(Suggerimento: piramidi sempre più strette e alte che si muovono verso un estremo di dell'intervallo J....)

Esercizio 3 Enunciare il Teorema 4.2 e il Corollario per le serie. [6]

4.2 Passaggio al limite sotto il segno di derivata *(Ovvero, per le serie: derivazione termine a termine)*

Vediamo ora come si comportano le successioni (e quindi le serie) rispetto alla derivazione.

Esempio 4.4 *(in cui le cose vanno male.)* Se $f_n \doteq n^{-1}\sin(nx)$, $f_n \in C^1([0,1])$ (in realtà $f_n \in C^\infty([0,1])$), e

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

uniformemente in $[0,\pi]$. Tuttavia, la successione $\frac{df_n}{dx}$ non solo non converge alla derivata di $\frac{df}{dx} \equiv 0$ – ma non converge ad alcuna funzione, neppure puntualmente.

Esempio 4.5 *(in cui le cose vanno meglio (*perchè?*))*

$$f_n \doteq n^{-2}\sin(nx)$$

Vale invece il seguente teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata, che è in realtà una sorta di riformulazione del Teorema 4.2.

Teorema 4.6 (PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI DERIVATA) *Sia (f_n) una successione di funzioni $f_n \in C^1([a,b])$ e si supponga che:*

i) la successione delle derivate (f_n') converga uniformemente a una funzione $g \in C([a,b])$;

ii) esista $c \in [a,b]$ tale che la successione reale $(f_n(c))$ sia convergente.

---

[6] Soluzione in breve:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{unif.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x f_n(t)dt = \int_c^x f(t)dt \quad \text{unif.}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{unif.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Enunciare rigorosamente queste due implicazioni, dette genericamente *integrazione termine a termine.*

Allora:

a) *la successione* (f_n) *converge uniformemente a una funzione* f*;*

b) *per ogni* $x \in [a,b]$ *si ha*

$$f'(x) = g(x) \quad \left(= \lim_{n \to +\infty} f'_n \right).$$ [7]

In particolare $f \in C^1([a,b])$.

Riferito alle serie il teorema diventa:

Teorema 4.7 (Derivazione termine a termine) *Sia* (h_n) *una successione di funzioni appartenenti a* $C^1([a,b])$ *e si supponga che:*

i) *esista una funzione (continua) k tale che, si abbia, uniformemente,*

$$\sum_{n=i}^{\infty} h'_n = k;$$

ii) *esista* $c \in [a,b]$ *tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(c) < +\infty$$

(cioè la serie reale $\sum_{n=i}^{\infty} h_n(c)$ *sia convergente).*

Allora, esiste una funzione (continua) h tale che:

a) *Si ha*

$$\sum_{n=i}^{\infty} h_n = k,$$

uniformemente;

b) *La funzione h è derivabile per ogni* $x \in [a,b]$*,*

$$h'(x) = k(x) \,.$$ [8]

In particolare $h \in C^1([a,b])$*. In modo suggestivo*[9]*, si può esprimere b) scrivendo*

$$\left(\sum_{n=i}^{\infty} h_n \right)' = \sum_{n=i}^{\infty} h'_n$$

[7] Naturalmente f'(a) = g(a) significa qui $\lim_{x \to a+} f'(x) = g(a)$; in modo analogo si deve interpretare $f'(b) = g(b)$.

[8] Vale un'osservazione analoga a quella delle successioni per gli estremi a e b

[9] *Suggestivo* rispetto al sogno del matematico pigro: trasportare le proprietà degli insiemi finiti a quelli infiniti.